Math. A. 245t

3/30

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Uebungen

aus der

angewandten Mathematik

für

Techniker und beſonders für Architekten, Artilleriſten, Ingenieure, Forſt- und Bergbau-Beamte ꝛc.,

bearbeitet

von

Dr. Ephraim Salomon Unger.

Erſter Band.

Uebungen aus der reinen und angewandten Stereometrie.

(Mit fünf Kupfertafeln.)

Berlin,
bei J. A. Liſt.
1830.

Uebungen

aus der

reinen und angewandten

Stereometrie

für

Techniker und beſonders für Architekten, Artilleriſten, Ingenieure, Forſt- und Bergbau-Beamte ꝛc.,

bearbeitet

von

Dr. Ephraim Salomon Unger.

Staatsbibliothek München

Mit fünf Kupfertafeln.

Berlin,
bei J. A. Liſt.
1830.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Die Mathematik hat den weſentlichen Vorzug, daß ſie das zweckmäßigſte Hülfsmittel zur Uebung der Urtheilskraft abgiebt, und ihre Lehren überall im Leben mit dem beſten Erfolg ſich anwenden laſſen; es wird daher auch mit Recht allgemein gefordert, daß jeder Techniker, ſo wie der wiſſenſchaftlich Gebildete, wenigſtens ſo weit mit den Lehren dieſer Wiſſenſchaft vertraut ſei, daß es ihm möglich wird, die vielfach im Leben vorkommenden mathematiſchen Erörterungen praktiſcher Gegenſtände zu verſtehen, und nöthigen Falls dergleichen ſelbſt auszuarbeiten. Zur Erreichung dieſes Zweckes aber iſt ein blos theoretiſches Studium nicht hinlänglich, ſondern es ſind hierzu vielfache Uebungen nöthig, durch die allein die erforderliche Gewandtheit erlangt werden kann, um die Mathematik überall mit dem Erfolg anwenden zu können, der nur durch ſie zu erreichen iſt. Die Richtigkeit dieſer Anſicht iſt längſt anerkannt; es fehlt uns daher auch keinesweges an Werken, welche Sammlungen von Aufgaben über die verſchiedenen Theile der reinen Mathematik enthalten, und die daher Gelegenheit zur Uebung der theoretiſchen Lehren vielfach darbieten. Die angewandte Mathematik aber, für welche Uebungen gewiß eben ſo nöthig als für die Theorie ſind, iſt in dieſer Hin-

ſicht bis jetzt gänzlich vernachläſſigt worden. Das gegenwärtige Werk, durch welches dieſem Mangel einigermaaßen abgeholfen werden ſoll, enthält die von dem Verfaſſer in einem Zeitraume von mehr als funfzehn Jahren über dieſen Gegenſtand geſammelten Materialien. Die Bearbeitung iſt hier von der, bei Aufgaben-Sammlungen aus der reinen Mathematik gebräuchlichen dadurch abweichend, daß die wichtigſten Lehrſätze der behandelten Wiſſenſchaften ſelbſt mit aufgenommen worden ſind, um hierdurch das Zurückweiſen auf Lehrbücher zu vermeiden, und überhaupt um das Werk ſelbſtſtändig zu machen, und ihm eine ſolche Einrichtung zu verſchaffen, daß es auch von denjenigen mit Nutzen gebraucht werden kann, die ſich noch gar nicht mit der angewandten Mathematik beſchäftigt haben.

Die Stereometrie, welche in dieſem erſten Bande behandelt wird, kann zwar, ſtreng genommen, nicht zu der angewandten Mathematik gerechnet werden: es enthält dieſelbe aber in allen ihren Theilen ſo wichtige Materialien für die angewandte Mathematik, daß ſie ſchon deswegen hier mit aufgenommen zu werden verdiente; da nun überdies ſtereometriſche Uebungen bis jetzt faſt eben ſo, wie die aus der angewandten Mathematik fehlen, ſo iſt hierdurch die Aufnahme derſelben in den erſten Band eines Werkes, welches Uebungen aus der angewandten Mathematik enthält, wohl hinlänglich gerechtfertigt. Der zweite Band, welcher noch im Laufe dieſes Jahres erſcheint, wird die Uebungen aus der Statik und Mechanik der feſten Körper enthalten.

Inhalt.

Erſte Abtheilung.

Die Elementarlehren der Stereometrie.

Erſter Abſchnitt.
Von der Lage der Ebenen und der Linien gegen dieſelben, §. 1—6. . . . . Seite 1

Zweiter Abſchnitt.
Trigonometriſche Berechnung der fehlenden Stücke einer dreikantigen Ecke, §. 7—22. . . . . » 21

Dritter Abſchnitt.
Von den Körpern überhaupt und von dem Parallelepipedon insbeſondere, §. 23—33. . . . . » 69

Vierter Abſchnitt.
Das Prisma und der Cylinder, §. 34—46. . . . . . . » 90

Fünfter Abſchnitt.
Die Pyramide und der Kegel, §. 47—61. . . . . . . » 139

Sechſter Abſchnitt.
Von den abgeſtumpften Körpern, §. 62—76. . . . . » 178

Siebenter Abſchnitt.
Von der Kugel und den Theilen derſelben, §. 77—91. . » 227

Achter Abſchnitt.
Von den regulairen Körpern, §. 92—104. . . . . . . » 281

Zweite Abtheilung.

Anfangsgründe der höheren Stereometrie.

Einleitung, §. 105. . . . . Seite 339

Erſter Abſchnitt.

Von den Kegelſchnitten überhaupt und von den Quadraturen und Rectificationen insbeſondere, §. 106—121. Seite 341

Zweiter Abſchnitt.

Von den durch Axendrehung erzeugten Körpern, §. 122—132. » 396

Dritter Abſchnitt.

Von den Körpern, in welchen alle Schnitte, parallel zur Grundfläche, von Curven begränzt werden, die zu derſelben Gattung gehören (ſymmetriſche Körper), §. 133 — 142. » 441

Vierter Abſchnitt.

Von den Durchſchnitten zweier Flächen, §. 143—156. . » 500

Dritte Abtheilung.

Einige Anwendungen der Stereometrie.

Erſter Abſchnitt.

Von den Körpermaaßen und von den verſchiedenen praktiſchen Methoden, den Inhalt der Körper zu ermitteln, §. 157—165. . . . . » 565

Zweiter Abſchnitt.

Theorie der Berechnung der Gewölbe, §. 166—173. . . » 606

Dritter Abſchnitt.

Praktiſche Aufgaben, §. 174—181. . . . . » 647

Erſte-

Erſte Abtheilung.
Die Elementarlehren der Stereometrie.

Erſter Abſchnitt.
Von der Lage der Ebenen und der Linien gegen dieſelben.

§. 1.
Erklärungen.

1. Wenn jede zwei, beliebig in einer Fläche angenommenen Punkte durch eine gerade Linie verbunden werden können, die ganz in dieſer Fläche liegt, ſo wird dieſelbe eine **Ebene** genannt, und es iſt ihr die krumme Fläche entgegengeſetzt, bei welcher entweder nur Punkte, die in einer gewiſſen Lage angenommen werden, durch eine gerade Linie ſich verbinden laſſen, oder wo dieſes gar nicht möglich iſt. Erſteres iſt z. B. bei der krummen Oberfläche eines Cylinders der Fall, wenn die beiden Punkte in einer Parallele zur Axe deſſelben liegen, und das letztere findet bei der Oberfläche einer Kugel ſtatt.

2. Wird eine gerade Linie in einer Ebene gezogen, ſo kann die Ebene um dieſe Linie als um eine Axe gedreht werden, und es iſt alſo, wenn auch die Lage der Linie dazu gegeben iſt, dadurch die Ebene noch keinesweges beſtimmt. Sobald aber außer dieſer Linie noch ein Punkt der Lage nach gegeben iſt, welcher in der Ebene liegen ſoll, ſo iſt dieſe dadurch ihrer Lage nach vollkommen beſtimmt, weil bei der Umdrehung der Ebene um die gegebene Linie, als um eine Axe, ſie den der Lage nach gegebenen Punkt nur in einer einzigen Lage treffen kann.

Hieraus folgt: Eine Ebene iſt ihrer Lage nach durch drei gegebene Punkte, die nicht in einer Linie liegen, vollkommen beſtimmt. Sie iſt alſo auch der Lage nach gegeben: durch ein gegebenes Dreieck, durch einen Winkel oder durch einen Kreis; und weil zu einer Linie durch einen außerhalb derſelben gegebenen Punkt nur eine einzige Parallele gezogen werden kann, und zwei Parallelen immer in derſelben Ebene liegen müſſen; ſo folgt, daß die Lage einer Ebene durch ein Paar gegebene Parallelen ebenfalls beſtimmt iſt. Hieraus geht zugleich hervor, daß wenn in zwei Parallelen beliebig angenommene Punkte, durch eine gerade Linie verbunden werden, dieſe Verbindungslinie mit den Parallelen immer in derſelben Ebene liegen muß.

3. Wenn eine Ebene mit einer Linie, die nicht in derſelben liegt, zuſammentrifft, ſo können beide nur einen einzigen Punkt gemein haben; eine gerade Linie und eine Ebene ſchneiden ſich nämlich immer nur in einem einzigen Punkte. Wird nun durch dieſen Durchſchnittspunkt eine Linie in der Ebene gezogen, und bildet die ſchneidende Linie mit derſelben, nach welcher Richtung die Linie in der Ebene auch gezogen werden mag, immer einen rechten Winkel, ſo ſteht die ſchneidende Linie ſenkrecht auf der Ebene. Wenn die ſchneidende mit der in der Ebene durch den Durchſchnittspunkt gezogenen Linie, ſo wie dieſe ihre Richtung ändert, immer andere Winkel bildet, ſo iſt die ſchneidende Linie gegen die Ebene geneigt, und der Neigungswinkel wird dadurch ermittelt, daß man von irgend einem Punkte der ſchneidenden Linie eine Senkrechte auf die Ebene fällt, und den Punkt, in welchem dieſe die Ebene trifft, mit dem Durchſchnittspunkte der geneigten Linie verbindet. Der Winkel nämlich, welchen dieſe Verbindungslinie mit der geneigten bildet, iſt der Neigungswinkel der Linie gegen die Ebene.

4. Zwei Ebenen ſchneiden ſich in einer geraden Linie, denn da die Lage einer geraden Linie durch zwei Punkte beſtimmt iſt, ſo können auch zwei ſich ſchneidende Ebenen nur eine gerade Linie gemein haben, wenn ſie nicht ganz und gar in einander fallen ſollen. Fällt man von irgend einem Punkte der einen Ebene eine Senkrechte auf die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie, und ſteht dieſe ſenkrecht auf der anderen Ebene,

ſo ſtehen beide Ebenen ſenkrecht aufeinander. Den Neigungswinkel zweier ſich ſchneidenden Ebenen überhaupt aber findet man, wenn man an irgend einem Punkte der gemeinſchaftichen Durchſchnittslinie Senkrechte in beiden Ebenen errichtet. Der Winkel, den dieſe beiden Senkrechten mit einander bilden, iſt der Neigungswinkel der Ebenen, und es ſtehen dieſelben ſenkrecht auf einander, wenn dieſer Winkel ein rechter iſt.

5. Zwei Ebenen, die nie zuſammentreffen, ſo weit man ſie auch verlängern oder verbreiten mag, laufen parallel, und eine Linie läuft parallel zu einer Ebene, wenn ſie nicht in derſelben liegt, und nie mit ihr zuſammentrifft, ſo weit man ſie auch verlängert.

6. Ein körperlicher Winkel oder eine Ecke wird von drei oder mehreren geraden Linien gebildet, die in einem Punkte zuſammenſtoßen, und von welchen nur je zwei in einer gemeinſchaftlichen Ebene liegen. Wird alſo eine Ebene von einer Linie geſchnitten, und man zieht in dieſer Ebene von dem Durchſchnittspunkte aus zwei gerade Linien, ſo bilden dieſe mit der ſchneidenden eine dreikantige Ecke. Bei einer jeden Ecke unterſcheidet man die ebenen Winkel, welche von je zwei neben einander liegenden Linien an dem gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkte aller, alſo an dem Scheitel der Ecke, gebildet werden; und die Neigungswinkel der Ecke, worunter die Neigungswinkel verſtanden werden, unter welchen je zwei ebene Winkel der Ecke ſich ſchneiden. Die gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinien der ſich ſchneidenden ebenen Winkel nennt man die Kanten der Ecke, welche nach der Anzahl der Kanten drei- oder mehrkantig iſt.

Anmerkung. Da hier die bereits in der Elementargeometrie vorkommenden Sätze von der Lage der Linien gegen Ebenen und der Ebenen gegen einander als bekannt vorausgeſetzt werden können, ſo werden blos die vorzüglichſten dieſer Sätze wiederholt, und es ſind nur den wichtigſten derſelben die Beweiſe beigefügt.

§. 2.

Von der Lage der Linien gegen die Ebenen.

1. Wenn eine gerade Linie gc Fig. 1. auf zwei ſich ſchneidenden Linien aα und bβ in ihrem gemeinſchaftlichen

Hieraus folgt: Eine Ebene iſt ihrer Lage nach durch drei gegebene Punkte, die nicht in einer Linie liegen, vollkommen beſtimmt. Sie iſt alſo auch der Lage nach gegeben: durch ein gegebenes Dreieck, durch einen Winkel oder durch einen Kreis; und weil zu einer Linie durch einen außerhalb derſelben gegebenen Punkt nur eine einzige Parallele gezogen werden kann, und zwei Parallelen immer in derſelben Ebene liegen müſſen; ſo folgt, daß die Lage einer Ebene durch ein Paar gegebene Parallelen ebenfalls beſtimmt iſt. Hieraus geht zugleich hervor, daß wenn in zwei Parallelen beliebig angenommene Punkte, durch eine gerade Linie verbunden werden, dieſe Verbindungslinie mit den Parallelen immer in derſelben Ebene liegen muß.

3. Wenn eine Ebene mit einer Linie, die nicht in derſelben liegt, zuſammentrifft, ſo können beide nur einen einzigen Punkt gemein haben; eine gerade Linie und eine Ebene ſchneiden ſich nämlich immer nur in einem einzigen Punkte. Wird nun durch dieſen Durchſchnittspunkt eine Linie in der Ebene gezogen, und bildet die ſchneidende Linie mit derſelben, nach welcher Richtung die Linie in der Ebene auch gezogen werden mag, immer einen rechten Winkel, ſo ſteht die ſchneidende Linie ſenkrecht auf der Ebene. Wenn die ſchneidende mit der in der Ebene durch den Durchſchnittspunkt gezogenen Linie, ſo wie dieſe ihre Richtung ändert, immer andere Winkel bildet, ſo iſt die ſchneidende Linie gegen die Ebene geneigt, und der Neigungswinkel wird dadurch ermittelt, daß man von irgend einem Punkte der ſchneidenden Linie eine Senkrechte auf die Ebene fällt, und den Punkt, in welchem dieſe die Ebene trifft, mit dem Durchſchnittspunkte der geneigten Linie verbindet. Der Winkel nämlich, welchen dieſe Verbindungslinie mit der geneigten bildet, iſt der Neigungswinkel der Linie gegen die Ebene.

4. Zwei Ebenen ſchneiden ſich in einer geraden Linie, denn da die Lage einer geraden Linie durch zwei Punkte beſtimmt iſt, ſo können auch zwei ſich ſchneidende Ebenen nur eine gerade Linie gemein haben, wenn ſie nicht ganz und gar in einander fallen ſollen. Fällt man von irgend einem Punkte der einen Ebene eine Senkrechte auf die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie, und ſteht dieſe ſenkrecht auf der anderen Ebene,

ſo ſtehen beide Ebenen ſenkrecht aufeinander. Den Neigungswinkel zweier ſich ſchneidenden Ebenen überhaupt aber findet man, wenn man an irgend einem Punkte der gemeinſchaftichen Durchſchnittslinie Senkrechte in beiden Ebenen errichtet. Der Winkel, den dieſe beiden Senkrechten mit einander bilden, iſt der Neigungswinkel der Ebenen, und es ſtehen dieſelben ſenkrecht auf einander, wenn dieſer Winkel ein rechter iſt.

5. Zwei Ebenen, die nie zuſammentreffen, ſo weit man ſie auch verlängern oder verbreiten mag, laufen parallel, und eine Linie läuft parallel zu einer Ebene, wenn ſie nicht in derſelben liegt, und nie mit ihr zuſammentrifft, ſo weit man ſie auch verlängert.

6. Ein körperlicher Winkel oder eine Ecke wird von drei oder mehreren geraden Linien gebildet, die in einem Punkte zuſammenſtoßen, und von welchen nur je zwei in einer gemeinſchaftlichen Ebene liegen. Wird alſo eine Ebene von einer Linie geſchnitten, und man zieht in dieſer Ebene von dem Durchſchnittspunkte aus zwei gerade Linien, ſo bilden dieſe mit der ſchneidenden eine dreikantige Ecke. Bei einer jeden Ecke unterſcheidet man die ebenen Winkel, welche von je zwei neben einander liegenden Linien an dem gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkte aller, alſo an dem Scheitel der Ecke, gebildet werden; und die Neigungswinkel der Ecke, worunter die Neigungswinkel verſtanden werden, unter welchen je zwei ebene Winkel der Ecke ſich ſchneiden. Die gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinien der ſich ſchneidenden ebenen Winkel nennt man die Kanten der Ecke, welche nach der Anzahl der Kanten drei- oder mehrkantig iſt.

Anmerkung. Da hier die bereits in der Elementargeometrie vorkommenden Sätze von der Lage der Linien gegen Ebenen und der Ebenen gegen einander als bekannt vorausgeſetzt werden können, ſo werden blos die vorzüglichſten dieſer Sätze wiederholt, und es ſind nur den wichtigſten derſelben die Beweiſe beigefügt.

§. 2.

Von der Lage der Linien gegen die Ebenen.

1. Wenn eine gerade Linie gc Fig. 1. auf zwei ſich ſchneidenden Linien $a\alpha$ und $b\beta$ in ihrem gemeinſchaftlichen

Aufløſung. Man ziehe in der Ebene beliebig eine Linie $a\alpha$, und von c aus eine Senkrechte cd auf dieſelbe. Wird nun in der Ebene auf $a\alpha$ in d eine Senkrechte de errichtet, und auf dieſe von c aus eine Senkrechte $c\gamma$, ſo iſt dieſe Linie ſenkrecht auf der Ebene.

Beweis. Da ſowohl cd als auch ed ſenkrecht auf $a\alpha$ ſtehet, ſo iſt nach No. 1. die Linie $a\alpha$ ſenkrecht auf der Ebene $cd\gamma$; zieht man alſo durch γ die $b\beta$ parallel zu $a\alpha$, ſo iſt nach N 5. auch dieſe ſenkrecht auf $cd\gamma$; folglich iſt $c\gamma b$ ein rechter Winkel; vermøge der Conſtruction iſt aber auch $\angle c\gamma d = R$, es ſteht alſo $c\gamma$ auf zwei Linien der gegebenen Ebene ſenkrecht, und daher auf der Ebene ſelbſt.

8. Von einem Punkte c außerhalb einer Ebene iſt nur eine einzige Senkrechte auf dieſe Ebene møglich, denn wäre außer $c\gamma$ auch cf ſenkrecht, ſo müßte in dem Dreieck $c\gamma f$ ſein $\angle cf\gamma = \angle c\gamma f = R$, was nicht ſein kann.

Hieraus aber folgt: Wenn man in einer Ebene mehrere Linien zieht wie $a\alpha$, auf jede derſelben von dem außerhalb der Ebene gegebenen Punkte c eine Senkrechte, und in den Punkten, wo dieſe Senkrechten die gegebenen Linien treffen, auf dieſe letztern in der Ebene Senkrechte errichtet, ſo müſſen dieſe ſämmtlich in einem und demſelben Punkte γ ſich ſchneiden; denn ſie ſchneiden ſich ſämmtlich in dem Punkte, in welchem die Ebene von der aus c gefällten Senkrechten getroffen wird.

9. Soll an einem in einer Ebene gegebenen Punkte eine Senkrechte auf dieſelbe errichtet werden, ſo braucht man nur von irgend einem Punkte außerhalb dieſer Ebene eine Senkrechte zu fällen, und durch den gegebenen Pnnkt eine Parallele zu derſelben zu ziehen.

10. Wenn eine Linie cd geneigt iſt gegen eine Ebene $a\alpha e$, ſo iſt, wenn die Senkrechte $c\gamma$ gezogen wird, und wenn man γ mit d verbindet, nach §. 1. No. 3. der Winkel $cd\gamma$ der Neigungswinkel der Linie cd gegen die Ebene. Dieſer Neigungswinkel nun iſt von allen Winkeln, welche die Linie cd mit andern in der Ebene durch d gezogenen Linien bildet, der kleinſte, und es iſt daher die Ergänzung deſſelben cdh der grøßte. Denn zieht man in der Ebene durch d irgend eine andere Linie df, macht

df = dγ und zieht cf und fγ, ſo iſt das Dreieck cγf bei γ rechtwinklig, alſo iſt

$$cf > c\gamma$$
da nun aber $df = d\gamma$
und $cd = dc$

ſo iſt in $\triangle$cdf der Winkel cdf größer als der Winkel cdγ in dem $\triangle$cdγ nach Euklid, Buch 1., Satz 25. Da nun df jede beliebige Lage haben kann, ſo folgt, daß cdγ von allen Winkeln der kleinſte iſt. Zugleich geht hieraus hervor, daß $\angle$cdf deſto größer wird, je größer der Winkel iſt, welchen df mit dγ bildet. Da übrigens $\angle$cda = R, ſo folgt, daß wenn df zwiſchen dγ und da liegt, der $\angle$cdf immer kleiner als ein rechter ſein muß. Ueberhaupt ſind alle Winkel, welche cd mit Linien bildet, die in der Ebene aαc auf derſelben Seite von aα mit dγ liegen, kleiner als R, und alle Winkel, welche auf der andern Seite von aα gebildet werden, ſind größer als R. Dabei ſind auf verſchiedenen Seiten von dc immer zwei Winkel von gleicher Größe möglich. So iſt $\angle$cdf = $\angle$cdφ, wenn $\angle\gamma$dφ = $\angle\gamma$df gemacht wird.

§. 3.

Von der Lage der Ebenen gegen einander.

1. Wenn eine Linie anf zwei verſchiedenen Ebenen ſenkrecht ſteht, ſo müſſen dieſe Ebenen parallel laufen; denn in dem entgegengeſetzten Falle hätten ſie eine gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie, und man könnte irgend einen Punkt derſelben mit den Durchſchnittspunkten der Senkrechten verbinden, wodurch ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln entſtehen würde, was nicht möglich iſt.

2. Hieraus folgt, daß zwei parallele Ebenen überall gleich weit von einander abſtehen müſſen.

3. Wenn die Schenkel zweier in verſchiedenen Ebenen liegenden Winkel ACB und acb, Fig. 5., parallel laufen, ſo ſind dieſe Ebenen ſelbſt parallel.

Beweis. Man fälle von dem Scheitel c des Winkels acb eine Senkrechte cγ auf die Ebene des Winkels ACB, und ziehe in derſelben durch γ die Linien $\gamma\alpha$ und $\gamma\beta$ parallel zu

CA und CB, ſo iſt nach §. 2. No. 6. die Linie $\gamma\alpha$ parallel zu ca und $\gamma\beta$ zu cb. Da nun

$$\angle c\gamma\alpha = R \text{ und } \angle c\gamma\beta = R$$

ſo iſt auch $\angle \gamma ca = R$ und $\angle \gamma cb = R$,

die Linie γc ſteht alſo ſenkrecht auf der Ebene des Winkels acb. Sie iſt aber vermöge der Conſtruktion auch ſenkrecht auf ACB, folglich ſind nach No. 1. die Ebenen parallel.

4. Wenn die Schenkel zweier in verſchiedenen Ebenen liegenden Winkel parallel laufen, ſo ſind dieſe Winkel gleich groß.

Beweis. Nimmt man $\gamma\alpha = ca$, $\gamma\beta = cb$ und zieht die Linien $c\gamma$, $a\alpha$, $b\beta$, ab und $\alpha\beta$, ſo ſind $c\gamma$, $a\alpha$ und $b\beta$ gleich groß und parallel, folglich ſind auch die Linien ab und $\alpha\beta$ gleich groß, und es iſt daher $\triangle acb = \triangle \alpha\gamma\beta$, alſo auch $\angle acb = \angle \alpha\gamma\beta$.

5. Wenn eine Linie zu einer Ebene parallel läuft, und man legt durch dieſe Linie eine Ebene, welche die erſtere ſchneidet, ſo iſt die Durchſchnittslinie parallel zu jener; denn wäre dieſes nicht der Fall, ſo müßten ſich beide Linien ſchneiden und es müßte alſo auch die Linie, welche zu der erſteren Ebene parallel ſein ſoll, dieſe treffen, was nicht ſein kann.

6. Werden durch eine zu einer Ebene parallele Linie zwei verſchiedene Ebenen gelegt, welche beide die erſte ſchneiden, ſo laufen die beiden Durchſchnittslinien parallel.

7. Wenn zwei Linien parallel laufen, und man legt durch eine derſelben eine Ebene, ſo liegt entweder auch die andere Linie in dieſer Ebene, oder ſie iſt parallel zu derſelben; denn würde die Ebene von der zweiten Linie blos geſchnitten, ſo könnte ſie mit der erſten Linie nicht in derſelben Ebene liegen, und alſo auch zu ihr nicht parallel laufen.

8. Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten geſchnitten werden, ſo ſind die Durchſchnittslinien parallel.

9. Zwei gerade Linien im Raume ab und $\alpha\beta$, Fig. 6., das ſind zwei Linien, die nicht nothwendig in einer und derſelben Ebene liegen, werden von drei parallelen Ebenen AB, CD und EF proportionirt geſchnitten, nämlich es iſt, wenn ab die mittlere Ebene CD in c, und $\alpha\beta$ dieſelbe in γ ſchneidet,

$$ac : cb = \alpha\gamma : \gamma\beta.$$

df = dγ und zieht cf und fγ, ſo iſt das Dreieck cγf bei γ rechtwinklig, alſo iſt

$$cf > c\gamma$$

da nun aber $df = d\gamma$

und $cd = dc$

ſo iſt in $\triangle$cdf der Winkel cdf größer als der Winkel cdγ in dem $\triangle$cdγ nach Euklid, Buch 1., Satz 25. Da nun df jede beliebige Lage haben kann, ſo folgt, daß cdγ von allen Winkeln der kleinſte iſt. Zugleich geht hieraus hervor, daß $\angle$cdf deſto größer wird, je größer der Winkel iſt, welchen df mit dγ bildet. Da übrigens $\angle$ cda = R, ſo folgt, daß wenn df zwiſchen dγ und da liegt, der $\angle$ cdf immer kleiner als ein rechter ſein muß. Ueberhaupt ſind alle Winkel, welche cd mit Linien bildet, die in der Ebene aαe auf derſelben Seite von aα mit dγ liegen, kleiner als R, und alle Winkel, welche auf der andern Seite von aα gebildet werden, ſind größer als R. Dabei ſind auf verſchiedenen Seiten von de immer zwei Winkel von gleicher Größe möglich. So iſt $\angle$ cdf = $\angle$ cdφ, wenn $\angle\gamma$dφ = $\angle\gamma$df gemacht wird.

§. 3.

Von der Lage der Ebenen gegen einander.

1. Wenn eine Linie auf zwei verſchiedenen Ebenen ſenkrecht ſteht, ſo müſſen dieſe Ebenen parallel laufen; denn in dem entgegengeſetzten Falle hätten ſie eine gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie, und man könnte irgend einen Punkt derſelben mit den Durchſchnittspunkten der Senkrechten verbinden, wodurch ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln entſtehen würde, was nicht möglich iſt.

2. Hieraus folgt, daß zwei parallele Ebenen überall gleich weit von einander abſtehen müſſen.

3. Wenn die Schenkel zweier in verſchiedenen Ebenen liegenden Winkel ACB und acb, Fig. 5., parallel laufen, ſo ſind dieſe Ebenen ſelbſt parallel.

Beweis. Man fälle von dem Scheitel c des Winkels acb eine Senkrechte cγ auf die Ebene des Winkels ACB, und ziehe in derſelben durch γ die Linien $\gamma\alpha$ und $\gamma\beta$ parallel zu

CA und CB, ſo iſt nach §. 2. No. 6. die Linie $\gamma\alpha$ parallel zu ca und $\gamma\beta$ zu cb. Da nun

$$\angle c\gamma\alpha = R \text{ und } \angle c\gamma\beta = R$$

ſo iſt auch $\angle \gamma ca = R$ und $\angle \gamma cb = R$,

die Linie γc ſteht alſo ſenkrecht auf der Ebene des Winkels acb. Sie iſt aber vermöge der Conſtruktion auch ſenkrecht auf ACB, folglich ſind nach No. 1. die Ebenen parallel.

4. Wenn die Schenkel zweier in verſchiedenen Ebenen liegenden Winkel parallel laufen, ſo ſind dieſe Winkel gleich groß.

Beweis. Nimmt man $\gamma\alpha$ = ca, $\gamma\beta$, = cb und zieht die Linien cγ, aα, bβ, ab und $\alpha\beta$, ſo ſind cγ, aα und bβ gleich groß und parallel, folglich ſind auch die Linien ab und $\alpha\beta$ gleich groß, und es iſt daher $\triangle acb = \triangle \alpha\gamma\beta$, alſo auch $\angle acb = \angle \alpha\gamma\beta$.

5. Wenn eine Linie zu einer Ebene parallel läuft, und man legt durch dieſe Linie eine Ebene, welche die erſtere ſchneidet, ſo iſt die Durchſchnittslinie parallel zu jener; denn wäre dieſes nicht der Fall, ſo müßten ſich beide Linien ſchneiden und es müßte alſo auch die Linie, welche zu der erſteren Ebene parallel ſein ſoll, dieſe treffen, was nicht ſein kann.

6. Werden durch eine zu einer Ebene parallele Linie zwei verſchiedene Ebenen gelegt, welche beide die erſte ſchneiden, ſo laufen die beiden Durchſchnittslinien parallel.

7. Wenn zwei Linien parallel laufen, und man legt durch eine derſelben eine Ebene, ſo liegt entweder auch die andere Linie in dieſer Ebene, oder ſie iſt parallel zu derſelben; denn würde die Ebene von der zweiten Linie blos geſchnitten, ſo könnte ſie mit der erſten Linie nicht in derſelben Ebene liegen, und alſo auch zu ihr nicht parallel laufen.

8. Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten geſchnitten werden, ſo ſind die Durchſchnittslinien parallel.

9. Zwei gerade Linien im Raume ab und $\alpha\beta$, Fig. 6., das ſind zwei Linien, die nicht nothwendig in einer und derſelben Ebene liegen, werden von drei parallelen Ebenen AB, CD und EF proportionirt geſchnitten, nämlich es iſt, wenn ab die mittlere Ebene CD in c, und $\alpha\beta$ dieſelbe in γ ſchneidet,

$$ac : cb = \alpha\gamma : \gamma\beta.$$

Beweis. Man verbinde a mit β durch eine gerade Linie, und ziehe, wenn dieſe die Ebene CD in d ſchneidet, in dieſer Ebene die Linien cd und γd, ſo iſt nach No. 8. cd parallel zu bβ und γd zu aα, es iſt alſo

$$ad : d\beta = ac : cb$$

$$\text{und auch } ad : d\beta = \alpha\gamma : \gamma\beta$$

$$\text{folglich iſt auch } ac : cb = \alpha\gamma : \gamma\beta$$

10. Wenn eine Linie ſenkrecht auf einer Ebene ſteht, ſo ſo iſt auch jede Ebene, welche durch dieſe Linie gelegt wird, ſenkrecht auf jener Ebene.

11. Wenn umgekehrt zwei Ebenen ſenkrecht auf einer dritten ſtehen, ſo iſt auch ihre gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie ſenkrecht auf dieſer dritten Ebene.

12. Stehen zwei Ebenen ſenkrecht aufeinander, und man fällt von irgend einem Punkte der einen dieſer Ebenen eine Senkrechte auf die andere, ſo trifft dieſe die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie beider.

13. Wenn zwei Ebenen ac und ad, Fig. 7., in der Linie ab ſich ſchneiden, und man zieht an irgend einem Punkte c der gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinie die Senkrechte em in der Ebene ac und die Senkrechte en in der Ebene ad, ſo iſt nach §. 1. No. 4. der Winkel, welchen die Linien em und en miteinander bilden, der Neigungswinkel beider Ebenen, und es muß nun, nach §. 2. No. 6., wenn man von einem Punkte m der Linie em eine Senkrechte auf die Ebene ad fällt, dieſe die Ebene in der Linie en treffen. Hieraus aber läßt ſich folgern, daß der Winkel, welchen en und em bilden, alſo der Neigungswinkel beider Ebenen, kleiner iſt als jeder Winkel, welchen eine andere in der Ebene ad gezogene Linie ep mit em bildet. Denn iſt mn die Senkrechte auf ad, und man nimmt ep = en und zieht pn, ſo iſt mnp ein bei n rechtwinkliges Dreieck,

$$\text{folglich iſt } mp > mn.$$

$$\text{Da nun } ep = en$$

$$\text{und } em = em$$

$$\text{ſo folgt } \angle mep > \angle men$$

Nur in dem Falle, wenn $\angle$ men = R, iſt auch $\angle$ mep = R.

14. Da nach §. 2. No. 3. alle Senkrechte, die an einem Punkte c einer Linie ab, Fig. 7., auf derſelben errichtet wer-

den können, in einer und derſelben Ebene liegen, ſo folgt, daß wenn man auf der gemeinſchaftlichen Kante ab zweier ſich ſchneidenden Ebenen in dem Punkte e zwei Senkrechte errichtet, die beide außerhalb des Neigungswinkels men liegen, und von welchen die eine ſenkrecht iſt auf der Ebene ac und die andere auf ad, ſo ergänzt der Winkel, den dieſe beiden Senkrechten mit einander bilden, den Neigungswinkel men der Ebenen zu 180°; denn es liegen dieſe beiden Senkrechten mit den Linien em und en, die ebenfalls ſenkrecht auf ab ſtehen, in derſelben Ebene, und die von dieſen Linien gebildeten vier Winkel ſind daher zuſammen genommen = 360°. Dieſe 4 Winkel aber ſind der Neigungswinkel men beider Ebenen, und der = α geſetzt werden ſoll; der Winkel, welchen me mit der Senkrechten auf ac bildet = 90°, der Winkel, welcher von den beiden Senkrechten auf ac und ad eingeſchloſſen wird = x, und der Winkel, welchen die Senkrechte auf ad mit en bildet = 90°. Es iſt alſo

$$\alpha + 90^\circ + x + 90^\circ = 360^\circ$$

und daher $\alpha + x = 180^\circ$.

Nämlich es iſt der Winkel x, der von den beiden Senkrechten gebildet wird, die Ergänzung des Neigungswinkels α der beiden Ebenen ac und ad.

§. 4.

Von den körperlichen Ecken.

1. Die Größe einer Ecke wird nicht geändert, wenn man die Kanten derſelben verlängert, es können dieſe daher gleich groß genommen werden, und in dieſem Falle kann man eine ſolche Kante als den Radius einer Kugel anſehen, in deren Mittelpunkt der Scheitel der Ecke liegt. Die Endpunkte der Kanten liegen alsdann auf der Oberfläche der Kugel und wenn man dieſe Endpunkte durch Kreisbogen mit einander verbindet, welche mit dem Radius der Kugel aus dem Mittelpunkte derſelben beſchrieben ſind, ſo erhält man auf der Oberfläche der Kugel ein Bogendreieck oder ein ſogenanntes ſphäriſches Dreieck, deſſen Eigenthümlichkeiten mit denen der entſprechenden körperlichen Ecke genau zuſammen hängen. Sind nämlich da, db und dc, Fig. 8., die drei gleich großen Kanten einer Ecke, deren Scheitel

in dem Mittelpunkt einer Kugel ſich befindet, die da zum Radius hat und man zieht, auf der Oberfläche dieſer Kugel aus d als Mittelpunkt die Bogen ab, ac und bc mit dem Halbmeſſer da = dc = db, ſo iſt abc das zu der Ecke d gehörige ſphäriſche Dreieck, von welchem die Bogen ab, ac und bc die Seiten bilden. Es iſt aber

der Bogen ab das Maaß des ebenen Winkels adb
= = ac = = = = adc
= = bc = = = = bdc

folglich ſind die drei Seiten des ſpäriſchen Dreiecks die Maaße der drei ebenen Winkel der dazu gehörigen körperlichen Ecke.

Da ferner der Winkel gefunden wird, den die Bogen ab und ac in a mit einander bilden, wenn man an a in den Ebenen dieſer Bogen zwei Tangenten an dieſelben zieht, und dieſe Tangenten, weil ſie ſenkrecht auf ad ſtehen, welches die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie der Ebenen adb und adc iſt, zugleich den Neigungswinkel dieſer beiden Ebenen bilden; ſo folgt, daß der Winkel bac des ſphäriſchen Dreiecks zugleich der Neigungswinkel der körperlichen Ecke an der Kante ad iſt. Ganz daſſelbe gilt auch von den beiden übrigen Winkeln des ſphäriſchen Dreiecks und den entſprechenden Neigungswinkeln der körperlichen Ecke.

Das ſphäriſche Dreieck abc hängt alſo mit der körperlichen Ecke d ſo zuſammen, daß die Seiten des Dreiecks die Maaße der ebenen Winkel der Ecke bilden, und die Winkel des Dreiecks ſind den Neigungswinkeln der Ecke gleich. *Alle Eigenſchaften, welche der dreikantigen Ecke zukommen, werden daher auch bei dem dazu gehörigen ſphäriſchen Dreiecke vorgefunden und umgekehrt.*

2. Wenn man in dem Scheitel d einer dreikantigen körperlichen Ecke, Senkrechte auf die drei Ebenen derſelben errichtet, welche außerhalb des körperlichen Winkels liegen, ſo bilden dieſe die drei Kanten einer Ecke, welche mit der gegebenen in der Art zuſammenhängt, daß die ebenen Winkel, der einen einzeln genommen, die Neigungswinkel der andern zu 180° ergänzen, und man nennt die auf dieſe Weiſe durch die Senkrechten gebildete Ecke die *Ergänzungsecke* der gegebenen.

den können, in einer und derſelben Ebene liegen, ſo folgt, daß wenn man auf der gemeinſchaftlichen Kante ab zweier ſich ſchneidenden Ebenen in dem Punkte e zwei Senkrechte errichtet, die beide außerhalb des Neigungswinkels men liegen, und von welchen die eine ſenkrecht iſt auf der Ebene ac und die andere auf ad, ſo ergänzt der Winkel, den dieſe beiden Senkrechten mit einander bilden, den Neigungswinkel men der Ebenen zu 180°; denn es liegen dieſe beiden Senkrechten mit den Linien em und en, die ebenfalls ſenkrecht auf ab ſtehen, in derſelben Ebene, und die von dieſen Linien gebildeten vier Winkel ſind daher zuſammen genommen = 360°. Dieſe 4 Winkel aber ſind der Neigungswinkel men beider Ebenen, und der = α geſetzt werden ſoll; der Winkel, welchen me mit der Senkrechten auf ac bildet = 90°, der Winkel, welcher von den beiden Senkrechten auf ac und ad eingeſchloſſen wird = x, und der Winkel, welchen die Senkrechte auf ad mit en bildet = 90°. Es iſt alſo

$$\alpha + 90^\circ + x + 90^\circ = 360^\circ$$

und daher $\alpha + x = 180^\circ$.

Nämlich es iſt der Winkel x, der von den beiden Senkrechten gebildet wird, die Ergänzung des Neigungswinkels α der beiden Ebenen ac und ad.

§. 4.

Von den körperlichen Ecken.

1. Die Größe einer Ecke wird nicht geändert, wenn man die Kanten derſelben verlängert, es können dieſe daher gleich groß genommen werden, und in dieſem Falle kann man eine ſolche Kante als den Radius einer Kugel anſehen, in deren Mittelpunkt der Scheitel der Ecke liegt. Die Endpunkte der Kanten liegen alsdann auf der Oberfläche der Kugel und wenn man dieſe Endpunkte durch Kreisbogen mit einander verbindet, welche mit dem Radius der Kugel aus dem Mittelpunkte derſelben beſchrieben ſind, ſo erhält man auf der Oberfläche der Kugel ein Bogendreieck oder ein ſogenanntes ſphäriſches Dreieck, deſſen Eigenthümlichkeiten mit denen der entſprechenden körperlichen Ecke genau zuſammen hängen. Sind nämlich da, db und dc, Fig. 8., die drei gleich großen Kanten einer Ecke, deren Scheitel

in dem Mittelpunkt einer Kugel ſich befindet, die da zum Radius hat und man zieht, auf der Oberfläche dieſer Kugel aus d als Mittelpunkt die Bogen ab, ac und bc mit dem Halbmeſſer da = dc = db, ſo iſt abc das zu der Ecke d gehörige ſphäriſche Dreieck, von welchem die Bogen ab, ac und bc die Seiten bilden. Es iſt aber

der Bogen ab das Maaß des ebenen Winkels adb
" " ac " " " " " adc
" " bc " " " " " bdc

folglich ſind die drei Seiten des ſpäriſchen Dreiecks die Maaße der drei ebenen Winkel der dazu gehörigen körperlichen Ecke.

Da ferner der Winkel gefunden wird, den die Bogen ab und ac in a mit einander bilden, wenn man an a in den Ebenen dieſer Bogen zwei Tangenten an dieſelben zieht, und dieſe Tangenten, weil ſie ſenkrecht auf ad ſtehen, welches die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie der Ebenen adb und adc iſt, zugleich den Neigungswinkel dieſer beiden Ebenen bilden; ſo folgt, daß der Winkel bac des ſphäriſchen Dreiecks zugleich der Neigungswinkel der körperlichen Ecke an der Kante ad iſt. Ganz daſſelbe gilt auch von den beiden übrigen Winkeln des ſphäriſchen Dreiecks und den entſprechenden Neigungswinkeln der körperlichen Ecke.

Das ſphäriſche Dreieck abc hängt alſo mit der körperlichen Ecke d ſo zuſammen, daß die Seiten des Dreiecks die Maaße der ebenen Winkel der Ecke bilden, und die Winkel des Dreiecks ſind den Neigungswinkeln der Ecke gleich. Alle Eigenſchaften, welche der dreikantigen Ecke zukommen, werden daher auch bei dem dazu gehörigen ſphäriſchen Dreiecke vorgefunden und umgekehrt.

2. Wenn man in dem Scheitel d einer dreikantigen körperlichen Ecke, Senkrechte auf die drei Ebenen derſelben errichtet, welche außerhalb des körperlichen Winkels liegen, ſo bilden dieſe die drei Kanten einer Ecke, welche mit der gegebenen in der Art zuſammenhängt, daß die ebenen Winkel, der einen einzeln genommen, die Neigungswinkel der andern zu 180° ergänzen, und man nennt die auf dieſe Weiſe durch die Senkrechten gebildete Ecke die Ergänzungsecke der gegebenen.

Beweis: Nach §. 3. No. 14. ergänzt der Winkel, welchen die Senkrechten in d auf den Ebenen adb und bdc mit einander bilden, den Neigungswinkel dieſer beiden Ebenen zu 180°, und eben ſo wird der Neigungswinkel der Ebenen cdb und cda durch die Senkrechten in d auf dieſe Ebenen ebenfalls zu 180° ergänzt, und es gilt daſſelbe auch von dem dritten Winkel. Es ſind alſo wirklich die ebenen Winkel der Ergänzungsecke die Ergänzungen der Neigungswinkel der gegebenen. Aber auch umgekehrt iſt es der Fall, denn da ſowohl die Senkrechte auf bda als auch die auf bdc ſenkrecht auf bd ſteht, ſo iſt auch bd ſenkrecht auf der Ebene jener beiden Senkrechten. Es iſt alſo die Kante bd der gegebenen Ecke auf der einen Ebene der Ergänzungsecke ſenkrecht, und es gilt daſſelbe auch von den beiden übrigen Kanten in Beziehung auf die beiden übrigen Ebenen. Folglich hängt die gegebene Ecke eben ſo von der Ergänzungsecke ab, wie dieſe von jener. Da nun die ebenen Winkel der Ergänzungsecke die Neigungswinkel der gegebenen zu 180° ergänzen, ſo müſſen auch umgekehrt die ebenen Winkel der gegebenen Ecke die Neigungswinkel der Ergänzungsecke ebenfalls zu 180° ergänzen.

Hieraus geht zugleich hervor, daß jedem ſphäriſchen Dreiecke ein Ergänzungsdreieck entſpricht von der Art, daß einzeln genommen die Seiten des einen von den Winkeln des andern zu 180° ergänzt werden.

3. Von den drei ebenen Winkeln, welche eine körperliche Ecke bilden, ſind immer zwei zuſammengenommen größer als der dritte, und es ſind daher auch bei einem jeden ſpäriſchen Dreiecke je zwei Seiten zuſammen genommen größer als die dritte Seite.

Beweis. Es ſei Fig. 9. d der Scheitel der von den drei Kanten da, db und dc gebildeten Ecke, und bdc ſei der größte der drei ebenen Winkel, ſo kann man die Linie de innerhalb dieſes Winkels ſo ziehen, daß $\angle$bde $= \angle$bda. Nimmt man nun de = da, zieht ab, be, verlängert dieſe letztere, bis ſie die Kante dc in c trifft, und zieht ac, ſo iſt

$$\triangle bda = \triangle bde$$

alſo $\overline{}$ ab = be

$$\begin{array}{rl} \text{da nun} & ab + ac > bc \\ \hline \text{ſo iſt} & ac > ec \\ \text{Es iſt aber} & da = de \\ \text{und} & dc = dc \\ \hline \text{folglich} & \angle adc > \angle edc \\ \text{da nun} & \angle adb = \angle bde \\ \hline \text{ſo iſt} & \angle adc + \angle adb > \angle bdc \end{array}$$

nämlich es ſind zwei Winkel zuſammen genommen größer als der dritte.

4. In jedem ſphäriſchen Dreieck ſind alle drei Seiten zuſammen genommen kleiner als 360°, und es ſind alſo auch in jeder 3kantigen Ecke die drei ebenen Winkel derſelben zuſammen kleiner als 360°.

Beweis. Wird Fig. 8. der Bogen ac verlängert, bis er den verlängerten Bogen ab in e ſchneidet, ſo iſt, weil die größten Kreiſe auf der Oberfläche einer Kugel ſich gegenſeitig halbiren

$$\begin{array}{rl} & abe + ace = 360^\circ \\ \text{oder} & (ab + be) + (ac + ce) = 360^\circ \\ \text{Nach No. 3. aber iſt} & be + ce > bc \\ \hline \text{folglich iſt} & ab + ac + bc < 360^\circ \end{array}$$

uud daher auch in der Ecke d

$$\angle adb + \angle adc + \angle bdc < 360^\circ.$$

5. Die Neigungswinkel einer dreikantigen Ecke (und alſo auch die drei Winkel eines ſphäriſchen Dreiecks) ſind zuſammen genommen immer größer als 180°.

Beweis. Bezeichnet man die drei Neiguugswinkel einer dreikantigen Ecke mit α, β, γ und die entſprechenden ebenen Winkel der Ergänzungsecke mit a, b, c ſo iſt nach No. 2.

$$\begin{array}{rl} & a + \alpha = 180^\circ \\ & b + \beta = 180^\circ \\ & c + \gamma = 180^\circ \\ \hline \text{alſo} & (a + b + c) + (\alpha + \beta + \gamma) = 3 \times 180^\circ \end{array}$$

Nach No. 4. aber iſt

$$\begin{array}{rl} & (a + b + c) < 2 \times 180^\circ \\ \hline \text{folglich iſt} & \alpha + \beta + \gamma > 180^\circ \end{array}$$

6. Es läßt ſich auch ganz allgemein beweiſen, daß in jeder n-kantigen Ecke alle n ebenen Winkel zuſammen genom-

men kleiner als 360° ſein müſſen, und daß daher die n Neigungswinkel derſelben zuſammen genommen immer größer ſind als (n — 2) × 180°.

7. Werden zwei Seiten ab und ac des ſphäriſchen Dreiecks abc, Fig. 8., verlängert, bis ſie ſich das zweitemal in e ſchneiden, ſo iſt bce das Nebendreieck von abc, und es hängt daſſelbe von dem gegebenen Dreieck ſo ab, daß beide die eine Seite bc gemein haben, der dieſer Seite gegenüberliegende Winkel iſt in beiden gleich groß, alſo $\angle e = \angle a$, die übrigen Seiten und Winkel aber ergänzen ſich in beiden Dreiecken zu 180°, nämlich es iſt

$$eb + ba = 180^\circ;\ ec + ca = 180^\circ$$

$$\angle ebc + \angle abc = 180^\circ \text{ und } \angle ecb + \angle acb = 180^\circ$$

wie aus der Figur ſich unmittelbar ergiebt. Hieraus geht zugleich auch hervor, daß es zu jeder körperlichen dreikantigen Ecke abcd eine Nebenecke bced giebt, die von der gegebenen eben ſo abhängt, wie das ſphäriſche Nebendreieck von dem gegebenen und es ſind, wenn man von einer dreikantigen Ecke einige Stücke kennt, dadurch die entſprechenden Stücke der Nebenecke vollkommen beſtimmt.

§. 5.

Conſtruction der körperlichen Ecken.

Aufgabe 1. Es ſind die drei ſpitzen Winkel A, B und C, Fig. 10., I., II. und III. gegeben, von welchen je zwei zuſammen genommen größer ſind als der dritte, man ſoll die Größe der Neigungswinkel der durch dieſe Winkel beſtimmten körperlichen Ecke angeben.

Auflöſung. Auf dem einen Scheitel der beiden Winkel B und C ſchneide man von beliebiger Größe die gleichen Stücke ab, BD = CD = d, und errichte in D Fig. II. und und III., die Senkrechte DF = β auf BD und DE = γ auf CD, wodurch auf dem zweiten Schenkel des Winkels B das Stück BF = f und auf dem zweiten Schenkel von C das Stück CE = e abgeſchnitten wird. Nimmt man nun auf den Schenkeln des dritten Winkels A, das Stück AE = CE = e und AF = BF = f, zieht EF = α, und beſchreibt aus den drei Linien α, β und γ das Dreieck Fig. 10. IV., ſo iſt

der Winkel a dieſes Dreiecks, welcher der Seite α gegenüber liegt, der dem ebenen Winkel A gegenüber liegende Neigungswinkel der körperlichen Ecke.

Beweis. Werden die Winkel C und B mit dem Schenkel CD = BD = d an einander gelegt, ſo bildet bei jeder Neigung dieſer beiden Ebenen d die gemeinſchaftliche Kante, und weil DE = γ und DF = β in demſelben Punkte dieſer Kante ſenkrecht ſind, ſo ſchließen dieſe Linien den Neigungswinkel der Ebenen C und B ein. Nun trifft die Linie γ den zweiten Schenkel des Winkels C in E, und β trifft den zweiten Schenkel des Winkels B in F; nimmt man alſo auf dem dritten Winkel A den Schenkel AE = CE und AF = BF, ſo fällt bei der Conſtruction der Ecke AE mit CE und AF mit BF zuſammen, und es iſt daher EF = α die dritte Seite des Dreiecks, in welchem β und γ den Neigungswinkel der Ebenen B und C, alſo den Neigungswinkel einſchließen, welcher dem ebenen Winkel A gegenüber liegt. Beſchreibt man ſonach aus α, β und γ das Dreieck Fig. 10. IV., ſo iſt $\angle$a dieſer Neigungswinkel. Ganz auf dieſelbe Weiſe laſſen ſich auch die übrigen Neigungswinkel der körperlichen Ecke beſtimmen.

Zuſatz 1. Soll der von B und C eingeſchloſſene Neigungswinkel der körperlichen Ecke in dem Falle beſtimmt werden, wenn die Winkel B und C beide ſtumpf ſind, ſo kann das Stück CD = BD = d nicht auf den Schenkeln ſelbſt genommen werden, weil in dieſem Falle die Senkrechten γ und β mit dem zweiten Schenkel eines jeden dieſer Winkel divergiren, ſondern man muß in dieſem Falle DC und DB rückwärts verlängern, und auf dieſen Verlängerungen gleiche Stücke = d abſchneiden. Im übrigen bleibt die Conſtruction ganz dieſelbe. Iſt aber von den beiden Winkeln B und C, der eine B ſtumpf und C ſpitz, ſo ſind die drei ebenen Winkel der Nebenecke C; 180° — B und 180° — A nach §. 4. No. 7., und man kann nun nach der obigen Anleitung den von C und 180° — B eingeſchloſſenen Neigungswinkel dieſer Nebenecke finden. Da nun dieſer Neigungswinkel, den von B und C in der durch B, C und A beſtimmten Ecke eingeſchloſſenen zu 180° ergänzt; ſo iſt hierdurch nun auch dieſer gefunden.

Frage zur Uebung. Wie läßt ſich, wenn B, C und

A gegeben ſind, der von B und C eingeſchloſſene Neigungswinkel in dem Falle finden, wenn B = 90° iſt?

Zuſatz 2. Da der Neigungswinkel a immer nur auf eine Art erzeugt werden kann, indem das mit α, β und γ beſchriebene Dreieck der Art nach gegeben iſt, ſobald A, B und C gegeben ſind, ſo folgt, daß wenn die drei ebenen Winkel einer körperlichen Ecke gegeben ſind, dadurch die Neigungswinkel derſelben der Größe nach vollkommen beſtimmt ſind. Haben daher zwei körperliche dreikantige Ecken die drei ebenen Winkel gleich, ſo ſind die Ecken ſelbſt beide von gleicher Größe.

Aufgabe 2. Es ſind die drei Neigungswinkel einer körperlichen Ecke gegeben, man ſoll die drei ebenen Winkel derſelben beſtimmen.

Auflöſung. Bezeichnet man die drei gegebenen Neigungswinkel mit a, b und c, zieht jeden derſelben von 180° ab, und bezeichnet die Ergänzungen mit A′, B′ und C′, ſo ſind dieſe die ebenen Winkel der Ergänzungsecke der geſuchten, nach §. 4. No. 2. Man kann alſo nach Aufgabe 1. die Neigungswinkel a′, b′ und c′ dieſer Ergänzungsecke finden, und werden dieſe einzeln von 180° abgezogen, ſo erhält man nach §. 4. No. 2. die ebenen Winkel der zu conſtruirenden Ecke.

Zuſatz. Sind alſo die drei Neigungswinkel einer körperlichen Ecke gegeben, ſo iſt dieſelbe der Form nach vollkommen beſtimmt, und es ſind alſo zwei dreikantige Ecken, welche die drei Neigungswinkel gleich haben, einander gleich.

Aufgabe 3. Es ſind zwei ebene Winkel einer dreikantigen Ecke gegeben, und der von ihnen eingeſchloſſene Neigungswinkel, man ſoll die übrigen Stücke dieſer Ecke beſtimmen.

Auflöſung. Sind Fig. 10 II. und III. die ebenen Winkel B und C gegeben, ſo ſind dadurch auch, wenn man BD = CD = d macht, die Linien f, e, β und γ beſtimmt. Aus β, γ und dem gegebenen Neigungswinkel a läßt ſich das Dreieck Fig. 10. IV. beſchreiben, und man findet hierdurch die Linie α. Wird nun aus e, f und α das Dreieck Fig. 10. I. beſchrieben, ſo iſt der, der Seite α gegenüberliegende Winkel A, der dritte ebene Winkel der zu conſtruirenden Ecke, und es iſt alſo dieſe hierdurch vollkommen beſtimmt.

Zuſatz. Zwei dreikantige Ecken, welche zwei ebene Winkel

und

und den von denſelben eingeſchloſſenen Neigungswinkel gleich haben, ſind gleich groß.

Aufgabe 4. Man kennt von einer dreikantigen Ecke zwei Neigungswinkel und den von denſelben eingeſchloſſenen ebenen Winkel; es ſollen die übrigen Stücke dieſer Ecke gefunden werden.

Auflöſung. Sind b und c die gegebenen Neigungswinkel, und A der von denſelben eingeſchloſſene ebene Winkel, ſo ſind für

$$b + B' = 180^0;\ c + C' = 180^0 \text{ und } A + a' = 180^0$$

B′, C′ und a′ zwei ebene Winkel und der von ihnen eingeſchloſſene Neigungswinkel der Ergänzungsecke, und man kann alſo die übrigen Stücke derſelben nach der Anleitung Aufgabe 3. finden. Bezeichnet man dieſe Stücke mit b′, c′ und A′, ſo iſt von der zu conſtruirenden Ecke

$$B = 180^0 - b';\ C = 180^0 - c' \text{ und } a = 180^0 - A',$$

es ſind alſo die ſämmtlichen Stücke derſelben vollkommen beſtimmt.

Zuſatz. Zwei dreikantige Ecken, welche zwei Neigungswinkel und den von denſelben eingeſchloſſenen ebenen Winkel gleich haben, ſind alſo gleich groß.

§. 6.

Einige nähere Beſtimmungen für die dreikantigen Ecken.

1. In Fig. 10. II. iſt, wenn man den Sinustotus = r annimmt

$$\beta = \frac{d \operatorname{tg} B}{r} \text{ und } f = \frac{d \sec B}{r}$$

und in Fig. 10. III.

$$\gamma = \frac{d \operatorname{tg} C}{r} \text{ und } e = \frac{d \sec C}{r}$$

Aus den drei ebenen Winkeln A, B und C Fig. 10. aber laſſen ſich nach Anleitung der Aufgabe 1. §. 5. die Neigungswinkel der entſprechenden körperlichen Ecke immer finden, wenn aus den drei Linien α, β und γ ein Dreieck beſchrieben werden kann. Soll daher aus A, B und C eine Ecke conſtruirt werden können, ſo muß die Bedingung ſtatt finden

$$\beta + \gamma > \alpha$$

und daher auch $(\beta + \gamma)^2 > \alpha^2$

oder weil $\alpha^2 = f^2 + e^2 - \frac{2fe\cos A}{r}$

ſo muß ſein

$$\beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2 > f^2 + e^2 - \frac{2ef\cos A}{r}$$

und daher auch

$$2\beta\gamma > f^2 - \beta^2 + e^2 - \gamma^2 - \frac{2ef\cos A}{r}$$

$$\text{alſo } 2\beta\gamma > d^2 + d^2 - \frac{2ef\cos A}{r}$$

Es muß alſo die Bedingung ſtatt finden

$$\beta\gamma > d^2 - \frac{ef\cos A}{r}$$

und ſetzt man hier für β, γ, e und f die oben angegebenen trigonometriſchen Werthe, ſo wird

$$\frac{d^2 \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{r^2} > d^2 - \frac{d^2 \sec B \sec C \cos A}{r^3}$$

und es muß ſonach auch ſein

$$\frac{\sec B \sec C \cos A}{r^3} > 1 - \frac{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{r^2}$$

oder weil $\sec x = \frac{r^2}{\cos x}$ und $\operatorname{tg} x = \frac{r \sin x}{\cos x}$

$$\frac{r\cos A}{\cos B \cos C} > 1 - \frac{\sin B \sin C}{\cos B \cos C}$$

Dieſes nun giebt die Bedingung

$$\cos A > \frac{\cos B \cos C - \sin B \sin C}{r}$$

und endlich muß ſein

$$\cos A > \cos(B + C),$$

wenn aus den ebenen Winkeln A, B und C eine körperliche Ecke möglich iſt. Dieſe Bedingung aber findet nur ſtatt, wenn da iſt

$$A < B + C \text{ und zugleich } A + B + C < 360^0$$

folglich iſt auch nur in dieſem Falle aus A, B und C eine Ecke möglich, was mit den Sätzen No. 3. und 4. §. 4. übereinſtimmt.

Stellt man die Bedingung auf, daß da ſein muß

$$\beta < \alpha + \gamma$$

wenn aus α, β und γ ein Dreieck möglich ſein ſoll, ſo muß auch ſein

$$(\beta - \gamma)^2 < \alpha^2$$

und verfährt man hier, wie oben, ſo kommt man zu dem Reſultate, es muß ſein

$$\cos A < \cos (B - C)$$

alſo $$A > B - C$$

und daher $A + C > B$.

2. Soll aus drei gegebenen Neigungswinkeln a, b und c ſich eine körperliche Ecke conſtruiren laſſen, ſo muß ſein

$$a + b + c > 180^0$$

wie unmittelbar aus der Bedingung folgt, daß da ſein muß

$$A + B + C < 360^0.$$

Nun muß aber auch ſein, wenn C' der größte der ebenen Winkel der Ergänzungsecke iſt

$$C' < A' + B'$$

folglich muß auch die Bedingung ſtatt finden

$$(180^0 - c) < (180^0 - a) + (180^0 - b)$$

und daher $180^0 - c < 360^0 - (a + b)$

alſo muß ſein $a + b - c < 180^0$.

Wird alſo einer der Neigungswinkel von der Summe der beiden übrigen abgezogen, ſo muß der Reſt immer kleiner als 180^0 ſein, wenn ſich aus den gegebenen Neigungswinkeln eine körperliche Ecke ſoll conſtruiren laſſen.

3. Nach der Anleitung Aufgabe 3. §. 5. muß ſich aus e, f und α ein Dreieck beſchreiben laſſen, wenn aus den beiden ebenen Winkeln B, C und dem eingeſchloſſenen Neigungswinkel a eine körperliche Ecke ſoll conſtruirt werden können. Dieſe iſt alſo nur in dem Falle möglich, wenn die Bedingung ſtatt findet

$$\alpha < f + e$$

und alſo auch $\alpha^2 < (f + e)^2$

weil aber nach Fig. 10. IV.

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \frac{2\beta\gamma \cos a}{r}$$

ſo muß ſein

$$\beta^2 + \gamma^2 - \frac{2\beta\gamma \cos a}{r} < f^2 + e^2 + 2fe$$

und $-\frac{2\beta\gamma\cos a}{r} < (f^2 - \beta^2) + (e^2 - \gamma^2) + 2fe$

und daher für $d = r = 1$

$$2\beta\gamma\cos a = 2d^2 + 2fe$$

alſo $\beta\gamma\cos a = 1 + fe.$

Nun iſt aber in jedem Falle

$$f > \beta \text{ und } e > \gamma$$

alſo bereits $\beta\gamma < fe$

und daher um ſo mehr

$$\beta\gamma\cos a < 1 + fe$$

es läßt ſich alſo immer aus f, e und α ein Dreieck beſchreiben. Folglich iſt auch in allen Fällen aus den drei Stücken B, C und a eine körperliche Ecke möglich.

4. Auf gleiche Weiſe folgt, daß auch, wenn zwei Neigungswinkel und der von denſelben eingeſchloſſene ebene Winkel gegeben ſind, immer aus dieſen Stücken eine körperliche Ecke beſchrieben werden kann.

5. Sind von einer dreikantigen Ecke zwei ebene Winkel A und B und der Neigungswinkel a, welcher A gegenüber liegt, gegeben, oder zwei Neigungswinkel a und b, und der dem einen gegenüberliegende ebene Winkel A, ſo iſt dadurch noch keinesweges beſtimmt, ob überhaupt eine Ecke möglich iſt, welche dieſe drei Stücke enthält, und in dem Falle, wenn eine ſolche Ecke ſich angeben läßt, iſt gewöhnlich noch eine zweite angebbar, in der eben dieſelben Stücke vorkommen. Die geometriſche Conſtruction dieſes Falles iſt zu weitläufig, ohne von Nutzen zu ſein, während trigonometriſch dieſer Fall der einfachſte iſt, der daher auch zuerſt in dem folgenden Abſchnitte behandelt wird.

Zweiter Abſchnitt.

Trigonometriſche Berechnung der fehlenden Stücke einer dreikantigen Ecke.

§. 7.

Aufgabe 1.

Es ſoll angegeben werden, wie bei einer dreikantigen Ecke zwei ebene Winkel und die denſelben gegenüber liegenden Neigungswinkel von einander abhängen.

Auflöſung. Es ſei d Fig. 11. die körperliche Ecke, in welcher cd die dem ebenen Winkel $\alpha d \beta$ gegenüber liegende Kante bildet. Von irgend einem Punkte c dieſer Kante ziehe man die Senkrechte ca auf $d\beta$ und cb auf $d\alpha$, und errichte in der Ebene $\alpha d \beta$ auf $d\beta$ in a die Senkrechte $a\gamma$ und auf $d\alpha$ in b die Senkrechte $b\gamma$, ſo ſchneiden ſich beide in dem Punkte γ ſo, daß wenn man c mit γ verbindet, die Linie $c\gamma$ ſenkrecht auf der Ebene $\alpha d \beta$ ſteht, nach §. 2. No. 8., und es iſt daher $\angle c\gamma a = \angle c\gamma b = 90^0$ und zugleich iſt $\angle ca\gamma$ der Neigungswinkel der Ebene $cd\beta$ gegen $\beta d \alpha$, und $\angle cb\gamma$ iſt der Neigungswinkel von $cd\alpha$ gegen $\alpha d \beta$. Bezeichnet man nun die drei ebenen Winkel der körperlichen Ecke d mit A, B und C, ſo daß
$\angle cd\alpha = A$; $\angle cd\beta = B$ und $\alpha d\beta = C$ iſt, und werden die dieſen ebenen Winkeln gegenüber liegenden Neigungswinkel der Reihe nach mit a, b und c bezeichnet, ſo iſt

	$cd : cb = r : \sin A$	$cd : ca = r : \sin B$
und	$cb : c\gamma = r : \sin b$	$ca : c\gamma = r : \sin a$
alſo	$cd : c\gamma = r^2 : \sin A \sin b$	$cd : c\gamma = r^2 : \sin B \sin a$

Aus dieſen beiden Proportionen aber folgt

$$r^2 : \sin A \sin b = r^2 : \sin B \sin a$$

es iſt folglich $\sin A \sin b = \sin B \sin a$

und daher $\sin A : \sin a = \sin B : \sin b$

oder auch $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b.$

In jeder dreikantigen Ecke verhalten ſich alſo die Sinus der ebenen Winkel zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüber liegenden Neigungswinkel.

§. 8.

Aufgabe 2.

Es ſoll angegeben werden, wie ein Neigungswinkel einer dreikantigen Ecke von den drei ebenen Winkeln derſelben abhängt.

Auflöſung. Nach §. 5. No. 1. iſt, wenn Fig. 10. I., II. und III. die Winkel A, B und C die drei ebenen Winkel einer Ecke bilden, a Fig. 10. IV., der dem Winkel A gegenüber liegende Neigungswinkel. Nun iſt Fig. 10. II.

$$d : \beta = r : \mathrm{tg}\, B \quad \text{und} \quad d : f = r : \sec B$$

alſo

$$\beta = \frac{d\, \mathrm{tg}\, B}{r} \quad \text{und} \quad f = \frac{d \sec B.}{r}$$

Eben ſo iſt Fig. 10. III.

$$d : \gamma = r : \mathrm{tg}\, C \quad \text{und} \quad d : e = r : \sec C$$

alſo

$$\gamma = \frac{d\, \mathrm{tg}\, C}{r} \quad \text{und} \quad e = \frac{d \sec C.}{r}$$

Nach Fig. 10. I. aber iſt

$$\alpha^2 = f^2 + e^2 - \frac{2fe \cos A}{r}$$

ach Fig. 10. IV.

$$\cos a = \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}\right) r$$

und daher

$$\frac{2\beta\gamma \cos a}{r} \quad \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$$

und alſo auch, wenn man für α^2 den Werth ſetzt

$$\frac{2\beta\gamma \cos a}{r} = \beta^2 + \gamma^2 - \left[f^2 + e^2 - \frac{2fe \cos A}{r}\right]$$

nämlich es iſt

$$\frac{2\beta\gamma \cos a}{r} = \frac{2fe \cos A}{r} - (f^2 - \beta^2) - (e^2 - \gamma^2) = \frac{2fe \cos A}{r} - d^2 - d^2$$

hiernach iſt alſo

$$\beta\gamma \cos a = fe \cos A - d^2 r.$$

Setzt man nun für β, γ, f und c die oben angegebenen Werthe, ſo wird

$$\frac{d^2 \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \cos a}{r^2} = \frac{d^3 \sec B \sec C \cos A}{r^2} - d^2 r$$

und es iſt alſo auch

$$\frac{\sin B \sin C \cos a}{\cos B \cos C} = \frac{r^2 \cos A}{\cos B \cos C} - r$$

folglich iſt endlich

$$\cos a = \frac{r^2 \cos A - r \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

die Formel, durch welche die Abhängigkeit eines Neigungswinkels einer körperlichen Ecke von den drei ebenen Winkeln derſelben, ausgedrückt wird.

§. 9.

Aufgabe 3.

Man kennt die drei Neigungswinkel einer körperlichen Ecke, es ſollen hieraus die ebenen Winkel derſelben berechnet werden.

Auflöſung. Sind a, b und c die drei gegebenen Neigungswinkel, und werden die entſprechenden ebenen Winkel der Ergänzungsecke mit A′, B′ und C′ bezeichnet und die Neigungswinkel derſelben mit a′, b′ und c′, ſo findet nach §. 7. zwiſchen den einzelnen Theilen der Ergänzungsecke die Gleichung ſtatt

$$\cos a' = \frac{r^2 \cos A' - r \cos B' \cos C'}{\sin B' \sin C'}$$

es iſt alſo auch, wenn A, B und C die ebenen Winkel der zu beſtimmenden Ecke ſind, nach §. 4. No. 2.

$$\cos(180^0 - A) = \frac{r^2 \cos(180^0 - a) - r \cos(180^0 - b) \cos(180^0 - c)}{\sin(180^0 - b) \sin(180^0 - c)}$$

und weil ganz allgemein

$$\cos(180^0 - x) = -\cos x \text{ und } \sin(180^0 - x) = \sin x$$

ſo iſt $-\cos A = \dfrac{-r^2 \cos a - r \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$

und hierdurch erhält man die geſuchte Gleichung

$$\cos A = \frac{r^2 \cos a + r \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

§. 10.

Aufgabe 4.

Es ſoll angegeben werden, wie die vier neben einander liegenden Stücke A, b, C und a einer dreikantigen Ecke von einander abhängen.

Auflöſung. Nach §. 8. iſt

$$\cos b = \frac{r^2 \cos B - r \cos A \cos C}{\sin A \sin C}$$

alſo $\sin A \sin C \cos b = r^2 \cos B - r \cos A \cos C$

und daher iſt auch

$$[\sin A \sin C \cos b + r \cos A \cos C]^2 = r^4 (r^2 - \sin^2 B)$$

nun iſt nach §. 7.

$$\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$$

$$\text{alſo } \sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}$$

folglich iſt auch, wenn man dieſen Werth für sin B ſetzt

$$[\sin A \sin C \cos b + r \cos A \cos C]^2 = r^4 \left(r^2 - \frac{\sin^2 A \sin^2 b}{\sin^2 a}\right)$$

nämlich es iſt

$$\sin^2 A \sin^2 C \cos^2 b + 2r \sin A \cos A \sin C \cos C \cos b$$
$$+ r^2 \cos^2 A \cos^2 C = r^6 - \frac{r^4 \sin^2 A \sin^2 b}{\sin^2 a}$$
$$= r^6 - \operatorname{cosec}^2 a \sin^2 A \sin^2 b$$

daher iſt auch, wenn man durchgehends mit $\sin^2 A$ theilt

$$\sin^2 C \cos^2 b + 2 \cot A \sin C \cos C \cos b + \cot^2 A \cos^2 C$$
$$= r^2 \operatorname{cosec}^2 A - \operatorname{cosec}^2 a \sin^2 b$$
$$= r^2 (r^2 + \cot {}^2A) - (r^2 + \cot {}^2a) \sin {}^2b.$$

Es iſt alſo

$$\sin C \cos^2 b + 2 \cot A \sin C \cos C \cos b + \cot^2 A \cos^2 C$$
$$= r^2 (r^2 - \sin^2 b) + r^2 \cot^2 A - \cot^2 a \sin^2 b$$

und folglich iſt auch

$$2 \cot A \sin C \cos C \cos b + \cot^2 a \sin^2 b = (r^2 - \sin^2 C).$$
$$\cos^2 b + (r^2 - \cos^2 C) \cot^2 A.$$

Hieraus nun erhält man

$$\cot^2 a \sin^2 b = \sin^2 C \cot^2 A - 2 \cot A \sin C \cos C \cos b$$
$$+ \cos^2 C \cos^2 b = (\sin C \cot A - \cos C \cos b)^2$$

und dieſes giebt die geſuchte Gleichung zwiſchen vier neben einander liegenden Stücken

$$\cot a \sin b = \sin C \cot A - \cos C \cos b.$$

§. 11.

Anwendung dieſer Formeln zur Berechnung der fehlenden Stücke einer dreikantigen Ecke, in welcher ein Neigungswinkel = 90° iſt.

Die bisher abgeleiteten Formeln werden bedeutend einfacher, wenn einer der Neigungswinkel = 90° iſt, und man findet die Formeln für dieſen Fall, die auch für das rechtwinklige ſphäriſche Dreieck Gültigkeit haben, auf folgende Art:

Nach §. 7. iſt $\sin A : \sin a = \sin B : \sin b$
und es iſt alſo auch, wenn der ebene Winkel, welcher dem Neigungswinkel von 90° gegenüberliegt, mit H bezeichnet wird
$\sin A : \sin a = \sin B : \sin b = \sin H : \sin 90^0 = \sin H : r$
nämlich es iſt

$$\text{I.} \quad \sin H : \sin A = r : \sin a$$

und $\sin H : \sin B = r : \sin b.$

Ferner iſt nach §. 8.

$$\cos a = \frac{r^2 \cos A - r \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

und daher für den Neigungswinkel c

$$\cos c = \frac{r^2 \cos C - r \cos A \cos B}{\sin B \sin A}$$

Iſt nun $c = 90^0$, und wird für dieſen Fall H ſtatt C geſetzt, ſo erhält man

$$\cos 90^0 = \frac{r^2 \cos H - r \cos A \cos B}{\sin B \sin A}$$

und weil $\cos 90^0 = o$, ſo iſt auch

$$o = r^2 \cos H - r \cos A \cos B$$

und dieſes giebt die Proportion

$$\text{II.} \quad r : \cos A = \cos B : \cos H.$$

Nach §. 9. iſt

$$\cos A = \frac{r^2 \cos a + r \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

und daher für den ebenen Winkel C

$$\cos C = \frac{r^2 \cos c + r \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

hiernach iſt für C = H, alſo für c = 90°

$$\cos H = \frac{r^2 \cos 90^0 + r \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

nämlich es iſt, weil cos 90° = o

$$\cos H = \frac{r \cos a \cos b}{\sin a \sin a} = \frac{\cot a \cot b}{r}$$

Es iſt alſo r cos H = cot a cot b
woraus man die Proportion erhält

III. r : cot a = cot b : cos H.

Aus der Formel §. 9.

$$\cos A = \frac{r^2 \cos a + r \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

folgt aber auch, wenn c = 90° geſetzt wird, weil cos 90° = o und sin 90° = r

$$\cos A = \frac{r^2 \cos a}{r \sin b} = \frac{r \cos a}{\sin b}$$

es iſt alſo cos A sin b = r cos a
und daher

IV. r : sin b = cos A : cos a.

Da nach §. 10.

$$\cot a \sin b = \cot A \sin C - \cos C \cos b$$

ſo iſt auch für die vier neben einander liegenden Stücke A, c, B und a

$$\cot a \sin c = \cot A \sin B - \cos B \cos c$$

und wenn hier c = 90° geſetzt wird, ſo erhält man

$$\cot a \sin 90^0 = \cot A \sin B - \cos B \cos 90^0$$

nämlich es iſt

$$r \cot a = \cot A \sin B$$

und alſo auch $\frac{r^3}{tg\, a} = \frac{r^2 \sin B}{tg\, A}$

folglich iſt r tg A = sin B tg a
und dieſes giebt die Proportion

V. r : sin B = tg a : tg A.

Die Gleichung §. 10. wird für die vier neben einander liegenden Stücke C, b, A und c

$$\cot c \sin b = \cot C \sin A - \cos A \cos b$$

und daher iſt, wenn man hier c = 90° und alſo C = H ſetzt

$$\cot 90^\circ \sin b = \cot H \sin A - \cos A \cos b$$

und weil auch cot 90° = o, ſo iſt

$$\cos A \cos b = \cot H \sin A$$

alſo

$$\cos b = \frac{r^2 \sin A}{\operatorname{tg} H \cos A}$$

und dieſes giebt

$$\operatorname{tg} H \cos b = r \operatorname{tg} A$$

folglich iſt VI. $r : \cos b = \operatorname{tg} H : \operatorname{tg} A$.

Die hier gefundenen 6 Proportionen ſind hinreichend, um in allen Fällen, wenn von einer dreikantigen Ecke mit einem Neigungswinkel von 90° zwei Stücke gegeben ſind, die fehlenden durch Rechnung zu finden, und es haben, wie ſich von ſelbſt verſteht, dieſe Proportionen auch für das rechtwinklige ſphäriſche Dreieck Gültigkeit.

Zuſatz. Wenn in einer dreikantigen Ecke ein ebener Winkel = 90° iſt, ſo hat die dazu gehörige Ergänzungsecke einen Neigungswinkel von 90°, und man kann alſo von dieſer die fehlenden Stücke mittelſt der obigen Proportionen finden, wenn zwei Stücke gegeben ſind. Werden nun die ſo gefundenen Stücke einzeln von 180° abgezogen, ſo erhält man die geſuchten der Ecke, in welcher ein ebener Winkel von 90° vorkommt. Uebrigens iſt es leicht, die obigen Proportionen ſo umzuformen, daß durch dieſelben unmittelbar die fehlenden Stücke einer ſolchen Ecke ſich berechnen laſſen, und man erhält hierdurch zugleich die Formeln für das ſphäriſche Dreieck, in welchem eine Seite ein Quadrant iſt.

§. 12.

Nähere Beſtimmungen für die obigen Formeln.

Ob die aus den gegebenen, gefundenen Stücke einer Ecke mit einem rechten Winkel, kleiner oder größer als 90° ſind, läßt ſich aus der benutzten Proportion beurtheilen, weil durch die ſubſtituirten Werthe ſich immer ergiebt, ob das geſuchte Reſultat poſitiv oder negativ werden muß, und hiervon die Größe des gefundenen Stückes abhängt. Nur die erſte Formel macht hiervon eine Ausnahme, weil in dieſer nur Sinus

vorkommen, die in dem zweiten Quadranten das Zeichen nicht ändern.

Wird der dem Neigungswinkel von 90° gegenüber liegende ebene Winkel die Hypotenuſe genannt, und die beiden übrigen die Katheten, und nennt man zwei Stücke gleichartig, wenn ſie zugleich beide kleiner oder beide größer als 90° ſind, aber ungleichartig, wenn das eine kleiner und das andere größer iſt als 90°, ſo ergeben ſich zur Beurtheilung der Größe der berechneten Stücke folgende Regeln:

Die Proportion No. II. §. 11. iſt

$$r : \cos A = \cos B : \cos H$$

alſo $$r \cos H = \cos A \cos B.$$

Sind A und B gleichartig, ſo iſt das Produkt $\cos A \cos B$ immer poſitiv, und es muß alſo in dieſem Falle auch $r \cos H$ und folglich $\cos H$ poſitiv ſein; ſind A und B aber ungleichartig, ſo iſt das Produkt $\cos A \cos B$ und daher auch $\cos H$ negativ. Im erſtern Falle iſt daher $H < 90°$ und in dem letztern Falle $H > 90°$, und dieſes giebt die Regel:

1. Die Hypotenuſe iſt $< 90°$, wenn die beiden Katheten gleichartig, und ſie iſt $> 90°$, wenn ſie ungleichartig ſind. Umgekehrt folgt hieraus, daß die Katheten gleichartig oder ungleichartig ſein müſſen, je nachdem die Hypotenuſe kleiner oder größer als 90° iſt.

Die Proportion No. III. §. 11. iſt

$$r : \cot a = \cot b : \cos H$$

es iſt alſo $$r \cos H = \cot a \cot b$$

und hieraus folgt: die Winkel hängen eben ſo von der Hypotenuſe ab, wie die Katheten von derſelben abhängen. Es iſt nämlich:

2. Wenn die Winkel gleichartig ſind, $H < 90°$, und es iſt $H > 90°$, wenn die Winkel ungleichartig ſind. Umgekehrt müſſen die Winkel gleichartig oder ungleichartig ſein, je nachdem $H < 90°$ oder $H > 90°$ iſt.

Die Proportion No. IV. §. 11. iſt

$$r : \sin b = \cos A : \cos a$$

alſo $$r \cos a = \sin b \cos A$$

Da nun $\sin b$ immer einen poſitiven Werth hat, ſo folgt,

daß cos a und cos A daſſelbe Zeichen haben müſſen, und dieſes giebt die Regel:

3. Jede Kathete iſt immer dem ihr gegenüber liegenden Winkel gleichartig.

Daſſelbe Reſultat wird auch aus der 5ten Proportion erhalten.

Die Proportion No. VI. §. 11. iſt

$$r : \cos b = \operatorname{tg} H : \operatorname{tg} A$$

es iſt alſo $r \operatorname{tg} A = \cos b \operatorname{tg} H$

woraus die Regel ſich ergiebt:

4. Wenn eine Kathete kleiner iſt als 90°, ſo iſt der anliegende Winkel der Hypotenuſe gleichartig, und es ſind dieſe beiden Stücke ungleichartig, wenn die dem Winkel anliegende Kathete größer iſt als 90°. Umgekehrt ergiebt ſich hieraus auch, daß eine Kathete kleiner oder größer als 90° ſein muß, je nachdem der ihr anliegende Winkel mit der Hypotenuſe gleichartig oder ungleichartig iſt.

Da aus der Proportion No. I. §. 11.

$$r : \sin H = \sin a : \sin A$$

in Beziehung auf die Zeichen der einzelnen Größen ſich nichts folgern läßt, ſo geht hieraus hervor, daß wenn eine Kathete und der ihr gegenüber liegende Winkel gegeben ſind, die Aufgabe unbeſtimmt iſt. Es kann nämlich in dieſem Falle H kleiner oder auch größer als 90° ſein. Da übrigens dieſe Proportion giebt

$$\sin H = \frac{r \sin A}{\sin a}$$

ſo folgt 5. Die Aufgabe enthält einen Widerſpruch, ſobald der Werth von sin A größer iſt als der von sin a, weil in dieſem Falle wird

$\frac{r \sin A}{\sin a} > r$, und daher auch $\sin H > r$ ſein müßte, was nicht möglich iſt.

Da hiernach, wenn die Aufgabe keinen Widerſpruch enthalten ſoll, immer ſein muß

$$\sin A \leqq \sin a,$$

im erſten Quadranten aber zu dem größeren Bogen ein größerer Sinus gehört, und im zweiten Quadranten zu dem größeren Bogen der kleinere Sinus, ſo folgt

6. Es muß immer ſein A < a, wenn dieſe Stücke kleiner als 90° ſind, und A > a, wenn ſie größer ſind als 90°.

§. 13.

Beſondere Eigenſchaften der dreikantigen Ecken und der ſphäriſchen Dreiecke überhaupt.

Es iſt bereits §. 4. gezeigt worden, daß die Eigenſchaften, welche bei dreikantigen Ecken vorgefunden werden, auch den ſphäriſchen Dreiecken zukommen und umgekehrt, und man braucht daher blos die Eigenſchaften dieſer Dreiecke zu unterſuchen, um auch die der körperlichen Ecken kennen zu lernen. Zieht man von der Spitze c Fig. 12. eines ſolchen Dreiecks die Senkrechte cd = P auf die gegenüberliegende Seite ab = C, ſo fällt dieſe Senkrechte, wenn nicht a oder b ſelbſt ein rechter Winkel iſt, entweder innerhalb des Dreiecks, wie bei I., oder außerhalb deſſelben, wie bei II., und es iſt in beiden Fällen die Normale cd = P das Maaß des Winkels, welchen in der entſprechenden Ecke die Kante c mit dem gegenüberliegenden ebenen Winkel C bildet. So iſt z. B. in der körperlichen Ecke Fig. 11. eine ſolche von c aus gefällte Normale das Maaß des Neigungswinkels der Kante cd gegen die Fläche adb, ſie iſt alſo das Maaß des Winkels cdγ.

Da Fig. 12. cbd ein rechtwinkliges ſphäriſches Dreieck iſt, ſo kann man den Werth von P immer finden, wenn A und b, oder was daſſelbe iſt, wenn B und a gegeben ſind. Es iſt alſo immer der Neigungswinkel einer Kante beſtimmt, wenn man einen der anliegenden ebenen Winkel kennt und den Neigungswinkel, welchen derſelbe mit der Grundebene bildet. Nun iſt in dem rechtwinkligen ſphäriſchen Dreiecke cbd nach §. 11. No. I., weil cb = A die Hypotenuſe iſt,

$$\sin A : \sin P = r : \sin b$$

alſo iſt $$\sin P = \frac{\sin A \cdot \sin b}{r}$$

in einem rechtwinkligen Dreiecke iſt aber immer die Kathete dem gegenüber liegenden Winkel gleichartig, folglich iſt auch immer P mit b gleichartig, wenn beide auf derſelben Seite liegen, und daſſelbe gilt auch von P in Beziehung auf a. Hieraus ergiebt ſich die Regel:

Wenn in einem ſphäriſchen Dreiecke die Winkel a und b gleichartig ſind, ſo iſt auch die Normale P denſelben gleichartig, und liegt innerhalb des Dreiecks; ſind a und b aber ungleichartig, ſo liegt P außerhalb des Dreiecks, und es giebt zwei Werthe für dieſe Größe, die einander zu 180° ergänzen. Iſt z. B. $a > 90°$ und $b < 90°$, ſo trifft die Normale $P < 90°$ die Verlängerung von ba auf der Seite, wo a liegt, und ihre Ergänzung $> 90°$ trifft die Verlängerung von ab auf der Seite von b. Für die Neigung der Kante wird aber in dieſem Falle immer der Werth $< 90°$ benutzt.

Setzt man das durch P von der Grundlinie C abgeſchnittene Stück $bd = \alpha$ und $ad = \beta$, ſo iſt nach §. 11. No. V.

$$r : \sin\alpha = \text{tg } b : \text{tg } P$$

und $$r : \sin\beta = \text{tg } a : \text{tg } P$$

folglich iſt $\sin\alpha : \sin\beta = \text{tg } a : \text{tg } b$

Iſt nun $a = b$, alſo auch $\text{tg } a = \text{tg } b$, ſo muß auch ſein $\sin\alpha = \sin\beta$, und daher entweder $\alpha + \beta = 180°$ oder $\alpha = \beta$; das erſtere kann nicht ſtatt finden, alſo iſt $\alpha = \beta$. Nämlich ſobald $a = b$, iſt auch $\alpha = \beta$.

Nach §. 11. No. II. aber iſt

$$r : \cos\alpha = \cos P : \cos A$$

und $$r : \cos\beta = \cos P : \cos B$$

folglich $\cos\alpha : \cos\beta = \cos A : \cos B$

und daher iſt, wenn $\alpha = \beta$ auch $A = B$.

Es iſt alſo auch $A = B$, wenn $a = b$.

Hieraus geht hervor, daß in jedem ſphäriſchen Dreiecke gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber liegen und umgekehrt, und es ſtehen alſo auch in jeder dreikantigen Ecke gleichen ebenen Winkeln gleiche Neigungswinkel gegenüber und umgekehrt.

Iſt nun Fig. 13. $\angle abc > \angle bac$

ſo kann man bd ſo ziehen, daß $\angle\, abd = bac$

und es iſt alsdann auch $ad = bd$;

da nun $bd + dc > bc$

ſo iſt auch $ad + dc > bc$

nämlich es iſt $ac > bc$;

wenn die Bedingung ſtatt findet $\angle abc > \angle bac$;

und hieraus geht hervor, daß in jedem ſphäriſchen Dreiecke dem

größern Winkel eine größere Seite gegenüber liegt, und es gilt dieſer Satz auch umgekehrt, und hat, wie ſich von ſelbſt verſteht, auch bei der dreikantigen Ecke Gültigkeit.

§. 14.
Von der Berechnung der fehlenden Stücke eines ſphäriſchen Dreiecks überhaupt.

Durch die Aufgaben §. 7., 8., 9. und 10. ſind die Gleichungen gefunden worden

$$1.\quad \sin A \sin b = \sin B \sin a.$$

$$2.\quad \cos a = \frac{r^2 \cos A - r \cos B \cos C.}{\sin B \sin C}$$

$$3.\quad \cos A = \frac{r^2 \cos a + r \cos b \cos c.}{\sin b \sin c}$$

$$4.\quad \cot a \sin b = \cot A \sin C - \cos C \cos b;$$

und dieſe 4 Formeln ſind hinreichend, um in jedem Falle aus drei gegebenen Stücken eines ſphäriſchen Dreiecks die übrigen zu finden. Es iſt aber in den meiſten Fällen ſchwierig, mit den gegebenen Formeln die erforderlichen Reductionen vorzunehmen, weil dieſe Formeln meiſtens von einer und derſelben Größe zwei verſchiedene trigonometriſche Funktionen enthalten; ſo enthält z. B. die zweite Formel von B den Sinus und den Coſinus ꝛc. Indeſſen wird durch einen ſogenannten Hülfswinkel nicht nur die Reduction ſelbſt erleichtert, ſondern man bekommt zugleich auch einfache, für die Anwendung bequeme Reſultate. Bevor jedoch dieſe Reductionen vorgenommen werden, ſoll erſt unterſucht werden, wie viel verſchiedene Formeln überhaupt aus den obigen vier Gleichungen ſich ableiten laſſen, und in wiefern dieſelben zur Auflöſung aller hier möglichen Aufgaben hinreichen.

Die Gleichung No. I. führt zu den beiden Formeln

$$\sin A = \frac{\sin B \sin a}{\sin b} \text{ und } \sin a = \frac{\sin A \sin b,}{\sin B}$$

die beide einfach und bequem ſind, und alſo keiner weitern Umformung bedürfen. Man könnte aus derſelben Gleichung zwar auch den Werth von B oder b ſuchen, allein die Reſultate ſind von denen für A und a nicht verſchieden. Es kommt hier immer darauf an, aus zwei einander gegenüber liegenden Stücken

Stücken eine Seite zu finden, wenn noch der ihr gegenüber liegende Winkel gegeben iſt, oder einen Winkel, wenn man die demſelben gegenüber liegende Seite kennt. Daher ſind die Formeln

$$\sin A = \frac{\sin B \sin a}{\sin b} = \frac{\sin C \sin a}{\sin c}$$

$$\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a} = \frac{\sin C \sin b}{\sin c}$$

$$\sin C = \frac{\sin A \sin c}{\sin a} = \frac{\sin B \sin c}{\sin b}$$

ſämmtlich nicht verſchieden von einander, ſie drücken alle eine und ebendieſelbe Regel aus. Dieſelbe Bewandniß hat es auch mit der Formel für sin a, und es finden ähnliche Relationen auch bei den aus den übrigen Gleichungen abgeleiteten Formeln ſtatt.

Die zweite Gleichung

$$\cos a = \frac{r^2 \cos A - r \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

führt zu drei verſchiedenen Formeln, nämlich man kann in derſelben, außer a auch entweder A oder B ſuchen. Der Fall, wenn C geſucht wird, iſt nicht verſchieden von dem, wenn man B ſucht; beide entſprechen der Aufgabe: den Werth einer Seite zu berechnen, wenn die beiden andern gegeben ſind und ein Winkel, der einer von beiden gegenüber liegt. Uebrigens ſind die Gleichungen

$$\cos b = \frac{r^2 \cos B - r \cos A \cos C}{\sin A \sin C}$$

und $\cos c = \frac{r^2 \cos C - r \cos A \cos B}{\sin A \sin B}$

von der eben angegebenen zweiten Gleichung, durch welche cos a beſtimmt wird, nicht verſchieden.

Die dritte Gleichung

$$\cos A = \frac{r^2 \cos a + r \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

führt ebenfalls zu drei verſchiedenen Formeln, da man hier außer A auch a oder b ſuchen kann. Der Werth des Winkels c iſt von dem von b nicht verſchieden, weil, man mag den einen oder den andern dieſer Winkel ſuchen, es immer darauf an=

kommt, den Werth eines Winkels zu berechnen, wenn die beiden andern gegeben ſind und eine Seite, die einem von beiden gegenüber liegt.

Die vierte Gleichung endlich

$$\cot a \sin b = \cot A \sin C - \cos C \cos b$$

führt zu 4 verſchiedenen Formeln, weil hier jede der vier vorkommenden Größen von den drei übrigen auf eine andere Art abhängt.

Die vier Gleichungen führen alſo im Ganzen zu 12 verſchiedenen Formeln, und daß dieſe für alle Fälle hinreichen, läßt ſich nun auf folgende Art nachweiſen:

Die drei gegebenen Stücke ſind

entweder 1. drei Seiten,
oder 2. zwei Seiten und der eingeſchloſſene Winkel,
" 3. " " " ein gegenüber liegender Winkel,
" 4. zwei Winkel und die eingeſchloſſene Seite,
" 5. " " " eine gegenüber liegende Seite,
" 6. drei Winkel.

Zu 1. Hier kommt nur der einzelne Fall vor, daß ein Winkel geſucht werden ſoll, gleichviel welcher, und dieſes giebt

1. die Aufgabe, a zu ſuchen, wenn A, B und C gegeben ſind, was mit Hülfe der zweiten Gleichung geſchehen kann.

Zu 2. Hier kann entweder die dritte Seite geſucht werden, oder einer von den beiden übrigen Winkeln, gleichviel welcher, denn es iſt immer ein Winkel, der einer der gegebenen beiden Seiten gegenüber liegt. Dieſer Fall führt alſo zu zwei Aufgaben, nämlich

2. Es iſt B, C und a gegeben, man ſoll A ſuchen, was mit Hülfe der zweiten Gleichung geſchehen kann, und

3. Es iſt A, C und b gegeben, man ſoll a ſuchen, und dieſes kann mit Hülfe der 4ten Gleichung geſchehen.

Zu 3. Hier kann man ſuchen: die dritte Seite, oder den Winkel, der von den beiden gegebenen Seiten eingeſchloſſen wird, oder auch den Winkel, welcher der andern von den gegebenen Seiten gegenüber liegt. Es führt alſo dieſer Fall zu den drei Aufgaben:

4. Es iſt gegeben A, a und B, und es wird C geſucht, was durch die 2te Gleichung geſchehen kann.

5. Es iſt gegeben A, a und B, und man ſucht c, wozu die 4te Gleichung benutzt werden muß, und

6. Es iſt gegeben A, a und B, und es ſoll b geſucht werden, was mit Hülſe der erſten Gleichung geſchehen kann.

Zu 4. Hier kann man ſuchen: den dritten Winkel oder eine Seite, welche einem von den gegebenen beiden Winkeln gegenüber liegt. Dieſer Fall giebt alſo die beiden Aufgaben

7. Man kennt A, b und c, und es ſoll a gefunden werden, was mit Hülſe der 3ten Gleichung geſchehen kann, und

8. Es iſt a, b und C gegeben und es wird A geſucht, wobei die 4te Gleichung zu benutzen iſt.

Zu 5. Es ſind zwei Winkel gegeben, und eine gegenüber liegende Seite, hier kann man ſuchen: entweder den dritten Winkel, oder die von den gegebenen Winkeln eingeſchloſſene Seite, oder eine Seite, welche dem einen der gegebenen Winkel gegenüber liegt. Hierdurch erhält man die 3 Aufgaben:

9. Es iſt gegeben a, b und A, man ſoll c ſuchen, was mit Hülſe der dritten Gleichung geſchehen kann.

10. Man kennt a, b und A, es ſoll C gefunden werden, wozu die 4te Gleichung benutzt werden muß.

11. Man kennt a, b und A, es ſoll B gefunden werden, wobei die 1ſte Gleichung gebraucht wird.

Zu 6. Es ſind die drei Winkel gegeben, ſo kommt nur die einzige Aufgabe vor, eine Seite zu ſuchen. Die Aufgabe iſt alſo

12. Es iſt a, b und c gegeben, man ſoll A finden, wobei die dritte Gleichung benutzt werden muß.

Es giebt alſo im Ganzen wirklich nicht mehr als 12 verſchiedene Aufgaben, und die durch die bekannten 4 Gleichungen beſtimmten 12 Formeln, wovon bereits die beiden, welche aus der erſten Gleichung ſich ergeben, angegeben ſind, entſprechen dieſen Aufgaben, ſo daß, in ſo fern die gegebenen Stücke keinen Widerſpruch enthalten, die Auflöſung immer geſchehen kann; und ſelbſt in dem Falle, wenn aus den gegebenen Stücken kein Dreieck ſich conſtruiren läßt, zeigen dieſe Formeln den Widerſpruch an.

§. 15.

Reduction der zweiten Gleichung.

Dieſe Gleichung iſt nach §. 8.

$$\cos a = \frac{r^2 \cos A - \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

und es führt dieſelbe, wie in dem vorigen §. angegeben worden iſt, zu drei verſchiedenen Formeln, durch welche beſtimmt werden die Werthe von a, A und B. Bei der Ableitung dieſer Formeln kommt es darauf an, für dieſelben möglichſt einfache Formen zu erhalten. Alſo

1. Beſtimmung des Werthes von a.

Zwar wird durch die zweite Gleichung ſelbſt unmittelbar der Werth von a ausgedrückt, dieſe Formel aber iſt für das Rechnen mit Logarithmen nicht brauchbar, weil ſie aus zwei durch — mit einander verbundenen Theilen beſteht. Auf folgende Art aber läßt ſich aus derſelben eine einfachere Form ableiten. Es iſt bekanntlich $\cos a = \frac{r^2 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} a}{r}$

alſo iſt auch

$$\frac{r^2 \cos A - r \cos B \cos C}{\sin B \sin C} = \frac{r^2 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} a}{r}$$

und daher $r^3 \cos A - r^2 \cos B \cos C =$

$$r^2 \sin B \sin C - 2 \sin B \sin C \sin^2 \tfrac{1}{2} a.$$

Es iſt alſo $2 \sin B \sin C \sin^2 \frac{1}{2} a =$

$$r^2 [\cos B \cos C + \sin B \sin C] - r^3 \cos A =$$
$$r^3 \cos (B - C) - r^3 \cos A$$

nämlich es iſt

$$2 \sin B \sin C \sin^2 \tfrac{1}{2} a = r^3 [\cos (B - C) - \cos A].$$

Nun iſt ganz allgemein

$$r (\cos \alpha - \cos \beta) = 2 \sin \left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) \sin \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)$$

und daher auch

$$r [\cos (B - C) - \cos A] = 2 \sin \left(\frac{A + B - C}{2}\right) \sin \left(\frac{A + C - B}{2}\right)$$
$$= 2 \sin (H - C) \sin (H - B)$$

wenn man $\frac{A+B+C}{2} = H$ ſetzt; folglich iſt

$$\sin B \sin C \sin^2 \tfrac{1}{2} a = r^2 \sin(H-B) \sin(H-C)$$

und hieraus erhält man endlich

$$\sin \tfrac{1}{2} a = r \sqrt{\frac{\sin(H-B)\sin(H-C)}{\sin B \sin C}}$$

eine Formel, durch welche der Werth von a mit Hülfe der Logarithmen ſich berechnen läßt, wenn A, B und C gegeben ſind.

Es iſt übrigens auch $\cos a = \frac{2\cos^2 \frac{1}{2} a - r^2}{r}$

und ſetzt man dieſen Werth ſtatt cos a in der urſprünglichen Gleichung, ſo erhält man durch Reduction

$$\cos \tfrac{1}{2} a = r \sqrt{\frac{\sin H \sin(H-A)}{\sin B \sin C}}$$

eine Formel, die eben ſo bequem iſt, wie die vorige.

Durch Einführung eines Hülfswinkels läßt ſich die gegebene Formel ebenfalls auf eine für das Rechnen mit Logarithmen bequeme Form bringen, nämlich es iſt

$$\cos a = \frac{r^2 \cos A - r \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

alſo $\frac{\sin B \sin C \cos a}{r \sin A} = \frac{r \cos A}{\sin A} - \frac{\cos B \cos C}{\sin A}$

Setzt man nun $\frac{\cos B \cos C}{\sin A} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{r \sin \varphi}{\cos \varphi}$

ſo wird $\frac{\sin B \sin C \cos a}{r \sin A} = r\left[\frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\right]$

$$= \frac{r[\cos A \cos \varphi - \sin A \sin \varphi]}{\sin A \cos \varphi}$$

es iſt alſo $\frac{\sin B \sin C \cos a}{r} = \frac{r^2 \cos(A+\varphi)}{\cos \varphi}$

und daher $\cos a = \frac{r^3 \cos(A+\varphi)}{\sin B \sin C \cos \varphi}$

eine Formel, durch welche ſich ebenfalls der Werth von a leicht finden läßt, wenn man zuvor den von φ mittelſt der Formel berechnet

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos B \cos C}{\sin A}.$$

2, Beſtimmung des Werthes von A.

Aus der gegebenen Gleichung

$$\cos a = \frac{r^2 \cos A - r \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

erhält man unmittelbar

$$\cos A = \frac{\sin B \sin C \cos a}{r^2} + \frac{\cos B \cos C}{r}$$

eine Gleichung, durch welche zwar der Werth von A gefunden werden kann, die aber für das Rechnen mit Logarithmen nicht brauchbar iſt. Es folgt aber aus dieſer Formel auch

$$\frac{r^2 \cos A}{\sin C \cos a} = \sin B + \frac{\cos B \cot C}{\cos a}$$

und ſetzt man nun $\frac{r \cot C}{\cos a} = \operatorname{tg} \psi = \frac{r \sin \psi}{\cos \psi}$

ſo wird

$$\frac{r^2 \cos A}{\sin C \cos a} = \sin B + \frac{\cos B \sin \psi}{\cos \psi}$$

und daher $\frac{r^2 \cos A}{\sin C \cos a} = \frac{\sin B \cos \psi + \cos B \sin \psi}{\cos \psi}$

$$= \frac{r \sin (B + \psi)}{\cos \psi}$$

Es iſt alſo $\cos A = \frac{\sin (B + \psi) \sin C \cos a}{r \cos \psi}$

da nun $\cos \psi = \frac{\sin \psi \cos a}{\cot C} = \frac{\sin \psi \cos a \sin C}{r \cos C}$

ſo wird endlich, wenn man dieſen Werth ſetzt

$$\cos A = \frac{\sin (B + \psi) \cos C}{\sin \psi}$$

und dieſes iſt die Formel, durch welche der Werth von A gefunden wird, wenn man B, C und a kennt, und der hierbei vorkommende Hülfswinkel ψ iſt beſtimmt durch die Formel

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r \cot C}{\cos a}$$

3, Beſtimmung des Werthes von B.

Da der Werth von A ausgedrückt wird durch die Gleichung

$$\cos A = \frac{\sin (B + \psi) \cos C}{\sin \psi}$$

$$\text{für } \operatorname{tg} \psi = \frac{r \cot C}{\cos a}$$

wo alſo der Werth von ψ ganz unabhängig von B iſt, ſo kann aus dieſer Gleichung unmittelbar gefolgert werden

$$\sin (B + \psi) = \frac{\cos A \sin \psi.}{\cos C}$$

wodurch man den Werth von $B + \psi$ kennen lernt, und da ſich der von ψ aus den bekannten Größen C und a berechnen läßt, ſo iſt hierdurch auch der Werth von B beſtimmt.

§. 16.

Reduction der dritten Gleichung.

Die dritte Gleichung iſt nach §. 9.

$$\cos A = \frac{r^2 \cos a + r \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

und es iſt dieſelbe aus der zweiten dadurch gefunden worden, daß die Ergänzungsecke benutzt wurde; daher laſſen ſich auch, ohne daß man dieſe Gleichung zu reduciren nöthig hat, aus den Formeln §. 15. die von der dritten Gleichung abhängenden ableiten; oder falls man es vorzieht, die Gleichung ſelbſt zu reduciren, ſo kann hierbei ganz daſſelbe Verfahren, wie bei der zweiten Gleichung angewendet werden, und man erhält durchgehends ähnliche Reſultate. Dieſe Reduction hat daher auch durchaus nichts ſchwieriges, und ſie kann aus dieſem Grunde den eigenen Uebungen überlaſſen bleiben. Statt deſſen ſoll hier gezeigt werden, wie die von der dritten Gleichung abhängenden Formeln, aus den in dem vorigen §. gefundenen Formeln mit Hülfe der Ergänzungsecke, ſich finden laſſen; wobei die bereits einige mal gebrauchte Bezeichnung wieder benutzt werden ſoll, daß, während die drei Seiten des ſphäriſchen Dreiecks ſelbſt mit A, B, C und die Winkel mit a, b, c bezeichnet werden, die Seiten des Ergänzungsdreiecks durch A′, B′, C′ und die Winkel deſſelben durch a′, b′, c′, ausgedrückt werden ſollen, ſo daß alſo die Gleichungen ſtatt finden

$$A + a' = 180^\circ;\quad B + b' = 180^\circ;\quad C + c' = 180^\circ$$
$$a + A' = 180^\circ;\quad b + B' = 180^\circ;\quad c + C' = 180^\circ$$

da ferner $\frac{A + B + C}{2} = H$ geſetzt wurde §. 15., ſo ſoll hier auch ſein

$$\frac{A' + B' + C'}{2} = H' \text{ und } \frac{a + b + c}{2} = h.$$

1. Beſtimmung des Werthes von A.

Nach §. 15. No. 1. iſt

$$\sin \tfrac{1}{2} a = r \sqrt{\frac{\sin (H - B) \sin (H - C)}{\sin B \sin C}}$$

es iſt alſo auch in dem Ergänzungsdreieck

$$\sin \tfrac{1}{2} a' = r \sqrt{\frac{\sin (H' - B') \sin (H' - C')}{\sin B' \sin C'}}.$$

Nun iſt $\frac{1}{2} a' = \frac{1}{2} (180^0 - A) = 90^0 - \frac{1}{2} A$;

$$H' - B' = \frac{A' + C' - B'}{2} = \frac{(180^0 - a) + (180^0 - c) - (180^0 - b)}{2}$$

$$= \frac{180^0 - (a + c - b)}{2} = 90^0 - \frac{a + c - b}{2}$$

$$= 90^0 - (h - b)$$

und eben ſo

$$H' - C' = 90^0 - (h - c).$$

Da nun außerdem iſt

$$B' = 180^0 - b \text{ und } C' = 180^0 - c$$

ſo verwandelt ſich die obige Formel für $\sin \frac{1}{2} a'$, wenn die hier angegebenen Werthe geſetzt werden, in

$$\sin \tfrac{1}{2} a' = \sin (90^0 - \tfrac{1}{2} A) =$$

$$r \sqrt{\left[\frac{\sin [90^0 - (h - b)] \sin [90^0 - (h - c)]}{\sin (180^0 - b) \sin (180^0 - c)}\right]}$$

und hieraus erhält man die Formel für A

$$\cos \tfrac{1}{2} A = r \sqrt{\left[\frac{\cos (h - b) \cos (h - c)}{\sin b \sin c}\right]}.$$

Auf gleiche Weiſe findet man aus der Formel §. 15.

$$\cos \tfrac{1}{2} a = r \sqrt{\frac{\sin H \sin (H - A)}{\sin B \sin C}}$$

wenn man die Werthe durch die Theile des Ergänzungsdreiecks ausdrückt

$$\sin \tfrac{1}{2} A = r \sqrt{\left[\frac{- \cos h \cos (h - a)}{\sin b \sin c}\right]}.$$

Ferner iſt §. 15. No. 1. die Formel gefunden worden

$$\cos a = \frac{r^3 \cos (A + \varphi)}{\sin B \sin C \cos \varphi}$$

$$\text{für } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos B \cos C}{\sin A}.$$

Es iſt alſo auch

$$\cos a' = \frac{r^3 \cos (A' + \varphi)}{\sin B' \sin C' \cos \varphi}$$

$$\text{für } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos B' \cos C'}{\sin A'}$$

und hieraus wird

$$\cos (180^0 - A) = \frac{r^3 \cos (180^0 - a + \varphi)}{\sin (180^0 - b) \sin (180^0 - c) \cos \varphi}.$$

$$\text{für } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos (180^0 - b) \cos (180^0 - c)}{\sin (180^0 - a)}$$

nämlich es iſt

$$\cos A = \frac{r^3 \cos (a - \varphi)}{\sin b \sin c \cos \varphi}$$

$$\text{für } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos b \cos c}{\sin a}.$$

2. Beſtimmung des Werthes von a.

Die Gleichung $\cos A = \dfrac{r^2 \cos a + r \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$

giebt zwar unmittelbar die Formel

$$\cos a = \frac{\cos A \sin b \sin c - r \cos b \cos c}{r^2}$$

es iſt dieſelbe aber für das Rechnen mit Logarithmen nicht brauchbar.

Mit Hülfe der Formel in §. 15. No. 2. läßt ſich eine ſolche auf folgende Art ableiten:

Es iſt $\cos A = \dfrac{\sin (B + \psi) \cos C}{\sin \psi}$

$$\text{für } \operatorname{tg} \psi = \frac{r \cot C}{\cos a}$$

alſo iſt auch

$$\cos A' = \frac{\sin (B' + \psi) \cos C'}{\sin \psi}$$

$$\text{für } \operatorname{tg}\psi = \frac{r \cot C'}{\cos a'}$$

und daher iſt auch

$$\cos(180^\circ - a) = \frac{\sin(180^\circ - b + \psi)\cos(180^\circ - c)}{\sin\psi}$$

$$\text{für } \operatorname{tg}\psi = \frac{r \cot(180^\circ - c)}{\cos(180^\circ - A)}$$

folglich iſt auch

$$\cos a = \frac{\sin(b - \psi)\cos c}{\sin\psi}$$

$$\text{für } \operatorname{tg}\psi = \frac{r \cot c}{\cos A}$$

die Formeln, durch welche a mit Hülfe der Logarithmen berechnet werden kann, wenn b, c und A gegeben ſind.

3. Beſtimmung des Werthes von b.

Da der Ausdruck $\operatorname{tg}\psi = \frac{r \cot c}{\cos A}$ ganz unabhängig iſt von b, ſo läßt ſich der Werth von b unmittelbar durch Reduction aus der Formel ableiten

$$\cos a = \frac{\sin(b - \psi)\cos c}{\sin\psi}.$$

nämlich man erhält hieraus

$$\sin(b - \psi) = \frac{\cos a \sin\psi}{\cos c}$$

$$\text{für } \operatorname{tg}\psi = \frac{r \cot c}{\cos A}.$$

Mittelſt dieſer Formeln findet man alſo ψ und alsdann auch $b - \psi$, wodurch der Werth von b beſtimmt iſt.

§. 17.

Reduction der vierten Gleichung.

Die vierte Gleichung iſt nach §. 10.

$$\cot a \sin b = \cot A \sin C - \cos C \cos b$$

und man kann aus dieſer Gleichung zwar unmittelbar den Werth von a und auch den von A finden, nämlich

$$\cot a = \frac{\cot A \sin C - \cos C \cos b}{\sin b}$$

und $\cot A = \frac{\cot a \sin b + \cos C \cos b}{\sin C}$

beide Formeln aber ſind für das Rechnen mit Logarithmen nicht bequem, und will man den Werth von C oder b beſtimmen, ſo werden die erhaltenen Formeln noch verwickelter, weil von beiden der Sinus und der Coſinus in der Gleichung vorkommt. Durch Einführung eines Hülfswinkels aber laſſen ſich auch aus dieſer Gleichung einfache Ausdrücke ableiten. Alſo

1. Beſtimmung des Werthes von A.

Da die gegebene Gleichung iſt

$$\cot a \sin b = \cot A \sin C - \cos C \cos b$$

ſo folgt $r^2 \sin b = \cot A \sin C \, tg\, a - \cos C \cos b \, tg\, a$

es iſt alſo auch

$$\sin b + \frac{\cos C \, tg\, a}{r^2} . \cos b = \frac{\cot A \sin C \, tg\, a}{r^2}.$$

Setzt man nun $\frac{\cos C \, tg\, a}{r} = tg\, \varphi = \frac{r \sin \varphi}{\cos \varphi}$

und daher $\frac{\cos C \, tg\, a}{r^2} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$

ſo wird $\sin b + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} . \cos b = \frac{\cot A \sin C \, tg\, a}{r^2}$

und daher $\sin b \cos \varphi + \sin \varphi \cos b = \frac{\cot A \sin C \, tg\, a}{r^2} . \cos \varphi$

nämlich es iſt, weil $\cos \varphi = \frac{r^2 \sin \varphi}{\cos C \, tg\, a}$

$$r \sin (b + \varphi) = \frac{\cot A \sin C \sin \varphi}{\cos C}$$

und daher auch $r \sin (b + \varphi) = \frac{r \, tg\, C \sin \varphi}{tg\, A}$

folglich iſt $tg\, A = \frac{tg\, C \sin \varphi}{\sin (b + \varphi)}$

für $tg\, \varphi = \frac{\cos C \, tg\, a}{r}$

der geſuchte Werth für A.

2. Beſtimmung des Werthes von b.

Aus der ſo eben erhaltenen Gleichung folgt unmittelbar

$$\sin(b + \varphi) = \frac{\text{tg } C \sin \varphi}{\text{tg } A}$$

und alſo auch

$$\sin(b + \varphi) = \frac{\cot A \text{ tg } C \sin \varphi}{r^2}$$

wodurch der Werth von b gefunden werden kann, weil φ von dieſer Größe unabhängig iſt.

3. Beſtimmung des Werthes von C.

Reducirt man die Gleichung noch einmal in der Art, daß man C eben ſo berückſichtigt, wie bei der vorigen Reduction b berückſichtigt worden iſt, ſo erhält man für a und C Ausdrücke, welche den für A und b erhaltenen ähnlich ſind.

Nämlich es iſt die Gleichung

$$\cot A \sin C - \cos C \cos b = \cot a \sin b$$

alſo $r^2 \sin C - \cos C \text{ tg } A \cos b = \text{tg } A \cot a \sin b$

und daher iſt

$$\sin C - \cos C . \frac{\text{tg } A \cos b}{r^2} = \frac{\text{tg } A \cot a \sin b}{r^2}.$$

Setzt man nun $\frac{\text{tg } A \cos b}{r} = \text{tg } \psi = \frac{r \sin \psi}{\cos \psi}$

und alſo $\frac{\text{tg } A \cos b}{r^2} = \frac{\sin \psi}{\cos \psi}$

ſo wird $\sin C - \cos C . \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{\text{tg } A \cot a \sin b}{r^2}$

und daher $\sin C \cos \psi - \cos C \sin \psi = \frac{\text{tg} A \cot a \sin b}{r^2} . \cos \psi$

und weil $\cos \psi = \frac{r^2 \sin \psi}{\text{tg } A \cos b}$, ſo iſt

$$r \sin(C - \psi) = \frac{\cot a \sin b \sin \psi}{\cos b}$$

und dieſes giebt die geſuchte Gleichung

$$\sin(C - \psi) = \frac{\cot a \text{ tg } b \sin \psi}{r^2}$$

für $\text{tg } \psi = \frac{\text{tg } A \cos b}{r}$.

4. Beſtimmung des Werthes von a.

Aus der zuletzt gefundenen Gleichung erhält man unmittelbar

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b \sin \psi}{\sin (C - \psi)}.$$

Hierdurch ſind alſo nun die Werthe aller 4 Größen der letzten Gleichung, jede durch die 3 übrigen beſtimmt.

Zuſatz. Die §. 15, 16 und 17. zur Vereinfachung der Formeln vorgenommenen Reductionen beruhen darauf, daß, wenn von einem Bogen der Sinus und der Coſinus in einer Gleichung vorkommt, die Formel durch Einführung eines Hülfswinkels immer vereinfacht werden kann. Denn hat man ganz allgemein die Gleichung

$$a \sin z + b \cos z = c r$$

$$\text{ſo folgt } \sin z + \frac{b}{a} \cos z = \frac{c}{a} \cdot r$$

$$\text{alſo iſt auch, wenn man ſetzt } \frac{b}{a} \cdot r = \operatorname{tg} \varphi$$

$$\text{und daher } \frac{b}{a} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\sin z + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos z = \frac{c}{a} \cdot r$$

$$\text{und } \sin z \cos \varphi + \sin \varphi \cos z = \frac{c}{a} \cdot r \cdot \cos \varphi$$

nämlich es iſt

$$r \sin (z + \varphi) = \frac{c}{a} \cdot r \cdot \cos \varphi$$

$$\text{und folglich } \sin (z + \varphi) = \frac{c \cos \varphi}{a},$$

wodurch ſich nicht nur der Werth von z beſtimmen läßt, ſondern auch der von c, weil φ blos von a und b abhängt.

Iſt in der urſprünglichen Gleichung b negativ, ſo erhält man den Werth von $\sin (z - \varphi)$. Uebrigens kann man auch in der Gleichung

$$\sin z + \frac{b}{a} \cos z = \frac{c}{a} \cdot r$$

$$\text{ſetzen } \frac{b}{a} \cdot r = \cot \psi = \frac{r \cos \psi}{\sin \psi}$$

wodurch erhalten wird

$$\sin z \sin \psi + \cos z \cos \psi = \frac{c}{a} \cdot r \sin \psi$$

und es iſt daher, wenn a und b poſitiv ſind

$$\cos (z - \psi) = \frac{c \sin \psi}{a}$$

und man erhält

$$\pm \cos (z + \psi) = \frac{c \sin \psi}{a}$$

wenn a oder b einen negativen Werth hat.

§. 18.

Von den Neigungswinkeln der Kanten.

Nach §. 13. iſt, wenn man Fig. 12. von der Spitze c auf die gegenüberliegende Seite C die Senkrechte cd = P zieht, dieſe das Maaß des Neigungswinkels der Kante bei c gegen den ebenen Winkel C, und es iſt in allen Fällen

$$r : \sin A = \sin b : \sin P$$

$$\text{alſo } \sin P = \frac{\sin A \sin b}{r}.$$

Wenn daher unter den gegebenen Stücken einer körperlichen Ecke ein, an der Grundfläche C anliegender Neigungswinkel b und der an dieſem anliegende ebene Winkel A ſich befinden, ſo iſt dadurch der Neigungswinkel der, der Grundebene gegenüber liegenden Kante gegen dieſe Ebene, beſtimmt.

Nun ſind B, c, A und b vier nebeneinander liegende Stücke, von welchen jedes aus den drei übrigen, mittelſt der Formeln §. 17., gefunden werden kann; alſo kann man auch b finden, wenn B, c und A gegeben ſind, durch b und A aber iſt der Werth von P beſtimmt, folglich läßt ſich der Neigungswinkel einer Kante auch berechnen, wenn man die beiden anliegenden ebenen Winkel kennt und den von denſelben eingeſchloſſenen Neigungswinkel. Auf gleiche Weiſe iſt es auch möglich, den Werth von P zu berechnen, wenn die Grundebene C und die anliegenden Winkel a und b gegeben ſind, denn man braucht zu dieſer Abſicht nur den Werth von A zu ſuchen und alsdann den von P durch A und b. Eben

ſo kann man mittelbar P auch alsdann finden, wenn die gegebenen Stücke ſind A, C und c oder b, C und c ꝛc.

Sind von einer körperlichen Ecke aber die drei ebenen Winkel oder alle Neigungswinkel gegeben, ſo kann man den Neigungswinkel der Kante unmittelbar aus dieſen Stücken finden, wie aus folgendem ſich ergiebt:

Es iſt nach §. 15.

$$\sin \tfrac{1}{2} a = r \sqrt{\frac{\sin (H - B) \sin (H - C)}{\sin B \sin C}}$$

$$\text{und } \cos \tfrac{1}{2} a = r \sqrt{\frac{\sin H \sin (H - A)}{\sin B \sin C}},$$

$$\text{folglich iſt auch } \sin a = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}{r} =$$

$$\frac{2 r \sqrt{\sin H \sin (H - A) \sin (H - B) \sin (H - C)}}{\sin B \sin C}$$

$$\text{da nun } \sin P = \frac{\sin B \sin a}{r} \text{ ſo iſt auch}$$

$$\sin P = \frac{2 \sqrt{\sin H \sin (H - A) \sin (H - B) \sin (H - C)}}{\sin C}$$

die Formel, durch welche aus den drei ebenen Winkeln einer körperlichen Ecke, der Neigungswinkel der Kante gegen C, ſich berechnen läßt.

Nach §. 16. iſt ferner

$$\cos \tfrac{1}{2} A = r \sqrt{\frac{\cos (h - b) \cos (h - c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\text{und } \sin \tfrac{1}{2} A = r \sqrt{\frac{- \cos h \cos (h - c)}{\sin b \sin c}}$$

es iſt alſo auch

$$\sin A = \frac{2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A}{r} =$$

$$\frac{2 r \sqrt{[- \cos h \cos (h - a) \cos (h - b) \cos (h - c)]}}{\sin b \sin c}$$

$$\text{da nun } \sin P = \frac{\sin A \sin b}{r}$$

ſo folgt, daß $\sin P =$

$$\frac{2 \sqrt{[- \cos h \cos (h - a) \cos (h - b) \cos (h - c)]}}{\sin c}$$

eine Formel, woraus ſich ergiebt, wie der Werth des Nei=

gungswinkels der Kante gegen C, aus den drei gegebenen Neigungswinkeln der Ecke ſich berechnen laſſen.

Zuſatz. In dem rechtwinkligen Dreieck cbd Fig. 12. hängen bekanntlich die drei Seiten A, P und α ſo von einander ab, daß die Proportion ſtatt findet

$$r : \cos \alpha = \cos P : \cos A$$

und es iſt daher $\cos \alpha = \frac{r \cos A}{\cos P}$.

Da nun in jedem Falle, wenn durch 3 gegebene Stücke eines ſphäriſchen Dreiecks dieſes beſtimmt iſt, daraus der Werth von P gefunden werden kann, ſo iſt es auch immer möglich, den Werth von α zu finden. Man iſt alſo immer im Stande, die Abſchnitte α und β zu berechnen, in welche die Grundlinie C durch die Senkrechte P getheilt wird, oder was daſſelbe iſt, man kann von jedem dreikantigen körperlichen Winkel beſtimmen, wie der Winkel der Grundebene von der Vertikalebene getheilt wird, welche durch die gegenüber liegende Kante auf die Grundebene gelegt werden kann. Eben ſo laſſen ſich auch die Winkel berechnen, in welche c durch P getheilt wird.

§. 19.

Uebungen.

1. Es iſt §. 8. die Gleichung gefunden worden

$$\cos a = \frac{r^2 \cos A - r \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

und hieraus ſind §. 15. die Werthe der einzelnen Stücke durch die übrigen dadurch angegeben, daß ein Hülfswinkel eingeführt wurde. Ohne einen ſolchen zu benutzen, kann man auch unmittelbar Formeln für die einzelnen Stücke aus dieſer Gleichung ableiten, und es ſind die für a und A bereits §. 15. in No. 1 und 2. angeführt. Soll B oder C beſtimmt werden, ſo iſt die Reduction ſchwieriger, weil von dieſen Größen der Sinus und der Coſinus in der Gleichung vorkommt. Man findet übrigens nach gehöriger Reduction

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos a \sin B \pm \sqrt{[r^2 \sin^2 A - \sin^2 a \sin^2 B]}}{\cos A + \cos B}$$

und es iſt, weil in der gegebenen Gleichung B und C ganz

in derſelben Beziehung vorkommen, nun auch, wenn man B mit C verwechſelt

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \frac{\cos a \sin C \pm \sqrt{[r^2 \sin^2 A - \sin^2 a \sin^2 C]}}{\cos A + \cos C}$$

Wie wird dieſe Formel aus der gegebenen Gleichung abgeleitet?

2. Es iſt bereits §. 6. No. 5. angeführt worden, daß, wenn unter den drei gegebenen Stücken einer körperlichen Ecke zwei einander gegenüber liegende ſich befinden, die Aufgabe unbeſtimmt iſt, oder auch wohl einen Widerſpruch in ſich ſelbſt enthält. Beides läßt ſich aus der in No. 1. angegebenen Formel für $\operatorname{tg} \frac{1}{2} C$ erkennen, wo A, B und a die gegebenen Stücke ſind. Die Aufgabe iſt unbeſtimmt, weil vor der Wurzelgröße ein doppeltes Zeichen ſich befindet, und ſie enthält immer einen Widerſpruch, wenn die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ iſt, wenn alſo die Bedingung ſtatt findet

$$r \sin A < \sin a \sin B.$$

Iſt aber $r \sin A = \sin a \sin B$
ſo findet die Proportion ſtatt

$$r : \sin B = \sin a : \sin A.$$

Es iſt aber bei einem jeden rechtwinklig ſphäriſchen Dreieck

$$r : \sin H = \sin a : \sin A$$

folglich iſt das Dreieck in dieſem Falle rechtwinklig, und es iſt B die Hypotenuſe und C die zweite Kathete deſſelben. Die Formel in No. 1. verwandelt ſich für dieſen Fall in

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos a \sin H}{\cos A + \cos H} \text{ und es iſt } \sin H = \frac{r \sin A}{\sin a}.$$

Nach §. 11. No. V. iſt aber, wenn man dort C ſtatt B ſetzt

$$\sin C = \frac{r \operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} a}.$$

Wie läßt ſich nun auf dieſen Ausdruck die obige Formel für $\operatorname{tg} \frac{1}{2} C$ zurückführen? Es ſoll alſo gezeigt werden, daß aus den beiden Gleichungen

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos a \sin H}{\cos A + \cos H} \text{ und } \sin H = \frac{r \sin A}{\sin a}$$

folgen muß, $\sin C = \frac{r \operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} a}$.

3. In §. 15. No. 3. wird der Werth von B aus A, C und a gefunden durch die Formeln

$$\sin(B + \psi) = \frac{\cos A \sin \psi}{\cos C}$$

$$\text{für } \operatorname{tg} \psi = \frac{r \cot C}{\cos a}$$

da nun wie bereits in No. 2. angeführt worden iſt, wenn A, C und a gegeben ſind, die Aufgabe unbeſtimmt iſt, oder auch einen Widerſpruch enthalten kann, ſo iſt anzugeben:

α. In wiefern geben dieſe beide Formeln den Widerſpruch an, wenn die Aufgabe einen ſolchen enthält?

β. Wie werden aus dieſen Formeln zwei verſchiedene Werthe für B erhalten, wenn die Aufgabe möglich iſt?

γ. Wie findet man aus dieſen Formeln die entſprechende Formel für das rechtwinklige Dreieck, wenn C = H als die Hypotenuſe deſſelben angenommen wird?

4. Nach No. 2. iſt für das Ergänzungsdreieck

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C' = \frac{\cos a' \sin B' \pm \sqrt{[r^2 \sin^2 A' - \sin^2 a' \sin^2 B']}}{\cos A' + \cos B'}$$

es iſt alſo auch

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (180^0 - c) = \Big(\cos(180^0 - A) \sin(180^0 - b) \pm$$
$$\sqrt{[r^2 \sin^2(180^0 - a) - \sin^2(180^0 - A) \sin^2(180^0 - b)]}\Big):$$
$$\Big(\cos(180^0 - a) + \cos(180^0 - b)\Big)$$

und dieſes giebt

$$\operatorname{tg} (90^0 - \tfrac{1}{2} c) = \frac{-\cos A \sin b \pm \sqrt{[r^2 \sin^2 a - \sin^2 A \sin^2 b]}}{-\cos a - \cos b}$$

folglich iſt

$$\cot \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos A \sin b \pm \sqrt{[r^2 \sin^2 a - \sin^2 A \sin^2 b]}}{\cos a + \cos b}$$

eine directe Formel zur Ermittelung von c, wenn A, a und b gegeben ſind. Wie läßt ſich dieſe Formel aus der Gleichung §. 9., nach welcher iſt

$$\cos A = \frac{r^2 \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

durch unmittelbare Reduction ableiten?

5. Aus dem No. 4. angegebenen Werthe von cot $\frac{1}{2}$ c findet man durch Umformung

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\,c = \frac{\cos A \sin b \pm \sqrt{[r^2 \sin^2 a - \sin^2 A \sin^2 b]}}{\cos a - \cos b}$$

Wie wird dieſer Werth aus dem Obigen abgeleitet?

6. Die Formeln in No. 4 und 5. führen beide zu zwei verſchiedenen Werthen von c, weil die Aufgabe unbeſtimmt iſt, wenn A, a und b gegeben ſind, und es enthalten dieſe Formeln einen Widerſpruch, ſobald

$$r \sin a < \sin A \sin b$$

wird; es iſt nämlich in dieſem Falle kein Dreieck möglich, welches die gegebenen Stücke enthält. Nun iſt nach §. 16. No. 3

$$\sin(c - \psi) = \frac{\cos a \sin \psi}{\cos b}$$

$$\text{für tg}\,\psi = \frac{r \cot b}{\cos A}.$$

Wie wird das Unbeſtimmte der Aufgabe, oder auch der Widerſpruch, den dieſelbe enthält, durch dieſe Formeln angedeutet?

7. Wenn man in der Formel No. 5. ſetzt

$$r \sin a = \sin A \sin b$$

ſo wird dieſelbe

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\,c = \frac{\cos A \sin b}{\cos a - \cos b}.$$

Die Gleichung $r \sin a = \sin A \sin b$ führt aber zu der Proportion

$$r : \sin b = \sin A : \sin a$$

$$\text{oder } \sin 90^0 : \sin b = \sin A : \sin a;$$

die dem Winkel b gegenüber liegende Seite iſt alſo $= 90^0$, und es iſt daher das Dreieck ein ſolches, in welchem die eine Seite ein Quadrant iſt, und wo man nun den Winkel, welcher dem Quadranten gegenüber liegt, mit h bezeichnet; ſo daß alſo die Gleichung für dieſen Fall wird

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\,c = \frac{\cos A \sin h}{\cos a - \cos h}.$$

Es iſt aber für dieſen Fall

$$\sin c = \frac{r\,\text{tg}\,a}{\text{tg}\,A}.$$

Wie läßt ſich nun die eine dieſer Formeln auf die andere zu-

rückführen, oder was daſſelbe iſt, wie findet man aus den beiden Gleichungen

$$r \sin a = \sin A \sin h \text{ und } tg\, \tfrac{1}{2}\, c = \frac{\cos A \sin h}{\cos a - \cos h}$$

$$\text{die Formel } \sin c = \frac{r\, tg\, a}{tg\, A}?$$

8. Es iſt §. 10. die Gleichung gefunden worden

$$\cot a \sin b = \sin C \cot A - \cos C \cos b$$

aus welcher ſich unmittelbar berechnen läßt der Werth von A und der von a, dagegen iſt die Reduction ſchwierig, wenn C oder b die geſuchte Größe iſt. Für die bequeme Berechnung ſind einfache Formeln, durch einen Hülfswinkel gefunden, §. 17. No. 2 und 3. angegeben. Es laſſen ſich die Werthe dieſer Größen aber auch unmittelbar beſtimmen, und man findet nach gehöriger Reduction

$$tg\, \tfrac{1}{2}\, b = \frac{r \sin A \cos a \pm r \sqrt{[r^2 \sin^2 A - \sin^2 C \sin^2 a]}}{\sin (A + C) \sin a}$$

$$\text{und } tg\, \tfrac{1}{2}\, C = \frac{r \cos A \sin a \pm r \sqrt{[r^2 \sin^2 a - \sin^2 b \sin^2 A]}}{\sin A \sin (b - a)}$$

Es ſoll angegeben werden, wie die Reduction mit der obigen Gleichung vorgenommen worden iſt, um dieſe Formeln zu erhalten.

9. Die No. 8. angegebenen beiden Formeln führen jede zu zwei verſchiedenen Werthen der geſuchten Größe, wenn die Aufgabe keinen Widerſpruch enthält, und iſt dieſes der Fall, ſo läßt es ſich ſogleich durch den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen erkennen. Wie laſſen ſich dieſe Umſtände aus den §. 17. No. 2 und 3. angegebenen Formeln für dieſe Größen beurtheilen?

10. Die in No. 1, 4 und 8. angegebenen vier directen Formeln ſind ſämmtlich von der Art, daß ſie, wenn nicht in einem beſondern Falle die Größe unter dem Wurzelzeichen = 0 iſt, entweder zu einem doppelten Werthe des Geſuchten oder zu einem Widerſpruche führen. Die Gleichungen, aus welchen dieſe Formeln abgeleitet ſind, gehören ſämmtlich in Beziehung auf die unbekannte Größe = z zu der Form

$$a \sin z + b \cos z = cr$$

und es kommen allgemein, allen zu dieſer Gleichung führenden Aufgaben, die genannten Beſchränkungen zu. Daher entſteht die Frage: wie müſſen die Coefficienten a, b und c in dieſer Gleichung von einander abhängen, wenn z einen reellen Werth erhalten ſoll, und bei welcher Abhängigkeit dieſer Größen von einander giebt es für z nur einen einzigen Werth?

11. Vergleicht man die Gleichung

$$a \sin z + b \cos z = cr$$

mit der in No. 1. angeführten, nämlich mit

$$\sin C \cos a \sin B + r \cos C \cos B = r^2 \cos A$$

ſo iſt, wenn hier B als die unbekannte Größe angeſehen wird

$$a = \sin C \cos a;\ b = r \cos C \text{ und } c = r \cos A,$$

und eben ſo läßt ſich die Gleichung

$$a \sin z + b \cos z = cr$$

auch mit den in No. 4 und 8. behandelten Gleichungen vergleichen. Es ſoll dieſe Gleichung ſo reducirt werden, daß man eine Formel erhält, aus welcher unmittelbar die No. 1, 4 und 8 angegebenen erhalten werden, wenn man für die Coefficienten a, b und c die erforderlichen Werthe ſubſtituirt.

12. Um den Forderungen der vorigen Aufgabe zu entſprechen, muß die Gleichung

$$a \sin z + b \cos z = cr$$

ſo reducirt werden, daß man dadurch erhält den Werth von $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}z$. Die Gleichung läßt ſich aber auch, wenn man $\sqrt{(r^2 - \sin^2 z)}$ ſtatt cos z ſetzt, ſo reduciren, daß man dadurch den Werth von sin z kennen lernt. Wie findet man nun aus dieſem, den von $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}z$, wie er zu dem in No. 11. angegebenen Zwecke gebraucht wird, und umgekehrt?

§. 20.

Ueberſicht der ſämmtlichen Formeln der ſphäriſchen Trigonometrie.

I. Formeln für das rechtwinklige ſphäriſche Dreieck.

In einem jeden rechtwinkligen ſphäriſchen Dreiecke wird die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite, alſo die Hypotenuſe mit H bezeichnet, die beiden übrigen Seiten, welche die Katheten bilden, mit A und B, und die denſelben

gegenüber liegenden Winkel, mit a und b. Dieſelbe Bezeichnung gilt alſo auch für jede körperliche Ecke, in welcher ein Neigungswinkel von 90° vorkommt.

Die einzelnen Theile eines ſolchen Dreiecks hängen nun durch folgende Proportionen von einander ab:

Für die Größen	findet die Proportion ſtatt	nach
1. H, A, B	r : cos A = cos B : cos H	§. 11. No. II.
2. H, A, a oder H, B, b	r : sin H = sin a : sin A r : sin H = sin b : sin B	= = I.
3. H, A, b oder H, B, a	r : cos b = tg H : tg A r : cos a = tg H : tg B	= = VI.
4. A, B, a oder A, B, b	r : sin B = tg a : tg A r : sin A = tg b : tg B	= = V.
5. H, a, b	r : cot a = cot b : cos H	= = III.
6. A, a, b oder B, a, b	r : sin b = cos A : cos a r : sin a = cos B : cos b	= = IV.

Dieſe ſechs Proportionen ſind hinreichend, um jede in Beziehung auf rechtwinklige ſphäriſche Dreiecke vorkommende Aufgabe zu löſen, und es laſſen ſich mit Hülfe dieſer Proportionen auch die Aufgaben löſen, welche bei Dreiecken vorkommen, in welchen eine Seite ein Quadrant iſt, oder was daſſelbe iſt, bei körperlichen Ecken, in welchen der eine ebene Winkel 90° hält, weil die zu einer ſolchen Ecke gehörige Ergänzungsecke einen Neigungswinkel von 90° haben muß. Nur darf man, wenn die Formeln auf dieſe Weiſe benutzt werden, nicht außer Acht laſſen, daß die einzelnen Stücke einer ſolchen Ecke die entſprechenden der Ergänzungsecke zu 180° ergänzen, was vorzüglich bei der Beurtheilung Einfluß hat, ob das erhaltene Reſultat kleiner oder größer als 90° genommen werden muß.

II. Formeln für das ſphäriſche Dreieck oder für die körperliche Ecke überhaupt.

Bei einem jeden ſphäriſchen Dreiecke überhaupt bezeichnet man die drei Seiten mit A, B, C, und die gegenüber liegenden Winkel mit a, b, c, und falls die Formeln auf eine körperliche Ecke bezogen werden, ſo bezeichnen A, B, C die ebenen Winkel und a, b, c die denſelben gegenüber liegenden Neigungswinkel.

Gegeben.	Geſucht.	Formeln.	Subſtitution.	nach
1. A, B, C	a	1. $\cos a = \frac{r^2 \cos A - r \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$	. . . . .	§. 8.
		2. $\sin \frac{1}{2} a = r \sqrt{\frac{\sin (H-B) \sin (H-C)}{\sin B \sin C}}$	$H = \frac{A+B+C}{2}$	§. 15. N. 1.
		3. $\cos \frac{1}{2} a = r \sqrt{\frac{\sin H \sin (H-A)}{\sin B \sin C}}$	⸗	⸗
		4. $\cos a = \frac{r^3 \cos (A + \varphi)}{\sin B \sin C \cos \varphi}$	$tg\, \varphi = \frac{\cos B \cos C}{\sin A}$	⸗
		Anmerkung. Soll der Werth von b berechnet werden, ſo braucht man in dieſen Formeln nur B mit A zu verwechſeln, und eben ſo wird C mit A verwechſelt, wenn man den Werth von c berechnen will.		
2. B, C, a	A	1. $\cos A = \frac{\sin B \sin C \cos a + r \cos B \cos C}{r^2}$	. . . .	§. 8.
		2. $\cos A = \frac{\sin (B + \psi) \cos C}{\sin \psi}$	$tg\, \psi = \frac{r \cot C}{\cos a}$	§. 15. N. 2.
		Dieſes ſind überhaupt die Formeln zur Berechnung der dritten Seite, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeſchloſſene Winkel gegeben ſind.		
3. B, C, a	b	1. $\cot b = \frac{\sin C \cot B - \cos C \cos a}{\sin a}$	. . . .	§. 10.
		2. $tg\, b = \frac{tg\, a \sin \psi}{\sin (C - \psi)}$	$tg\, \psi = \frac{tg\, B \cos a}{r}$	§. 17. N. 4.
		Die §. 17. No. 4. angegebene Formel enthält den Werth von tg a, und es ſind die Größen A, C und b gegeben. Aus der dortigen wird die hier angegebene Formel erhalten, wenn man a mit b und A mit B verwechſelt. Soll aus B, C und a der Werth von c geſucht werden, ſo muß man in der hier angegebenen Formel B mit C verwechſeln.		

Gegeben.	Geſucht.	Formeln.	Subſtitution.	nach
4. A, C, a	B	1. $\sin(B+\psi) = \frac{\cos A \sin\psi}{\cos C}$	$tg\,\psi = \frac{r \cot C}{\cos a}$	§.15.N.3.
		2. $tg\,\frac{1}{2}B = \frac{\cos a \sin C \pm \sqrt{[r^2 \sin^2 A - \sin^2 a \sin^2 C]}}{\cos A + \cos C}$	. . . .	§.19.N.1.
		Mittelſt dieſer Formeln wird die dritte Seite gefunden, wenn zwei Seiten gegeben ſind und ein Winkel, welcher der einen dieſer Seiten gegenüber liegt.		
5. A, C, a	c	$\sin c = \frac{\sin C \sin a}{\sin A}$	. . . .	§. 7.
6. A, C, a	b	1. $\sin(b+\varphi) = \frac{\cot A\ tg\,C \sin\varphi}{r^2}$	$tg\,\varphi = \frac{\cos C\,tg\,a}{r}$	§.17.N.2.
		2. $tg\,\frac{1}{2}b = \frac{r \sin A \cos a \pm r\sqrt{[r^2 \sin^2 A - \sin^2 C \sin^2 a]}}{\sin(A+C)\sin a}$	. . . .	§.19.N.8.
7. A, b, c	a	1. $\cos a = \frac{\cos A \sin c \sin b + r \cos b \cos c}{r^2}$	. . . .	§.16.N.2.
		2. $\cos a = \frac{\sin(b-\psi)\cos c}{\sin\psi}$	$tg\,\psi = \frac{r \cot c}{\cos A}$	⸗
8. C, a, b was daſſelbe iſt, als wenn A, b, c gegeben ſind und es wird C ſtatt A geſucht.	A	1. $\cot A = \frac{\cot a \sin b + \cos C \cos b}{\sin C}$	. . . .	§. 17.
		2. $tg\,A = \frac{tg\,C \sin\varphi}{\sin(b+\varphi)}$	$tg\,\varphi = \frac{\cos c\,tg\,a}{r}$	§.17.N.1.
		Die No. 7 und 8. angegebenen Formeln dienen dazu, die fehlenden Stücke zu finden, wenn zwei Winkel und die von denſelben eingeſchloſſene Seite gegeben ſind.		
9. A, a, b	B	$\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}$	. . . .	§. 7.
10. A, a, b	C	1. $\sin(C-\psi) = \frac{\cot a\ tg\,b \sin\psi}{r^2}$	$tg\,\psi = \frac{tg\,A \cos b}{r}$	§.17.N.3.
		2. $tg\,\frac{1}{2}C = \frac{r \cos A \sin a \pm r\sqrt{[r^2 \sin^2 a - \sin^2 b \sin^2 A]}}{\sin A \sin(b-a)}$	. . . .	§.19.N.3.

Gegeben.	Geſucht.	Formeln.	Subſtitution.	nach
11. A, a, b	c	1. $\sin(c - \psi) = \frac{\cos a \sin \psi}{\cos b}$	$\operatorname{tg} \psi = \frac{r \cot b}{\cos A}$	§. 16. N. 3.
		2. $\cot \frac{1}{2} c = \frac{\cos A \sin b \pm \sqrt{[r^2 \sin^2 a - \sin^2 A \sin^2 b]}}{\cos a + \cos b}$	. . . .	§. 19. N. 4
		Die drei Formeln 9, 10 und 11. werden in den Fällen gebraucht, wenn aus zwei gegebenen Winkeln und einer Seite, die dem einen dieſer Winkel gegenüber liegt, eines der übrigen Stücke des Dreiecks berechnet werden ſoll.		
12. a, b, c	A	1. $\cos A = \frac{r^2 \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$	. . . .	§. 9.
		2. $\cos \frac{1}{2} A = r \sqrt{\left[\frac{\cos(h-b)\cos(h-c)}{\sin b \sin c}\right]}$	$h = \frac{a+b+c}{2}$	§. 16. N. 1.
		3. $\sin \frac{1}{2} A = r \sqrt{\left[\frac{-\cos h \cos(h-a)}{\sin b \sin c}\right]}$	„	„
		4. $\cos A = \frac{r^3 \cos(a + \varphi)}{\sin b \sin c \cos \varphi}$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos b \cos c}{\sin a}$	„
		Jede dieſer vier Formeln führt zu dem geſuchten Reſultat, wenn aus den drei Winkeln eines ſphäriſchen Dreiecks eine Seite gefunden werden ſoll, oder was daſſelbe iſt, wenn man aus den drei Neigungswinkeln einer dreikantigen Ecke einen der ebenen Winkel derſelben ſuchen ſoll.		

Daß die in dieſer Tabelle angegebenen Formeln hinreichen, um in jedem Falle, wenn drei Stücke eines ſphäriſchen Dreiecks oder einer körperlichen Ecke gegeben ſind, die fehlenden durch Rechnung zu beſtimmen, wenn anders die Aufgabe keinen Widerſpruch enthält, iſt bereits §. 14. gezeigt worden.

III. Formeln für den Neigungswinkel einer Kante gegen den gegenüber liegenden ebenen Winkel.

Bezeichnet man durch γ den Neigungswinkel der von den ebenen Winkeln A und B gebildeten Kante, gegen C, ſo läßt

ſich der Werth von γ in allen Fällen durch eine der folgenden drei Formeln beſtimmen, wie §. 18. gezeigt worden iſt.

1. $\sin\gamma = \frac{\sin A \sin b}{r} = \frac{\sin B \sin a}{r}$

und es iſt eben ſo, wenn α den Neigungswinkel der Kante gegen A und β den gegen B bedeutet

$$\sin\alpha = \frac{\sin B \sin c}{r} = \frac{\sin C \sin b}{r}$$

$$\sin\beta = \frac{\sin A \sin c}{r} = \frac{\sin C \sin a}{r}$$

2. $\sin\gamma = \frac{2\sqrt{\sin H \sin(H-A) \sin(H-B) \sin(H-C)}}{\sin C}$

Wird bei dieſer Formel sin A ſtatt sin C im Nenner geſetzt, ſo erhält man den Werth von $\sin\alpha$, und es wird der von $\sin\beta$ erhalten, wenn man sin B für sin C ſetzt.

3. $\sin\gamma = \frac{2\sqrt{-\cos h \cos(h-a) \cos(h-b) \cos(h-c)}}{\sin c}$

Auch hier erhält man den Werth von $\sin\alpha$, wenn sin a für sin c geſetzt wird, und wenn man sin b für sin c ſetzt, ſo wird der Werth von $\sin\beta$ durch dieſe Formel ausgedrückt.

§. 21.

Beiſpiele als Normen für das Rechnen nach den obigen Formeln.

1. In einem rechtwinkligen ſphäriſchen Dreiecke iſt die eine Kathete = 108° 28′ und der anliegende Winkel = 83° 27′; es ſollen die übrigen Stücke deſſelben berechnet werden.

Hier iſt gegeben A = 108° 28′ und b = 83° 27′, und es iſt nach §. 20. I.

No. 3. $r : \cos b = \operatorname{tg} H : \operatorname{tg} A$, alſo $\operatorname{tg} H = \frac{r \operatorname{tg} A}{\cos b}$

No. 4. $r : \sin A = \operatorname{tg} b : \operatorname{tg} B$, „ $\operatorname{tg} B = \frac{\sin A \operatorname{tg} b}{r}$

No. 6. $r : \sin b = \cos A : \cos a$, „ $\cos a = \frac{\sin b \cos A}{r}$

$$\text{Nun iſt } \log r = 10{,}0000000$$
$$\log tg\, A = \log tg\, 71^\circ\, 32' = 10{,}4763205$$
$$20{,}4763205$$
$$\log \cos b = \log \cos 83^\circ\, 27' = 9{,}0571723$$
$$\text{alſo } \log tg\, H = 11{,}4191482$$

wozu in den Tafeln ein Bogen gefunden wird von 87° 49′ 7″; es iſt aber $H > 90^\circ$, weil die Formel den negativen Faktor $tg\, A$ erhält, und es iſt daher $H = 92^\circ\, 10'\, 53''$.

$$\text{Ferner iſt } \log \sin A = 9{,}9770410.$$
$$\log tg\, b = 10{,}9399836$$
$$20{,}9170246$$
$$\log r = 10{,}0000000$$
$$\text{alſo } \log tg\, B = 10{,}9170246$$
$$\text{und es iſt ſonach } B = 83^\circ\, 5'\, 52''.$$
$$\text{Endlich iſt } \log \sin b = 9{,}9971559$$
$$\log \cos A = 9{,}5007206$$
$$19{,}4978765$$
$$\log r = 10{,}0000000$$
$$\text{bleibt } \log \cos a = 9{,}4978765$$

Hierzu findet man in den Tafeln einen Winkel von 71° 39′ 29″; es iſt aber $a > 90^\circ$, weil $A > 90^\circ$, und daher iſt $a = 108^\circ\, 20'\, 31''$.

2. In einem ſphäriſchen Dreiecke, deſſen eine Seite ein Quadrant iſt, ſind die beiden übrigen Seiten 58° 27′ und 72° 12′. Wie groß ſind die übrigen Stücke dieſes Dreiecks?

Bezeichnet man in einem ſolchen Dreieck die beiden übrigen Seiten mit A', B'; die denſelben gegenüber liegenden Winkel mit a', b', und den Winkel, welcher dem Quadranten gegenüber liegt mit h, ſo iſt hier gegeben

$$A' = 58^\circ\, 27' \text{ und } B' = 72^\circ\, 12'$$

alſo iſt in dem dazu gehörigen Ergänzungsdreieck

$$a = 121^\circ\, 33' \text{ und } b = 107^\circ\, 48',$$

und es iſt nach §. 20. I.

No. 5. $r : \cot a = \cot b : \cos H$, alſo $\cos H = \dfrac{\cot a \cot b}{r}$

No. 6. $r : \sin b = \cos A : \cos a$, ” $\cos A = \dfrac{r \cos a}{\sin b}$

No. 6. $r : \sin a = \cos B : \cos b$, alſo $\cos B = \frac{r \cos b}{\sin a}$.

Nun iſt $\log \cot a = \log \cot 58^\circ\ 27' = \ \ 9{,}7881696$
$\log \cot b = \log \cot 72^\circ\ 12' = \ \ 9{,}5065928$
$19{,}2947624$
$\log r = 10{,}0000000$
alſo $\log \cos H = \ \ 9{,}2947624$

und es iſt $H < 90^\circ$, weil die Factoren cot a und cot b beide negativ ſind. Daher iſt $H = 78^\circ\ 37'\ 50''$, und weil $H + h = 180^\circ$, ſo iſt $h = 101^\circ\ 22'\ 10''$.

Ferner iſt $\log r \cos a = 19{,}7187030$
$\log \sin b = \ \ 9{,}9786960$
folglich $\log \cos A = \ \ 9{,}7400070$

hierzu findet man in den Tafeln einen Bogen von $56^\circ\ 39'\ 50''$; es iſt aber $A > 90^\circ$, weil die Formel den negativen Factor cos a enthält, folglich iſt $a' < 90^\circ$, und es iſt ſonach $a' = 56^\circ\ 39'\ 50''$.

Endlich iſt $\log r \cos b = 19{,}4852888$
$\log \sin a = \ \ 9{,}9305333$
alſo $\log \cos B = \ \ 9{,}5547555$

wozu in den Tafeln gefunden wird $68^\circ\ 58'\ 42''$; und weil $B > 90^\circ$, ſo iſt $b' < 90^\circ$, es iſt alſo $b' = 68^\circ\ 58'\ 42''$.

3. Von einer körperlichen Ecke, in welcher ein Neigungswinkel ein rechter iſt, hält der demſelben gegenüber liegende ebene Winkel $113^\circ\ 24'$, und einer der beiden übrigen ebenen Winkel iſt $= 58^\circ\ 12'$; es ſoll hieraus die Größe des dritten ebenen Winkels dieſer Ecke berechnet werden und der Neigungswinkel der Kante des rechten Winkels zu der gegenüber liegenden Ebene.

Es iſt hier $H = 113^\circ\ 24'$ und $A = 58^\circ\ 12'$, und man findet hieraus B nach §. 20. I. No. 1 durch die Proportion

$$r : \cos A = \cos B : \cos H, \text{ alſo } \cos B = \frac{r \cos H}{\cos A}$$

Nun iſt $\log r \cos H = \log r \cos 66^\circ\ 36' = 19{,}5989523$
$\log \cos A = \log \cos 58^\circ\ 12' = \ \ 9{,}7217742$
alſo iſt $\log \cos B = \ \ 9{,}8771781$

wozu in den Tafeln gefunden wird $41^\circ\ 5'\ 28''$; es iſt aber

$B > 90^\circ$, weil die Formel den negativen Factor cos H enthält, und daher iſt $B = 138^\circ\ 54'\ 32''$.

Da nun von der körperlichen Ecke die drei ebenen Winkel bekannt ſind, ſo kann jetzt, wenn man die halbe Summe derſelben mit H bezeichnet, und für die Hypotenuſe das allgemeine Zeichen der dritten Seite, alſo C einführt, der Werth des Neigungswinkels γ durch die Formel §. 20. III. No. 2., nämlich

$$\sin\gamma = \frac{2\sqrt{\sin H \sin(H - A) \sin(H - B) \sin(H - C)}}{\sin C}$$

berechnet werden. Weil aber die Kante einen rechten Winkel hat, ſo läßt ſich der Werth von γ durch eine einfachere Formel ausdrücken. Nämlich es iſt nach §. 20. No. 1.

$$\sin\gamma = \frac{\sin A \sin b}{r}$$

und nach I. No. 2. iſt

$$r : \sin H = \sin b : \sin B$$

$$\text{alſo } \sin b = \frac{r \sin B}{\sin H}$$

Setzt man dieſen Werth in der Formel

$$\sin\gamma = \frac{\sin A \sin b}{r}$$

$$\text{ſo wird dieſelbe } \sin\gamma = \frac{\sin A \sin B}{\sin H}.$$

$$\begin{aligned} \text{Nun iſt } \log\sin A = \log\sin 58^\circ\ 12' &= 9{,}9293641 \\ \log\sin B = \log\sin 41^\circ\ 5'\ 28'' &= 9{,}8177361 \\ &\overline{19{,}7471002} \\ \log\sin H = \log\sin 66^\circ\ 36' &= 9{,}9627266 \\ \text{es iſt alſo } \log\sin\gamma &= \overline{9{,}7843736} \end{aligned}$$

und daher der Neigungswinkel γ der Kante des rechten Winkels gegen die Hypotenuſe $= 37^\circ\ 29'\ 34''$.

4. Die drei ebenen Winkel einer körperlichen Ecke halten $78^\circ\ 28'$, $63^\circ\ 36'$ und $115^\circ\ 56'$. Wie groß iſt der Neigungswinkel, welcher dem größten dieſer ebenen Winkel gegenüberliegt?

Setzt man hier $A = 115^\circ\ 56'$; $B = 78^\circ\ 28'$ und $C = 63^\circ\ 36'$, ſo wird a geſucht, und benutzt man nun die Formel §. 20. II. No. 1.

$$\cos a = \frac{r^2 \cos A - r \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

$$= \frac{r^2 \cos A}{\sin B \sin C} + \frac{r \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

$$= r\left[\frac{r \cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cot B \cot C}{r^2}\right]$$

ſo ſteht die Rechnung wie folgt: Es iſt

$$\log r \cos A = \log r \cos 64^0\ 4' = 19{,}6408044$$

$\log \sin B = 9{,}9911412$

$\log \sin C = 9{,}9521683$

$$19{,}9433095$$

Es iſt alſo $\log \frac{r \cos A}{\sin B \sin C} = 0{,}6974949 - 1$

und weil in dieſem Ausdrucke der Factor $\cos A$ negativ iſt, ſo hat die zu dem hier gefundenen Logarithmen gehörige Zahl einen negativen Werth, und es iſt derſelbe $= - 0{,}498305$.

Ferner iſt $\log \cot B = 9{,}3097541$

$\log \cot C = 9{,}6958355$

$19{,}0055896$

$\log r^2 = 20{,}0000000$

alſo $\log \frac{\cot B \cot C}{r^2} = 0{,}0055896 - 1$

und es iſt der Werth der zu dieſem Logarithmen gehörigen Zahl $= 0{,}101295$.

Da nun $\frac{r \cos A}{\sin B \sin C} = - 0{,}498305$

und $- \frac{\cot B \cot C}{r^2} = - 0{,}101295$

ſo iſt $\cos a = - r \times 0{,}599600$

und daher $a > 90^0$.

Es iſt aber

$$\log r \times 0{,}5996 = 9{,}7778616$$

und dieſe Zahl iſt der Logarithmen eines Coſinus von $53^0\ 9'\ 32''$, folglich iſt $a = 126^0\ 50'\ 28''$.

Will man den Werth von a berechnen nach der Formel §. 20. II. 1. No. 2., nämlich

$$\sin \tfrac{1}{2} a = r\sqrt{\frac{\sin (H - B) \sin (H - C)}{\sin B \sin C}}$$

ſo ſteht die Rechnung wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Es iſt}\quad A &= 115^0\ 56' \\ B &= 78^0\ 28' \\ C &= 63^0\ 36' \\ \hline \text{alſo}\quad H &= 129^0 \end{aligned}$$

und daher $H - B = 50^0\ 32'$, und $H - C = 65^0\ 24'$,

$$\begin{aligned} \text{hiernach iſt}\ \log\sin(H - B) &= 9{,}8876142 \\ \log\sin(H - C) &= 9{,}9586767 \\ \hline & 19{,}8462909 \end{aligned}$$

Bereits gefunden iſt

$$\begin{aligned} \log\sin B\sin C &= 19{,}9433095 \\ \hline & 1{,}9029814 - 2 \\ :2 &= 0{,}9514907 - 1 \\ \text{und}\ \log r &= 10{,}0000000 \\ \hline \text{alſo}\ \log\sin \tfrac{1}{2}a &= 9{,}9514907 \\ \text{folglich iſt}\ \tfrac{1}{2}a &= 63^0\ 25'\ 14'' \\ \text{und daher}\ a &= 126^0\ 50'\ 28'' \end{aligned}$$

was mit dem obigen Reſultate übereinſtimmt.

Will man aber endlich den Werth von a berechnen nach der Formel No. 4. §. 20. I., wonach

$$\cos a = \frac{r^3 \cos(A + \varphi)}{\sin B \sin C \cos\varphi}$$

$$\text{für}\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos B \cos C}{\sin A}$$

ſo ſteht die Rechnung wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Es iſt}\ \log\cos B &= 9{,}3008953 \\ \log\cos C &= 9{,}6480038 \\ \hline & 18{,}9488991 \\ \log\sin A &= 9{,}9539063 \\ \hline \text{alſo}\ \log\operatorname{tg}\varphi &= 8{,}9949928 \end{aligned}$$

und es iſt $\varphi < 90^0$, weil die Formel für tg φ keinen negativen Factor enthält. Hiernach iſt $\varphi = 5^0\ 38'\ 44''$, und daher $A + \varphi = 121^0\ 34'\ 44''$.

Jetzt iſt $\log\cos(A+\varphi) = \log\cos 58^0\ 25'\ 16'' = 9{,}7190594$

$\log r^3 = 30{,}0000000$

$39{,}7190594$

$\log\sin B = 9{,}9911412$

$\log\sin C = 9{,}9521683$

$\log\cos\varphi = 9{,}9978900$

$29{,}9411995$

folglich iſt $\log\cos a = 9{,}7778599$

Dieſer Logarithmen iſt von dem bei der Ausrechnung nach der erſten Formel erhaltenen, nur in den beiden letzten Decimalſtellen um 17 verſchieden, was auf die Größe des Bogens keinen Einfluß hat, und man erhält alſo auch hier $a = 126^0\ 50'\ 28''$.

5. Von einer körperlichen Ecke kennt man einen ebenen Winkel $= 115^0\ 40'$, und die beiden anliegenden Neigungswinkel von $100^0\ 36'$ und $56^0\ 42'$; es ſoll hieraus die Größe des dritten Neigungswinkels berechnet werden.

Hier iſt $A = 115^0\ 40'$, $b = 100^0\ 36$, und $c = 56^0\ 42'$, und es wird der Werth von a geſucht, was mit Hülfe der Formel geſchehen kann, §. 20. II. No. 7.

Benutzt man hierzu die erſte Formel, nämlich:

$$\cos a = \frac{\cos A \sin b \sin c - r \cos b \cos c}{r^2}$$

$$= r\left[\frac{\cos A \sin b \sin c}{r^3} - \frac{\cos b \cos c}{r^2}\right]$$

ſo ſteht die Rechnung wie folgt:

Es iſt $\log\cos A = \log\cos 64^0\ 20' = 9{,}6366231$

$\log\sin b = \log\sin 79^0\ 24' = 9{,}9925250$

$\log\sin c = \log\sin 56^0\ 42' = 9{,}9221062$

$29{,}5512543$

$\log r^3 = 30{,}0000000$

alſo $\log\frac{\cos A \sin b \sin c}{r^3} = 0{,}5512543 - 1$

und es iſt die zu dieſem Logarithmen gehörige Zahl negativ, weil der Ausdruck den negativen Factor cos A enthält. Nämlich es iſt

$$\frac{\cos A \sin b \sin c}{r^3} = -\ 0{,}35584.$$

Ferner

$$\begin{aligned} \text{ferner iſt } \log\cos b &= 9{,}2647030 \\ \log\cos c &= \underline{9{,}7395904} \\ &\ 19{,}0042934 \\ \log r^2 &= \underline{20{,}0000000} \end{aligned}$$

$$\text{alſo } \log \frac{\cos b \cos c}{r^2} = 0{,}0042934 - 1$$

und es iſt auch die zu dieſem Logarithmen gehörige Zahl negativ, weil der Ausdruck den negativen Factor cos b enthält. Der Werth iſt alſo $= -0{,}100995$.

$$\text{Da ſonach } \frac{\cos A \sin b \sin c}{r^3} = -0{,}355840$$

$$\text{und } -\frac{\cos b \cos c}{r^2} = +0{,}100995$$

$$\text{ſo iſt } \cos a = \overline{-r \times 0{,}254845};$$

$$\text{da nun } \log r \times 0{,}254845 = 9{,}4062761$$

ſo iſt dieſes auch der Logarithmen von cos a. In den Tafeln findet man $75^0\ 14'\ 8''$; es iſt aber $a > 90^0$, weil cos a einen negativen Werth hat, und man hat daher $a = 104^0\ 45'\ 52''$.

Bequemer findet man den Werth von a nach der 2ten Formel §. 20. II. No. 7. Nach dieſer iſt

$$\cos a = \frac{\sin(b-\psi)\cos c}{\sin\psi} \text{ für } \operatorname{tg}\psi = \frac{r\cot c}{\cos A}.$$

$$\begin{aligned} \text{Nun iſt } \log r \cot c &= 19{,}8174842 \\ \text{und } \log\cos A &= \underline{9{,}6366231} \\ \text{alſo } \log\operatorname{tg}\psi &= 10{,}1808611 \end{aligned}$$

wozu in den Tafeln gehört ein Bogen von beinahe $56^0\ 36'$; es iſt derſelbe nicht ganz um eine Secunde kleiner als dieſer Werth. Weil aber der Ausdruck $\operatorname{tg}\psi = \frac{r\cot c}{\cos A}$ den negativen Factor cos A enthält, ſo iſt $\psi > 90^0$ und daher iſt $\psi = 123^0\ 24'$, alſo

$b - \psi = 100^0\ 36' - 123^0\ 24' = -22^0\ 48'$.

$$\begin{aligned} \text{Nun iſt } \log\sin(\psi - b) = \log\sin 22^0\ 48' &= 9{,}5882892 \\ \log\cos c = \log\cos 56^0\ 42' &= \underline{9{,}7395904} \\ &\ 19{,}3278796 \\ \log\sin\psi = \log\sin 56^0\ 36' &= \underline{9{,}9216073} \end{aligned}$$

$$\text{alſo } \log \frac{\sin(\psi - b)\cos c}{\sin\psi} = 9{,}4067223$$

Weil aber sin $(b - \psi) = -\sin(\psi - b)$ ſo iſt

$$\cos a = -\frac{\sin(\psi - b)\cos b}{\sin\psi}$$

negativ, alſo $a > 90^\circ$, und es iſt eigentlich

$$\log(-\cos a) = 9{,}4062723.$$

Da nun zu dieſem Logarithmen der Coſinus von 75° 14′ 9″ gehört, ſo iſt a = 104° 45′ 51″, was eine Secunde weniger beträgt, als nach der andern Formel gefunden wurde. Dieſes aber kommt daher, weil bei der gegenwärtigen Rechnung ψ um 1″ zu klein angenommen worden iſt. Nimmt man $\psi = 123^\circ\ 24'\ 1''$, ſo erhält man für a den mit dem obigen übereinſtimmenden Werth = 104° 45′ 52″.

Soll nun auch aus den gegebenen Stücken A, b und c der Werth des ebenen Winkels C geſucht werden, ſo kann hierbei die 2te Formel §. 20. II. No. 8. benutzt werden. Dieſe Formel iſt

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} C \sin\varphi}{\sin(b+\varphi)} \text{ für } \operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos C \operatorname{tg} a}{r}$$

und drückt alſo eigentlich den Werth von A aus; wenn C, b und a gegeben ſind. Um dieſe Formel für den gegenwärtigen Fall einzurichten, braucht man alſo bloß C mit A und c mit a zu verwechſeln, wodurch man erhält

$$\operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} A \sin\varphi}{\sin(b+\varphi)} \text{ für } \operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos A \operatorname{tg} c}{r}$$

$$\begin{aligned}
\text{Nun iſt } \log\cos A &= 9{,}6366231 \\
\log\operatorname{tg} c &= \underline{10{,}1825158} \\
&\ 19{,}8191389 \\
\log r &= \underline{10{,}0000000} \\
\text{alſo } \log\operatorname{tg}\varphi &= 9{,}8191389
\end{aligned}$$

und es iſt $\varphi > 90^\circ$, alſo $\varphi = 146^\circ\ 35'\ 59''$, und $b + \varphi = 247^\circ\ 11'\ 59''$.

$$\begin{aligned}
\text{Da nun } \log\operatorname{tg} A = \log\operatorname{tg} 64^\circ\ 20' &= 10{,}3182604 \\
\log\sin\varphi = \log\sin 33^\circ\ 24'\ 1'' &= \underline{9{,}7407453} \\
&\ 20{,}0590057 \\
\log\sin(b+\varphi) = \log\sin 67^\circ\ 11'\ 59'' &= \underline{9{,}9646656} \\
\text{ſo iſt } \log\operatorname{tg} C &= 10{,}0943401
\end{aligned}$$

wozu ein Bogen gehört von 51° 10′ 29″.

Der Ausdruck $\text{tg } C = \frac{\text{tg } A \sin \varphi}{\sin (b + \varphi)}$ enthält zwei negative Factoren, nämlich es iſt tg A, als die Tangente eines Bogens im 2ten Quadranten, negativ, und auch sin $(b + \varphi)$, als der Sinus eines Bogens im dritten Quadranten. Daher iſt tg C poſitiv, und alſo wirklich $C = 51^\circ\ 10'\ 29''$.

§. 22.

Noch einige Uebungen.

Obgleich ein ſphäriſches Dreieck durch drei gegebene Stücke vollkommen beſtimmt iſt, wenn unter dieſen nicht zwei einander gegenüber liegende ſich befinden, ſo kann die Größe dieſer Stücke doch nicht beliebig angenommen werden, ſondern es entſprechen die Werthe derſelben nur innerhalb gewiſſer Gränzen wirklich einem Dreiecke. So iſt z. B. kein Dreieck in dem Falle möglich, wenn A, B und C ſo angenommen werden, daß $A + B < C$ iſt, oder wenn man für a, b und c ſolche Werthe wählt, daß $a + b + c < 180^\circ$ ꝛc. In dieſer Beziehung nun gelten für das rechtwinklige Dreieck folgende Sätze, für welche die Beweiſe anzugeben ſind.

1. Wenn die Hypotenuſe und eine Kathete gegeben ſind, und ſie ſind beide kleiner als 90°, ſo darf die Kathete nie größer ſein als die Hypotenuſe, wenn ein Dreieck aus dieſen Stücken möglich ſein ſoll; ſind aber beide größer als 90°, ſo darf umgekehrt die Hypotenuſe nie größer als die Kathete ſein.

2. Sind von einem rechtwinkligen Dreiecke die beiden Winkel a und b gegeben, ſo müſſen dieſe, wenn ſie zu einem ſphäriſchen Dreiecke gehören, immer ſolche Werthe haben, daß das Product ihrer Tangenten größer iſt, als das Quadrat des Sinustotus. Es muß nämlich immer ſein

$$\text{tg } a \text{ tg } b > r^2$$

Von einem ſphäriſchen Dreiecke überhaupt gilt die zu beweiſende Regel.

3. Wenn a, b und c die drei gegebenen Winkel deſſelben ſind, ſo muß immer, wenn man zu dem Coſinus des einen Winkels, den der Summe der beiden übrigen addirt, etwas

negatives herauskommen. Es muß alſo immer $\cos a + \cos(b + c)$ negativ ſein.

4. Der Werth von $\cos A - \cos(B + C)$ iſt, wenn A, B und C die drei Seiten eines ſphäriſchen Dreiecks ſein ſollen, immer poſitiv.

5. Wird in einem rechtwinkligen ſphäriſchen Dreiecke die Senkrechte von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuſe = P geſetzt, ſo iſt nach §. 20. III. No. 1.

$$\sin P = \frac{\sin A \sin b}{r}$$

Nach §. 20. I. No. 6 aber iſt

$$\sin b = \frac{r \cos a}{\cos A}$$

folglich iſt auch $\sin P = \frac{\sin A \cos a}{\cos A} = \frac{\text{tg} A \cos a}{r}$

eine Formel, durch welche unmittelbar der Werth von sin P aus den beiden einander gegenüber liegenden Stücken A und a berechnet werden kann. Es ſollen ähnliche Formeln für sin P gefunden werden, wenn irgend zwei andere Stücke des Dreiecks gegeben ſind. Nach welchen Formeln wird alſo der Werth von P unmittelbar gefunden, wenn man kennt H und A oder A und B; H und a oder a und b?

6. Folgende Beiſpiele ſind nach zu rechnen:

Gegeben $A = 56^\circ\ 12'$; $a = 47^\circ\ 59'$; $b = 30^\circ\ 48'$; hieraus findet man $C = 77^\circ\ 7'\ 51''$; $B = 34^\circ\ 56'\ 23''$ und $c = 119^\circ\ 21'\ 16''$.

Gegeben $A = 75^\circ\ 38'$; $B = 113^\circ\ 27'$; $C = 69^\circ\ 54'$; hieraus findet man $a = 63^\circ\ 27'\ 54''$; $b = 122^\circ\ 5'\ 4''$, und $c = 60^\circ\ 8'\ 45''$.

Gegeben $a = 123^\circ\ 53'$; $b = 75^\circ\ 36'$; $c = 37^\circ\ 35'\ 10''$; hieraus findet man $A = 127^\circ\ 35'\ 45''$; $B = 112^\circ\ 25'$, und $C = 35^\circ\ 36'\ 7''$.

Dritter Abſchnitt.

Von den Körpern überhaupt und von dem Parallelepipedon insbeſondere.

§. 23.

Erklärungen.

1. Der nach allen Richtungen begränzte Raum, alſo der vollſtändig begränzte Raum; in ſofern demſelben Ausdehnung nach allen drei Richtungen zukommt, wird ein geometriſcher Körper genannt. Die Gränzen des Körpers ſind Flächen, und die Art und Weiſe, wie derſelbe von Flächen begränzt wird, giebt die Form des Körpers. Bei dem geometriſchen oder mathematiſchen Körper wird überhaupt blos Form und Größe berückſichtigt, ohne daß man darauf ſieht, ob und wodurch der Raum ausgefüllt iſt, während bei dem phyſiſchen Körper die den Raum ausfüllende Materie vorzugsweiſe in Betracht gezogen wird.

2. Zwei Körper ſind congruent, wenn einer genau die Stelle des andern einnehmen kann, wenn ſie alſo ſich auf eine ſolche Art in einander legen laſſen, daß alle ihre Gränzen ſich gegenſeitig decken. Zu der Congruenz zweier Körper iſt daher erforderlich, daß ſie von gleich vielen gleichen und ähnlichen Flächen begränzt werden, die ſich in beiden Körpern unter gleichen Neigungswinkeln ſchneiden, und es müſſen überdies die gleichen Flächen, in derſelben Ordnung nach derſelben Richtung auf einander folgend, beide Körper begränzen.

3. Körper, die gleich vielen Raum einſchließen, ſind gleich groß, wenn auch ihre Form verſchieden iſt, und Körper die gleiche Form haben, ſind ähnlich, wenn gleich ihre Größe verſchieden iſt. Ueberhaupt ſind zwei Körper von verſchiedener Größe ähnlich, wenn ſie durch nichts als durch ihre Größe von einander unterſchieden werden können. Congruente Körper ſind gleich und ähnlich zu gleicher Zeit.

4. Werden zwei Körper von gleich vielen gleichen und ähnlichen Flächen begränzt, die in derſelben Ordnung auf einander folgen, und unter gleichen Neigungswinkeln ſich ſchneiden; iſt aber die Richtung, in welcher die gleichen Flächen aufeinander folgen, bei beiden Körpern entgegengeſetzt, ſo daß Begränzungsflächen, welche in dem einen Körper rechts herum neben einander liegen, in dem anderen in derſelben Ordnung links herum auf einander folgen, ſo iſt es keinesweges nothwendig, daß ſie congruent ſind, und man nennt ſolche Körper ſymmetriſch.

5. Daß ſymmetriſche Körper nicht nothwendig congruent ſind, läßt ſich auf folgende Art einſehen: In dem ſphäriſchen Dreieck abc Fig. 8. ſollen die Seiten ab und ac von verſchiedener Größe ſein, ſo daß alſo auch die zu denſelben gehörigen Winkel adb und adc verſchieden ſind. Man nehme auf der Verlängerung von ba den Bogen $a\beta$ = ab, und conſtruire das Dreieck $a\beta\gamma$ ſo, daß $a\gamma$ = ac, $\beta\gamma$ = bc iſt, und daſſelbe mit abc auf einer und derſelben, durch den größten Kreis $abc\beta$ abgeſchnittenen Halbkugel liegt, ſo ſind, wenn man die Radien βd und γd zieht, die beiden Pyramiden abcd und $a\beta\gamma d$, welche ſphäriſche Grundflächen haben, ſymmetriſch. Sie unterſcheiden ſich durch nichts von einander, als dadurch, daß, während in der Pyramide abcd die Flächen

adb, bdc und cda

links herum aufeinander folgen, die ihnen der Reihe nach gleichen Flächen

$ad\beta$, $\beta d\gamma$ und γda

in der Pyramide $a\beta\gamma d$ rechts herum nebeneinander liegen. Von dieſen Pyramyden kann aber keinesweges eine die Stelle der andern vertreten; denn wollte man abcd aus der Kugel herausnehmen, und dafür $a\beta\gamma d$ einſetzen, ſo würde ſich dieſes nicht thun laſſen, weil hierbei $ad\gamma$ an die Stelle von adb, und $ad\beta$ an die Stelle von adc zu liegen kommen würde, wo ſie nicht hinpaſſen. Es ſind alſo die Pyramiden abcd und $a\beta\gamma d$ ſymmetriſch aber nicht congruent.

6. Wenn man eine ebene Figur umwendet, ſo daß die untere Seite der Fläche nach oben zu liegen kommt, ſo wird dadurch die Lage der Seiten und Winkel derſelben geändert,

und es folgen nun die einzelnen Theile in eben der Ordnung links aufeinander, in welcher ſie vorher, rechts nebeneinander liegend, auf einander folgten. Dieſelbe Bewandniß hat es auch, wenn man einen geometriſchen Körper umwendet, ſo daß die inneren Seiten der Begränzungsflächen nach außen zu liegen kommen. Auch bei dieſem wird unter ſolchen Umſtänden die Richtung, in welcher die einzelnen begränzenden Theile aufeinander folgen, in eine entgegengeſetzte verwandelt, und es iſt daher jeder Körper dem, durch Umwendung ſeiner Hülle erzeugten, ſymmetriſch. Hieraus folgt, wenn die Körper A und B ſymmetriſch ſind, ſo iſt der durch die Umwendung von B erzeugte, dem A congruent, und es geht zwar hieraus bereits unmittelbar hervor, daß zwei ſymmetriſche Körper gleich groß ſein müſſen, es läßt ſich die Richtigkeit dieſes Satzes aber auch unabhängig von dieſer Anſicht beweiſen, wie in der Folge gezeigt werden wird.

Anmerkung. Daß ſymmetriſche Körper nicht nothwendig congruent ſind, davon kann man ſich im gemeinen Leben bei vielen Gegenſtänden überzeugen. So ſind z. B. ein Paar Handſchuhe ſymmetriſch, es kann aber der Linke nicht die Stelle des Rechten vertreten, es ſei denn, daß man ihn umwendet, wodurch gerade der linke Handſchuh zu einem rechten wird. Auf eine merkwürdige Art zeigt ſich der Einfluß der Lage im Raume dadurch, daß, wenn gleich der linke Handſchuh nicht die Stelle des rechten vertreten kann, er doch als ein rechter Handſchuh erſcheint, wenn man ihn im Spiegel betrachtet.

§. 24.

Das Parallelepipedon.

1. Ein Körper, deſſen ſämmtliche Begränzungsflächen Parallelogramme ſind, wird ein Parallelepipedon genannt, und es kann ein ſolcher Körper von nicht mehr oder weniger als 6 Parallelogrammen begränzt werden, von welchen je zwei einander gegenüberliegende parallel laufen und congruent ſind. Denn iſt ABCD Fig. 14. die Grundfläche eines ſolchen Körpers, ſo können ſich an dieſer nur 4 Seitenflächen anſchließen, und da dieſe Parallelogramme ſein müſſen, ſo iſt ab gleich und parallel zu AB und cd zu CD. Da nun aber auch AB und CD gleich und parallel ſind, ſo

gilt dieſes auch von ab und cd, und es iſt daher die obere Fläche abcd ebenfalls ein Parallelogramm, der Körper wird alſo wirklich von 6 Parallelogrammen eingeſchloſſen. Da übrigens ab gleich und parallel iſt zu AB und ad zu AD, ſo folgt, daß die Parallelogramme abcd und ABCD gleich groß ſind und parallel laufen. Aus demſelben Grunde iſt auch gleich und parallel ADda zu BCcb, und ABba zu CDdc.

2. Zieht man in den beiden einander gegenüber liegenden Flächen ABCD und abcd die gleich liegenden Diagonalen AC und ac, ſo liegen dieſelben in einer Ebene, und es iſt ACca ebenfalls ein Parallelogramm. Denn da Dd gleich und parallel iſt ſowohl zu Aa als zu Cc, ſo müſſen auch dieſe unter ſich gleich und parallel ſein, und es iſt daher ACca ein Parallelogramm.

3. Durch das Parallelogramm ACca wird das Parallelepipidon in zwei Körper getheilt, von welchen jeder durch zwei congruente und parallel liegende Dreiecke und durch drei Parallelogramme begränzt wird. Dieſe Körper nennt man Prismen. Iſt nun das Parallelepipedon ſenkrecht, ſo daß die Seitenkanten Aa, Bb, Cc und Dd ſenkrecht auf der Grundfläche ABCD ſtehen, ſo ſind die beiden Prismen ABCabc und CDAcda nicht blos ſymmetriſch; denn es folgen bei beiden die gleichen Stücke in derſelben Richtung aufeinander, und ſie ſind daher congruent. Es wird alſo jedes ſenkrechte Parallelepipedon durch die Diagonalfläche in zwei gleiche und ähnliche Prismen zerlegt. Sind aber die Seitenkanten geneigt gegen die Grundfläche, ſo iſt keinesweges der körperliche Winkel bei D dem bei B gleich, wohl aber iſt alsdann b = D. Wird alſo in dieſem Falle das Prisma ABCabc umgeſtürzt, ſo daß abc die Grundfläche und ABC die obere Fläche bildet, ſo iſt es nun in dieſer Lage dem unverändert ſtehen gebliebenen Prisma CDAcda ſymmetriſch aber nicht congruent, weil bei dem umgekehrten Prisma die Seitenflächen nun nach einer entgegengeſetzten Richtung auf einander folgen. Ein geneigtes Parallelepipedon wird alſo durch die Diagonalfläche blos in zwei ſymmetriſche Prismen zerlegt, die einander nicht congruent ſind.

4. Daß deſſen ungeachtet bei einem geneigten Parallel-

epipedon die beiden Prismen gleich groß ſind, geht zwar be=reits aus dem §. 23. No. 4. angeführten hervor, es läßt ſich dieſer Satz aber auch ganz unabhängig auf folgende Art be=weiſen: In der Kante Dd des geneigten Parallelepipedon ABCDabcd Fig. 15. nehme man beliebig einen Punkt H, er=richte an demſelben auf Dd die Senkrechten HE und HG, und vollende die dadurch beſtimmte Durchſchnittsebene HEFG, ſo iſt dieſe Ebene ein Parallelogramm, auf welchem die Kan=ten des geneigten Parallelepipedon ſämmtlich ſenkrecht ſtehen. Verlängert man nun dieſe Kanten, und nimmt auf den Ver=längerungen Dh = dH, Ae = aE, Bf = bF und Cg = cG, und zieht die Verbindungslinien he, ef, fg, gh, ſo iſt auch hefg ein Parallelogramm, auf welchem die Kanten ſenkrecht ſte=hen, und es iſt daher efghEFGH ein ſenkrechtes Parallelepi=pedon, welches alſo durch die Diagonalfläche EGge in zwei congruente Prismen zerlegt wird. Es iſt aber nun der Körper

efgABC = EFGabc
und ABCEFG = ABCEFG

folglich auch efgEFG = ABCabc

und ganz auf dieſelbe Art folgt auch, daß da ſein muß

ehgEHG = ADCadc.

Nach No. 3. aber iſt

efgEFG = ehgEHG

folglich muß auch ſein

ABCabc = ADCadc.

Das geneigte Parallelepipedon ABCDabcd wird alſo durch die Diagonalfläche ACca in zwei ſymmetriſche Prismen zerlegt, die, wenn ſie auch nicht congruent ſind, doch gleiche Größe haben.

5. Wird die Linie DC, Fig. 14., in mehrere gleiche Theile getheilt, und man zieht durch alle Theilpunkte Linien parallel zu DA, und legt durch dieſe Linien parallele Ebenen zu DAda, ſo wird dadurch das Parallelepipedon in eben ſo viel gleiche und congruente kleinere Parallelepipeda zerlegt, als in wie=viel gleiche Theile die DC getheilt worden iſt. Beträgt nun m die Anzahl aller Theile von Dp und n die der Theile von pC, ſo beſteht auch ADpqrsda = Dr aus m, und qpCBbcsr

= pb aus n der kleinern Parallelepipeda, in welche das ganze zerlegt iſt, und es iſt daher auch

$$\begin{aligned} Dr : pb &= m : n \\ &= Dq : pB \end{aligned}$$

Es iſt aber $\underline{Dq : pB = Dp : pC}$

folglich auch $Dr : pb = Dq : pB.$

Wird alſo ein Parallelepipedon Db durch eine Ebene pqrs geſchnitten, welche zu einem Paar Seitenebenen des Körpers parallel läuft, ſo verhalten ſich die beiden dadurch erhaltenen Theile deſſelben zu einander, wie die Abſchnitte Dq und pB, in welche die Grundfläche durch pq getheilt wird. Uebrigens verhalten ſich die Abſchnitte Dr und pb des Parallelepipedon auch zu einander, wie die Theile Dp und pC, in welche die Kante DC in p getheilt iſt.

Anmerkung 1. Der Satz, daß ein geneigtes Parallelepipedon durch die Diagonalebene zwar in ſymmetriſche, aber nicht in congruente Prismen zerlegt wird, iſt bis jetzt von den meiſten Mathematikern überſehen worden, und man vermißt daher auch den Beweis, daß dieſe ſymmetriſchen Prismen gleich groß ſind. Den hier in No. 4. mitgetheilten Beweis für dieſen Satz findet man in einer Abhandlung von J. J. J. Hoffmann, über den 28ſten Satz der XI. Buches der Elemente des Euklides. Mainz 1818.

Anmerkung 2. In §. 5. wird gezeigt, unter welcher Bedingung zwei körperliche dreikantige Ecken gleich ſind, welche drei Stücke gleich haben; es wird aber hierunter nur verſtanden, daß alsdann auch die übrigen Stücke in beiden Ecken der Ordnung nach gleich groß ſein müſſen. Daß beide Ecken congruent ſind, kann aber hieraus noch nicht gefolgert werden, es ſei denn, daß nachgewieſen wird: es folgen in beiden Ecken die gleichen Stücke der Ordnung nach in einer und derſelben Richtung aufeinander.

§. 25.

Lehrſatz.

Parallelepipeda von gleicher Grundfläche und Höhe ſind einander gleich.

Beweis. Um dieſen Satz allgemein zu beweiſen, müſſen folgende Fälle unterſchieden werden:

1. Die beiden Parallelepipeda ABCDabcd und ABCD$\alpha\beta\gamma\delta$. Fig. 16., haben die Grundfläche ABCD gemein, und die Kanten Aa, Bb des einen liegen mit den Kanten Aα,

Bβ des andern in einer Ebene ſo, daß die Endpunkte a, b, α und β derſelben in einer geraden Linie ſich befinden. In dieſem Falle haben beide Körper das Stück ABCDbc$\delta\alpha$ gemeinſchaftlich, und ſie unterſcheiden ſich blos dadurch, daß zu dieſem Stücke einmal das Prisma AD$\alpha\delta$ad hinzukommt, um das Parallelepipedon ABCDabcd zu ergänzen, und einmal das Prisma BCbc$\beta\gamma$, wodurch das Parallelepipedon ABCD$\alpha\beta\gamma\delta$ ergänzt wird. Nun ſind aber dieſe beiden Prismen, wie ſich leicht einſehen läßt, congruent, folglich ſind auch die Parallelepipeda gleich groß.

2. Die beiden Parallelepipeda haben zwar die Grundfläche gemein, ihre Seitenkanten aber liegen in verſchiedenen Ebenen. In dieſem Falle haben die obern Flächen beider Körper die Lage abcd und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, Fig. 17., und es wird nun, wenn man $\alpha'\delta'$ bis δ, ab bis β verlängert, und die Linien $\beta'\gamma'$ und dc, bis ſie ſich in γ ſchneiden, ein drittes Parallelogramm $\alpha\beta\gamma\delta$ gebildet, welches jedem der beiden andern congruent iſt. Nimmt man dieſes Parallelogramm als die obere Fläche eines dritten Parallelepipedon an, das ebenfalls ABCD zur Grundfläche hat, ſo iſt daſſelbe nach No. 1. dem Parallelepipedon gleich, deſſen obere Fläche abcd iſt, weil die Punkte a, b, α und β in gerader Linie liegen, und es iſt auch dem Parallelepipedon gleich, welches $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ zur obern Fläche hat, weil α', δ', α, δ in gerader Linie liegen. Folglich müſſen die Parallelepipeda, deren obere Flächen durch abcd und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ gebildet werden, auch unter ſich gleich ſein.

Aus dieſem Satze folgt zugleich, daß ein Parallelepipedon, deſſen Seitenflächen gegen die Grundfläche geneigt ſind, immer einem andern gleich iſt, das dieſelbe Grundfläche und Höhe hat, und deſſen Seitenflächen ſenkrecht auf der Grundfläche ſtehen, ſo daß alſo die Kanten deſſelben der Höhe des gegebenen gleich ſind. Es kann alſo jedes geneigte Parallelepipedon in ein ſenkrechtes verwandelt werden.

3. Die Parallelepipeda ſind beide ſenkrecht und haben die gleichen Grundflächen aBCD = abcd Fig 18. Sind nun die Winkel bad und BaD verſchieden, ſo kann man an ab ein zweites Parallelogramm ab$\gamma\delta$ = abcd ſo beſchreiben, daß $\angle$ baδ = $\angle$ BaD, und es ſind alsdann zwei über abcd

und über $ab\gamma\delta$ errichtete ſenkrechte Parallelepipeda von gleicher Höhe einander gleich nach No. 1. Iſt nun das Parallelepipedon über $ab\gamma\delta = Q$ mit dem über aBCD beſchriebenen = P von gleicher Größe, ſo gilt der obige Lehrſatz auch für den hier in Betrachtung gezogenen Fall. Setzt man nun $ab\gamma\delta$ an aBCD ſo an, daß die Seiten des einen Parallelogrammes die Verlängerungen des andern bilden, vollendet abEB, und beſchreibet auch hierüber ein ſenkrechtes Parallelepipedon R, das mit P und Q gleiche Höhe hat, ſo iſt nach §. 24. No. 5.

$$P : R = aBCD : abEB$$
und $$R : Q = abEB : ab\gamma\delta$$
alſo iſt $$P : Q = aBCD : ab\gamma\delta.$$

Da nun nach der Vorausſetzung iſt

$$aBCD = ab\gamma\delta,$$

ſo muß auch ſein $P = Q$.

Die ſenkrechten Parallelepipeda P und Q von gleicher Höhe über gleichen Grundflächen ſind alſo gleich groß.

4. Die beiden Parallelepipeda haben verſchiedene Neigung gegen ihre Grundflächen, welche gleich groß ſind. Da nach der Bemerkung zu No. 2. jeder dieſer Körper einem ſenkrechten Parallelepipedon von gleicher Höhe über derſelben Grundfläche gleich iſt, und dieſe letztern unter ſich nach No. 3. gleich groß ſind, ſo müſſen auch die geneigten gleiche Größe haben.

Es ſind alſo in allen Fällen Parallelepipeda, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, von gleicher Größe.

Zuſatz. Wenn über die beiden Parallelogramme aBCD und $\alpha\beta mn$ Fig. 18. die Parallelepipeda P und S von gleicher Höhe errichtet werden, ſo verhalten ſich dieſelben zu einander, wie ihre Grundflächen. Denn verlängert man Da bis b ſo, daß das Parallelogramm $abEB = \alpha\beta mn$, und erweitert das Parallelepipedon P über dieſe Fläche ſo, daß die Ergänzung = R wird, ſo iſt

$$R = S$$

und nach §. 24. No. 5. $P : R = aBCD : abEB$

alſo auch $P : S = aBCD : abEB$

und weil $abEB = \alpha\beta mn$

$$\text{ſo iſt } P : S = aBCD : \alpha\beta mn$$

es verhalten ſich alſo die Parallelepipeda P und S von gleicher Höhe zu einander, wie ihre Grundflächen.

§. 26.

Lehrſatz.

Wenn zwei Parallelepipeda gleich groß ſind, ſo ſtehen ihre Grundflächen im umgekehrten Verhältniß ihrer Höhen zu einander, und wenn die Grundflächen im umgekehrten Verhältniſſe der Höhen ſtehen, ſo ſind die Parallelepipeda gleich groß.

Beweis. Man ſetze die Höhe des über aBCD Fig. 18. beſchriebenen Parallelepipedon P = h, und die Höhe des Parallelepipedon S, welches über $\alpha\beta mn$ beſchrieben iſt, und deſſen Kanten ſenkrecht auf der Grundfläche ſtehen ſollen = H, ſo daß alſo die Kanten ſelbſt = H ſind. Ferner ſei $H = h + \alpha$ und S in der Höhe h parallel zu der Grundfläche geſchnitten, und man ſetze von den, auf dieſe Weiſe erhaltenen beiden Theilen von S, den untern = X, ſo iſt

(nach §. 25. Zuſatz) $P : X = aBCD : \alpha\beta mn$

und (nach §. 24. No. 4.) $S : X = H : h$.

Iſt nun 1. P = S, ſo folgt

$$aBCD : \alpha\beta mn = H : h.$$

Die Grundflächen verhalten ſich alſo umgekehrt wie die Höhen, wenn die Parallelepipeda gleich groß ſind.

Iſt aber 2. $aBCD : \alpha\beta mn = H : h$,

ſo folgt $P : X = S : X$

und es iſt alſo $P = S$.

Die Parallelepipeda ſind alſo gleich groß, wenn die Grundflächen derſelben umgekehrt wie ihre Höhen ſich verhalten.

Daß der Lehrſatz aber auch noch in dem Falle Gültigkeit hat, wenn das Parallelepipedon S nicht ſenkrecht iſt, ergiebt ſich auf folgende Art: Es ſey daſſelbe geneigt, die Länge der ganzen Kante deſſelben = K und die ganze Höhe = H; in der Höhe = h ſei daſſelbe durch eine parallele Ebene zur Grundfläche geſchnitten, und es ſei der untere abgeſchnittene Theil des Körpers = X und der untere Theil der Kante = k, ſo iſt nach §. 3. No. 8.

$$h : H - h = k : K - k$$
alſo auch $h : H = k : K$

Da aber nach §. 24. No. 4. die Proportion ſtatt findet
$$S : X = K : k$$
ſo iſt auch $S : X = H : h$

und weil immer $P : X = aBCD : \alpha\beta mn$

ſo hat man hier dieſelben Proportionen wie in dem Falle, wenn S ſenkrecht iſt, und es gelten alſo hier dieſelben Folgerungen wie dort.

§. 27.

Lehrſatz.

Aehnliche Parallelepipeda verhalten ſich zu einander wie die dritten Potenzen der in ihnen ähnlich liegenden Seiten.

Beweis. Sind Fig. 19. die über aC und ac beſchriebenen Parallelepipeda P und p ähnlich, ſo iſt
$$L : l = B : b,$$
und es muß auch ſein, wenn die dritte Kante von $P = H$ und die von $p = h$ geſetzt wird:
$$H : h = L : l = B : b$$
und wird L um l, B um b und H um h verlängert, ſo iſt durch l, b und h ein Parallelepipedon beſtimmt, welches dem p congruent iſt. Außerdem ſei nun das durch B, l und H und deren Lage gegeneinander beſtimmte Parallelepipedon $= P'$, und das, welches durch die drei Kanten b, l und H beſtimmt iſt $= p'$, ſo iſt nach §. 24. No. 4.
$$P : P' = L : l$$
$$P' : p' = B : b$$
$$p' : p = H : h.$$
Da nun nach der Vorausſetzung iſt
$$L : l = B : b = H : h,$$
ſo muß auch ſein $P : P' = P' : p' = p' : p$.

Es iſt alſo
$$P : p' = P : P'$$
$$P : P' = P' : p'$$
$$P : P' = p' : p$$
folglich auch $P^3 : (P')^3 = PP'p' : P'p'p$

und $P^3 : (P')^3 = P : p$.

Weil aber $P : P' = L : l$

ſo iſt auch $P^3 : (P')^3 = L^3 : l^3$
und es iſt folglich auch

$$P : p = L^3\ l^3,$$

nämlich es verhalten ſich die ähnlichen Parallelepipeda, wie die dritten Potenzen der in ihnen ähnlich liegenden Kanten, was bewieſen werden ſollte.

§. 28.

Lehrſatz.

Zwei Parallelepipeda verhalten ſich ihrem Inhalte nach wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen.

Beweis. Man nehme an, die Parallelepipeda ſind ſenkrecht, ſetze die Grundfläche des einen = G, die Höhe = H und den Inhalt = P, und von dem anderen ſei die Grundfläche = g, die Höhe = h, der Inhalt = p, und man conſtruire ein drittes Parallelepipedon P′, deſſen Grundfläche = G und deſſen Höhe = h iſt, ſo hat man

(nach §. 24. No. 4.) $P : P' = H : h$
und (nach §. 25 Zuſatz,) $P' : p = G : g,$
alſo iſt $PP' : P'p = GH : gh$
und daher auch $P : p = GH : gh.$

Da aber geneigte Parallelepipeda den ſenkrechten gleich ſind, welche mit ihnen gleiche Grundfläche und Höhe haben, ſo findet auch, wenn P und p geneigt ſind, die Proportion ſtatt

$$P : p = GH : gh.$$

§. 29.

Von dem Kubikinhalte der Parallelepipeda.

Als Maaß zur Beſtimmung des Kubikinhaltes der Körper überhaupt bedient man ſich des Würfels, d. i. des gleichſeitig rechtwinkligen Parallelepipedon, alſo eines Parallelepipedon das von 6 Quadraten begränzt wird. Iſt die Seite dieſes Würfels = 1 Fuß, ſo bildet er den Kubikfuß, und er bildet den Kubikzoll, wenn die Seite deſſelben = 1 Zoll iſt. Nun ſei die Grundfläche irgend eines Parallelepipedon = G Quadratfuß, die Höhe deſſelben = H Fuß und der Inhalt = P, ſo iſt, wenn man den Kubikfuß mit p bezeichnet, weil die Grundfläche g deſſelben = 1 Quadratfuß, und die Höhe h = 1 Fuß iſt, nach §. 28.

$$\frac{gh : GH = p : P}{\text{alſo hier } 1 : GH = p : P}$$

folglich iſt $P = GH \times p$.

Der Kubikinhalt eines Parallelepipedon wird alſo ganz allgemein gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe deſſelben multiplicirt, und es giebt das Produkt den Inhalt durch die Kubikeinheit ausgedrückt, der dieſelbe Längeneinheit zum Grunde liegt, durch welche die Höhe des Parallelepipedon gemeſſen und die Grundfläche deſſelben berechnet worden iſt. Hält hiernach z. B. die Höhe 8 Fuß und die Grundfläche 76 Quadratfuß, ſo iſt der Kubikinhalt =

$76 \times 8 = 608$ Kubikfuß.

Zuſatz. Wird der Längefuß in m Zoll getheilt, ſo iſt der Inhalt eines Kubikfußes = m^3 Kubikzoll, weil in dieſem Falle $G = m^2$ Quadratzoll und $H = m$ Zoll iſt. Uebrigens folgt dieſes auch unmittelbar aus §. 27, denn da der Kubikfuß dem Kubikzoll ähnlich iſt, ſo verhalten ſie ſich zu einander wie $1^3 : m^3$, und es iſt daher ein Kubikfuß = m^3 Kubikzoll. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß ein ähnliches Verhältniß ſtatt findet für den Kubikzoll, in Verhältniß zu der Kubiklinie, für die Kubikruthe in Verhältniß zu dem Kubikfuß u. ſ. w. Daher hält, wenn der Fuß in 12 Zoll getheilt wird, der Kubikfuß 1728 Kubikzoll, und es hält derſelbe nur 1000 Kubikzoll, wenn der Fuß in 10 Zoll getheilt wird.

§. 30.

Allgemeine Formel für das Parallelepipedon.

Iſt in dem Parallelepipedon Db Fig. 14. die Länge der Kante Dd = k und die Neigung derſelben gegen die Fläche ADC = γ, und man ſetzt den ſenkrechten Abſtand des Punktes d von dieſer Fläche, alſo die Höhe des Parallelepipedon = H, ſo findet die Proportion ſtatt

$$\frac{k : H = r : \sin\gamma}{\text{es iſt alſo } H = \frac{k \sin\gamma}{r}}$$

Iſt nun ferner die Seite DA = m, DC = n und $\angle ADC = C$, ſo iſt der Flächeninhalt von dem Parallelogramm ABCD alſo von der Grundfläche G des Parallelepipedon:

$$G = \frac{mn \sin C}{r}$$

Es iſt folglich $GH = \frac{kmn \sin C \sin \gamma}{r^2} = P$

wenn durch P der Kubikinhalt des Parallelepipedon ausgedrückt wird.

Nun iſt aber, wenn man ſetzt $\angle ADd = A$ und $\angle CDd = B$ nach §. 20. III. No. 2., wenn in der dortigen Formel S für $H = \frac{A + B + C}{2}$ geſetzt wird

$$\sin \gamma = \frac{2 \sqrt{\sin S \sin (S - A) \sin (S - B) \sin (S - C)}}{\sin C}$$

Wird alſo dieſer Werth für $\sin \gamma$ ſubſtituirt, ſo erhält man

$$P = \frac{2kmn \sqrt{\sin S \sin (S - A) \sin (S - B) \sin (S - C)}}{r^2}$$

und dieſes iſt die allgemeine Formel für den Kubikinhalt eines Parallelepipedon, wenn die drei Kanten deſſelben gegeben ſind und die Winkel, welche je zwei derſelben miteinander bilden.

Es ſei z. B. $Dd = k = 36''$, $DA = m = 21''$, $DC = n = 16''$, $\angle ADC = C = 56^\circ\ 28'$, $\angle ADd = A = 77^\circ\ 12'$ und $\angle CDd = B = 104^\circ\ 20'$, ſo iſt $S = 119^\circ$, $S - A = 41^\circ\ 48'$, $S - B = 14^\circ\ 40'$ und $S - C = 62^\circ\ 32'$.

Alſo log sin S =	9,9418193
log sin (S — A) =	9,8238213
log sin (S — B) =	9,4034554
log sin (S — C) =	9,9480604
	39,1171564
	19,5585784
log 2k = log 72 =	1,8573325
log mn = log 336 =	2,5263393
	23,9422502
log r² =	20,0000000
folglich iſt log P =	3,9422502
und daher P =	8754,88

der Kubikinhalt beträgt alſo beinahe 8755 Kubikzoll.

Zuſatz 1. Wenn das Parallelepipedon rechtwinklig iſt, alſo $A = B = C = 90^\circ$, ſo iſt $S = 135^\circ$ und $S - A$

$= S - B = S - C = 45^0$ und weil $\sin 135^0 = \sin 45^0$, ſo iſt in dieſem Falle

$$P = \frac{2kmn \sqrt{\sin^4 45^0}}{r^2} = \frac{2kmn \sin^2 45^0}{r^2}$$

und da $\sin 45^0 = \cos 45^0$, ſo iſt

$$P = \frac{kmn \times 2 \sin 45^0 \cos 45^0}{r}$$

$$= \frac{kmn \times \sin 90^0}{r} = kmn.$$

Der Kubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedon wird nämlich gefunden, wenn man die drei Kanten deſſelben miteinander multiplicirt.

Zuſatz 2. Iſt $A = B = C = 60^0$ und $k = m = n$, ſo wird

$$P = \frac{2k^3 \sqrt{\sin 90^0 \sin^3 30^0}}{r^2}$$

alſo weil $\sin 90^0 = r$ und $\sin 30^0 = \frac{1}{2}r$

$$P = \frac{2k^3 \sqrt{\frac{1}{8}r^4}}{r^2} = k^3 \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} k^3 \sqrt{2}.$$

Zuſatz 3. Die anfänglich gefundene Formel für P iſt

$$P = \frac{kmn \sin C \sin \gamma}{r^2}$$

und man findet auf gleiche Weiſe auch, wenn die Neigung der Kante DC gegen die Ebene ADd Fig. 14. $= \alpha$ geſetzt wird, weil $\angle ADd = A$ iſt,

$$P = \frac{kmn \sin A \sin \alpha}{r^2}$$

folglich iſt $\sin C \sin \gamma = \sin A \sin \alpha$,

und daher $\sin A : \sin C = \sin \gamma : \sin \alpha$.

Bei einer jeden dreikantigen Ecke verhalten ſich daher die Sinus der ebenen Winkel zu einander, umgekehrt wie die Sinus der Neigungswinkel der ihnen gegenüber liegenden Kanten.

§. 31.

Von der Oberfläche des Parallelepipedon.

Für $DA = m$, $DC = n$ und $\angle ADC = C$ Fig. 14. iſt die Fläche von dem Parallelogramme $ABCD = \frac{mn \sin C}{r}$.

Eben ſo iſt für $Dd = k$, $\angle ADd = A$ und $\angle CDd = B$, die Fläche von $ADda = \frac{mk \sin A}{r}$ und von $CDdc = \frac{nk \sin B}{r}$, und es iſt daher, weil das ganze Parallelepipedon durch ſechs Parallelogramme begränzt wird, von welchen je zwei einander gegenüberliegende gleich groß ſind, wenn man die ganze Oberfläche mit F bezeichnet

$$F = 2\left[\frac{mn \sin C + mk \sin A + nk \sin B}{r}\right]$$

und es wird für $A = B = C = 90^\circ$, wenn alſo das Parallelepipedon rechtwinklig iſt

$$F = 2\,[mn + mk + nk].$$

Dagegen findet man für dieſen Fall die Seitenfläche, die beiden Grundflächen nicht mitgerechnet, $= 2k\ (m + n)$.

Iſt nun die Grundfläche $mn = G$ und die ſenkrechte Kante $k = H$ gegeben, ſo iſt dadurch der Kubikinhalt $= GH$ beſtimmt, und die ganze Oberfläche $= 2G + 2H\ (m + n)$ iſt deſto kleiner, je kleiner der Werth von $2\,(m + n)$ iſt; alſo einen je kleineren Umfang die Grundfläche G hat. Nun hat aber von allen Vierecken bei gleicher Fläche das Quadrat den kleinſten Umfang, folglich iſt auch die Oberfläche eines rechtwinkligen Parallelepipedon bei gegebenem Kubikinhalt am kleinſten, wenn die Grundfläche deſſelben ein Quadrat iſt. Da nun bei einem Parallelepipedon jede Fläche die Grundfläche bilden kann, ſo erhält man die kleinſte Oberfläche, wenn der Körper von lauter Quadraten eingeſchloſſen wird. Von allen rechtwinkligen Parallelepipeda hat bei gleichem Kubikinhalt alſo der Würfel die kleinſte Oberfläche. Uebrigens verſteht es ſich von ſelbſt, daß bei gleichen Grundflächen und bei gleichem Kubikinhalte die Seitenfläche eines ſenkrechten Parallelepipedon immer kleiner iſt, als die eines geneigten; es hat daher ganz allgemein der Würfel für einen gegebenen Kubikinhalt die kleinſte Oberfläche, oder was daſſelbe iſt, es hat bei gegebener Oberfläche den größten Kubikinhalt.

§. 32.

Einige Aufgaben.

1. Es ſoll ein oben offener Kaſten conſtruirt werden, der für einen gegebenen Kubikinhalt die möglichſt kleinſte Oberfläche hat.

Auflöſung. Wie groß man auch die Grundfläche annehmen mag, ſo wird dieſelbe doch immer, wenn ſie ein Quadrat iſt, den kleinſten Umfang haben, und es erhalten alsdann die Seitenflächen, deren Flächeninhalt gefunden wird, wenn man die durch die gegebene Grundfläche beſtimmte Höhe des Kaſtens mit dem Umfange der Grundfläche multiplicirt, die kleinſte Oberfläche. Es muß alſo in jedem Falle ein Quadrat als Grundfläche des Kaſtens angenommen werden. Soll aber die ganze Oberfläche, alſo die Seitenflächen und die Grundfläche zuſammen genommen am möglichſt kleinſten werden, ſo muß man die Dimenſionen ſo annehmen, daß die Höhe des Kaſtens der halben Länge der Seite des Quadrats gleich wird, welches die Grundfläche bildet, wie ſich auf folgende Art ergiebt:

Es ſei die Seite der Grundfläche $= k$, alſo die Höhe nach der obigen Regel $= \frac{1}{2}k$, ſo iſt der Kubikinhalt des Kaſtens $= k^2 \times \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}k^3$, und die ganze Oberfläche deſſelben iſt $= k^2 + \frac{1}{2}k \times 4k = 3k^2$.

Nimmt man aber die Seite der Grundfläche $= k + d$, und ſetzt die Höhe $= x$, ſo muß, weil der Kaſten den Kubikinhalt behalten ſoll, die Gleichung ſtatt finden

$$x\,(k + d)^2 = \tfrac{1}{2}k^3$$

$$\text{daher wird } x = \frac{k^3}{2\,(k + d)^2}.$$

Die Oberfläche iſt in dieſem Falle

$$= (k + d)^2 + x \times 4\,(k + d)$$

$$= (k + d)^2 + \frac{2k^3}{k + d}$$

$$\text{und weil } \frac{k^3}{k + d} = k^2 - kd + \frac{kd^2}{k + d}$$

ſo erhält man für die Oberfläche den Ausdruck

$$(k + d)^2 + 2\left[k^2 - kd + \frac{kd^2}{k + d}\right]$$

$$= k^2 + 2kd + d^2 + 2k^2 - 2kd + \frac{2kd^2}{k + d}$$

$$= 3k^2 + d^2 + \frac{2kd^2}{k + d}$$

$$= 3k^2 + d^2\left(1 + \frac{2k}{k + d}\right).$$

Da nun $d^2\left(1 + \frac{2k}{k + d}\right)$ immer einen poſitiven Werth hat, es mag d poſitiv oder negativ ſein, ſo iſt auch

$$3k^2 + d^2\left(1 + \frac{2k}{k + d}\right) > 3k^2.$$

Die Oberfläche des Kaſtens wird alſo größer, ſobald man ſtatt k, der Seite der Grundfläche eine Länge $= k + d$ giebt.

Soll z. B. der Inhalt des Kaſtens $62\frac{1}{2}$ Kubikfuß betragen, ſo erhält derſelbe die kleinſte Oberfläche, wenn man die Seite der Grundfläche $= 5'$ und die Höhe $= 2\frac{1}{2}'$ macht, denn es iſt nun

$$5^2 \times 2\tfrac{1}{2} = 62\tfrac{1}{2};$$

die Oberfläche iſt in dieſem Falle

$$= 5^2 + 4.\ 5.\ 2\tfrac{1}{2} = 75 \text{ Quadratfuß}.$$

Nimmt man ſtatt deſſen die Seite der Grundfläche $= 8'$, ſo muß die Höhe werden $= \frac{62\frac{1}{2}}{8^2} = \frac{125}{128}$ und die Oberfläche iſt alsdann

$$= 8^2 + 4.\ 8.\ \frac{125}{128} = 95\tfrac{1}{4} \text{ Quadratfuß}.$$

Es werden alſo durch die richtige Form $20\frac{1}{4}$ Quadratfuß geſpart, was auch unmittelbar aus der obigen Formel gefunden werden kann; denn es iſt die Differenz für die Oberfläche gefunden worden $= d^2\left(1 + \frac{2k}{k + d}\right)$ und in dem gegenwärtigen Falle iſt $k = 5$ und $d = 3$; alſo $d^2\left(1 + \frac{2k}{k + d}\right)$ $= 9\left(1 + \frac{10}{8}\right) = 9 \times 2\frac{1}{4} = 20\frac{1}{4}$.

Sollte z. B. eine kupferne Pfanne, welche die Form ei-

nes Parallelepipedon und den obigen Inhalt hat, conſtruirt werden, ſo werden, wenn man die Seite der Grundfläche 5 Fuß macht, der Quadratfuß Kupfer zu 2 Pfd. gerechnet, $40\frac{1}{2}$ Pfd. Kupfer weniger gebraucht, als wenn die Seite der Grundfläche = 8 Fuß angenommen wird.

2. Ein geneigtes Parallelepipedon wird von einer Fläche geſchnitten, ſo daß ſämmtliche Kanten ſenkrecht auf dieſer Fläche ſtehen; es ſoll der Inhalt dieſes Durchſchnitts angegeben werden.

Auflöſung. Für DA = m und DC = n, Fig. 15. iſt, wenn man an irgend einem Punkte H der Kante Dd = k Senkrechte in den Ebenen der Linien DA und DC errichtet, welche alſo den Abſtand der Linien Aa und Ca von Dd angeben, die Senkrechte

$$HE = \frac{m \sin (ADd)}{r} = \frac{m \sin A}{r}$$

$$\text{und } HG = \frac{n \sin (CDd)}{r} = \frac{n \sin B}{r}$$

wenn $\angle ADd = A$, $\angle CDd = B$ und alſo $\angle ADC = C$ geſetzt wird, und es iſt nun EHG der Neigungswinkel der beiden Ebenen ADd und CDd, welcher, da er in der körperlichen Ecke D dem ebenen Winkel ADC = C gegenüber liegt, nach der bei den Ecken eingeführten Bezeichnung mit c bezeichnet wird. Es iſt aber jetzt EFGH die Ebene, welche die Kanten rechtwinklig ſchneidet, und der Flächeninhalt derſelben = X wird ausgedrückt durch $\frac{HE \times HG \times \sin (EHG)}{r}$; folglich iſt

$$X = \frac{m \sin A}{r} \times \frac{n \sin B}{r} \times \frac{\sin c}{r} = \frac{mn \sin A \sin B \sin c}{r^3}.$$

Nun iſt aber nach §. 20 II. No. 1., wenn man dort S ſtatt H ſetzt

$$\sin \tfrac{1}{2}c = r \sqrt{\left[\frac{\sin (S - A) \sin (S - B)}{\sin A \sin B}\right]}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}c = r \sqrt{\left[\frac{\sin S \sin (S - C)}{\sin A \sin B}\right]}$$

und daher, weil $\frac{2 \sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}c}{r} = \sin c$, iſt

$$\sin c = 2r \sqrt{\left[\frac{\sin S \sin (S-A) \sin (S-B) \sin (S-C)}{\sin^2 A \sin^2 B}\right]}$$

$$= \frac{2r \sqrt{[\sin S \sin (S-A) \sin (S-B) \sin (S-C)]}}{\sin A \sin B}$$

folglich iſt auch, wenn man dieſen Ausdruck ſtatt $\sin c$ in der obigen Formel für X ſetzt

$$X = \frac{2mn \sqrt{[\sin S \sin (S-A) \sin (S-B) \sin (S-C)]}}{r^2}$$

die geſuchte Formel für die Fläche des normalen Querſchnitts.

Zuſatz. Nach §. 30. iſt, wenn P den Kubikinhalt des Parallelepipedon bezeichnet

$$P = \frac{2kmn \sqrt{[\sin S \sin (S-A) \sin (S-B) \sin (S-C)]}}{r^2}$$

folglich iſt auch

$$X = \frac{P}{k}$$

und daher $kX = P$.

Der Kubikinhalt eines Parallelepipedon wird alſo erhalten, wenn man einen normalen Querſchnitt deſſelben mit der geſchnittenen Kante multiplicirt.

3. Es iſt ACca die Diagonalfläche, durch welche das Parallelepipedon in zwei Priſmen zerlegt wird, es ſoll die Größe der Winkel dieſes Parallelogramms angegeben werden.

Aufloͤſung. Wenn EFGH den Körper normal ſchneidet, ſo iſt EG der ſenkrechte Abſtand der beiden Kanten Aa und Cc von einander, und es iſt daher, wenn man die Diagonale $AC = d$ ſetzt und den unbekannten Winkel $CAa = \varphi$

$$GE = \frac{d \sin \varphi}{r}.$$

Nun iſt in dem Dreyeck EHG

$$(EG)^2 = (HE)^2 + (HG)^2 - \frac{2(HE)(HG) \cos (EHG)}{r}$$

alſo auch, wenn man die Bezeichnung der vorigen Aufgabe beibehält,

$$\frac{d^2 \sin^2 \varphi}{r^2} = \frac{m^2 \sin^2 A}{r^2} + \frac{n^2 \sin^2 B}{r^2} - \frac{2mn \sin A \sin B \cos c}{r^3}$$

und weil $\cos c = \frac{r^2 \cos C - r \cos A \cos B}{\sin A \sin B}$

ſo iſt

$$d^2 \sin^2 \varphi = m^2 \sin^2 A + n^2 \sin^2 B - 2mn [r \cos C - \cos A \cos B]$$

nämlich es iſt

$$d^2 \sin^2 \varphi = m^2 (r^2 - \cos^2 A) + n^2 (r^2 - \cos^2 B) - 2mn [r \cos C - \cos A \cos B]$$

und dieſes giebt $d^2 \sin^2 \varphi =$

$$(m^2+n^2) r^2 - 2mnr \cos C - [m^2 \cos^2 A + n^2 \cos^2 B - 2mn \cos A \cos B].$$

Es iſt alſo $d^2 \sin^2 \varphi =$

$$r^2 \left[m^2 + n^2 - \frac{2mn \cos C}{r}\right] - (m \cos A - n \cos B)^2.$$

Nun iſt aber in dem Dreieck ADC die dritte Seite $AC = d$ durch die Gleichung beſtimmt

$$d^2 = m^2 + n^2 - \frac{2mn \cos C}{r}$$

alſo iſt auch

$$r^2 d^2 - (m \cos A - n \cos B)^2 = d^2 \sin^2 \varphi$$

und $d^2 (r^2 - \sin^2 \varphi) = (m \cos A - n \cos B)^2$

nämlich es iſt

$$d^2 \cos^2 \varphi = (m \cos A - n \cos B)^2$$

und daher $\cos \varphi = \dfrac{m \cos A - n \cos B}{d}$

die Formel für den geſuchten Winkel.

Zuſatz 1. Der Flächeninhalt des Parallelogramms ACca wird, weil $Aa = k$ iſt, ausgedrückt durch $\dfrac{dk \sin \varphi}{r}$ es iſt alſo auch dieſe Fläche

$$= \frac{k \sqrt{[r^2 d^2 - (m \cos A - n \cos B)^2]}}{r}$$

$$= \frac{k \sqrt{(rd + m \cos A - n \cos B)(rd - m \cos A + n \cos B)}}{r}$$

Zuſatz 2. Die Formel $\cos \varphi = \dfrac{m \cos A - n \cos B}{d}$ giebt, wenn $m = n$ und $A = B$ iſt,

$$\cos \varphi = 0, \text{ alſo } \varphi = 90^\circ.$$

Wenn alſo in einem Parallelepipedon $DA = DC$ und die Kante Dd gegen DA und DC gleich geneigt iſt, ſo iſt die Diagonalfläche ACca immer ein Rechteck.

§. 33.
Uebungen.

1. In einem jeden Parallelepipedon giebt es vier Diagonalen, welche durch den Körper gehen, nämlich aC, Ac, bD und Bd; dieſe hängen immer von den 12 Kanten ſo ab, daß die Summe der Quadrate der vier Diagonalen immer ſo groß iſt, als die Summe der Quadrate aller 12 Kanten des Körpers.

2. Wenn man in einem Parallelepipedon die drei verſchiedenen Kanten deſſelben und die von denſelben eingeſchloſſenen Winkel beibehält, und läßt die Winkel ihre Stellen wechſeln, ſo daß z. B. der Winkel C, welcher vorher von den Kanten m und n gebildet wurde, nun von k und m eingeſchloſſen wird, ſo ändert ſich dadurch der Kubikinhalt des Körpers nicht. Wie iſt es aber in dieſem Falle mit der Oberfläche deſſelben?

3. Es ſind zwei Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedon gegeben; man ſoll die dritte Kante ſo beſtimmen, daß der Kubikinhalt eben ſo viel Kubikfuß beträgt als die Oberfläche Quadratfuß hält.

4. Es ſoll angegeben werden, wie groß die Neigungswinkel ſind, unter welchen eine Diagonalfläche des Parallelepipedon die begränzenden Flächen deſſelben ſchneidet?

5. In der Diagonalfläche ACca, Fig 15., liegen die Diagonalen des Parallelepipedon, welche von a nach C und von c nach A gezogen werden können. Da nun die Größe und Form des Parallelogramms CAac durch das, §. 32. angeführte beſtimmt iſt, ſo iſt es auch nicht ſchwer, den Winkel zu finden, unter welchem ſich die beiden Diagonalen aC und cA ſchneiden. Es ſoll die Formel angegeben werden, durch welche dieſer Winkel beſtimmt wird. In dieſer Aufgabe ſowohl als in der vorigen werden die drei Kanten m, n und k und die von denſelben gebildeten Winkel A, B und C als bekannt vorausgeſetzt, und es ſoll der von m und n eingeſchloſſene Winkel = C, der von m und k eingeſchloſſene = A und der, welchen n und k einſchließen, = B ſein.

6. Zieht man von dem Quadrate der Summe der drei Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedon die ganze Oberfläche deſſelben ab, ſo iſt der Reſt der Summe der Quadrate der drei Kanten gleich.

Vierter Abſchnitt.

Das Prisma und der Cylinder.

§. 34.

Grundeigenſchaften der Prismen.

1. Wenn bei einem von lauter ebenen Flächen begränzten Körper zwei dieſer Flächen parallel laufen, congruent ſind und eine gleiche Lage haben, ſo daß ein Paar homologe Seiten dieſer Flächen ebenfalls parallel laufen, und die gleichen Winkel in beiden Flächen in derſelben Ordnung auf einander folgen, ſo ſind alle übrigen Begränzungsflächen dieſes Körpers Parallelogramme. Denn iſt Fig. 14. abcd congruent und parallel zu ABCD und zugleich ab parallel der AB, ſo iſt, weil $\angle b = \angle B$, auch bc parallel zu BC, und da $\angle c = \angle C$, ſo iſt auch cd zu CD parallel ꝛc. Da nun überdies ab = AB, bc = BC ꝛc., ſo ſind die Figuren abBA, bcCB u. ſ. w. ſämmtlich Parallelogramme. Zugleich folgt hieraus, daß bei einem ſolchen Körper die Seitenkanten aA, bB ꝛc. alle gleich groß ſind und parallel laufen müſſen.

2. Jeder Körper, der von zwei congruenten und parallelen Grundflächen ſo begränzt wird, daß alle Seitenflächen deſſelben Parallelogramme ſind, wird ein Prisma genannt, und es gehören daher auch die Parallelepipeda zu der Gattung der Prismen. Die beſonderen Arten dieſes Körpers werden durch die Anzahl der Seiten unterſchieden, welche die congruenten Grundflächen haben. Sind die congruenten Grundflächen, welche nothwendig parallel laufen müſſen, Dreiecke, ſo

heißt das Prisma dreikantig; und es heißt allgemein nkantig, wenn die Grundflächen nſeitige Figuren ſind. Im engeren Sinne verſteht man unter einem Prisma gewöhnlich ein dreikantiges.

3. Das dreikantige Prisma acdACD, Fig. 14., iſt die Hälfte von dem Parallelepipedon abcdABCD, mit welchem es gleiche Höhe hat, und es iſt zugleich auch die Grundfläche ACD des Prisma die Hälfte der Grundfläche ABCD des Parallelepipedon; daher kommen dem Prisma auch alle die Eigenſchaften zu, welche §. 25 bis 28. von dem Parallelepipedon bewieſen worden ſind, und da jede nſeitige Figur in (n — 2) Dreiecke ſich zerlegen läßt, ſo kann auch jedes nkantige Prisma in (n — 2) dreikantige zerlegt werden, und es gelten daher eben die Eigenſchaften auch von allen Prismen überhaupt.

Die hiernach leicht zu beweiſenden Sätze ſind:

a) Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe ſind gleich groß.

b) Wenn zwei Prismen gleich groß ſind, ſo ſtehen ihre Grundflächen im umgekehrten Verhältniſſe ihrer Höhen zu einander, und wenn die Grundflächen derſelben im umgekehrten Verhältniß ihrer Höhen ſtehen, ſo ſind ſie gleich groß.

c) Aehnliche Prismen verhalten ſich zu einander wie die dritte Potenz der in ihnen ähnlich liegenden Seiten.

d) Jede zwei Prismen verhalten ſich ihrem Kubikinhalte nach zu einander, wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen, und hieraus folgt unmittelbar

e) daß der Kubikinhalt eines Prisma gefunden wird, wenn man die Grundfläche und die Höhe deſſelben miteinander multiplicirt.

§. 35.

Formeln für den Kubikinhalt der Prismen.

Bezeichnet man die Grundfläche eines Prisma mit G, und die Höhe deſſelben, alſo den normalen Abſtand der beiden Grundflächen von einander mit H, und ſetzt den Kubikinhalt ſelbſt = P, ſo iſt für jedes nkantige Prisma nach §. 34. No. 3. e.

$$1.\ P = GH.$$

Ferner wird nach dem Zuſatze §. 32. No. 2. der Kubikinhalt eines Parallelepipedon gefunden, wenn man einen normalen Querſchnitt deſſelben mit der geſchnittenen Kante multiplicirt. Da nun Fig. 15., der normale Querſchnitt EFGH ein Parallelogramm iſt, welches durch die Diagonale EG halbirt wird, ſo iſt auch der Kubikinhalt des dreikantigen Prisma ABCabc $= \triangle EFG \times bB$; und es gilt dieſer Satz für jedes der dreikantigen Prismen, in welche ein mehrkantiges zerlegt werden kann. Folglich iſt auch ganz allgemein, wenn der normale Querſchnitt irgend eines Prisma $= X$ und die Kante deſſelben $= k$

$$2.\ P = Xk.$$

Vergleicht man dieſe Formel mit der obigen, ſo erhält man die Proportion

$$G : X = k : H;$$

in einem jeden Prisma verhält ſich nämlich die Grundfläche zu dem normalen Querſchnitte, wie die Kante zur Höhe.

Setzt man den Neigungswinkel der Kante dD, Fig. 14. gegen die Grundfläche ADC $= \gamma$, ſo iſt der ſenkrechte Abſtand des Punktes d von dieſer Fläche, wenn die Kante Dd mit k bezeichnet wird $= \frac{k \sin \gamma}{r}$. Da nun dieſer Abſtand zugleich die Höhe H des Prisma giebt, ſo iſt auch, wenn man in No. 1. dieſen Werth für H ſetzt

$$3.\ P = \frac{Gk \sin \gamma}{r}.$$

Es iſt aber für $\angle ADC = C$, $\angle ADd = A$ und $\angle CDd = B$, wenn $\frac{A + B + C}{2} = S$ geſetzt wird, nach §. 30.

$$\sin \gamma = \frac{2 \sqrt{\sin S \sin (S - A) \sin (S - B) \sin (S - C)}}{\sin C}$$

folglich iſt auch

$$4.\ P = \frac{2Gk \sqrt{\sin S \sin (S-A) \sin (S-B) \sin (S-C)}}{r \sin C}$$

wo A, B, C die drei Winkel bezeichnen, welche durch irgend eine Kante des Prisma und die beiden Seiten der Grund-

fläche, mit welchen dieſe Kante in ihrem Durchſchnittspunkte zuſammentrifft, gebildet werden.

Zuſatz 1. Wenn man in dem dreikantigen Prisma abcABC, Fig. 20., durch die Kante cC eine parallele Ebene legt zu aABb, und durch bB eine Ebene parallel zu aACc, ſo läßt ſich dadurch das Prisma zu einem Parallelepipedon ergänzen, von welchem aABb die Grundfläche und deſſen Höhe dem Abſtande der Kante cC von dieſer Grundfläche gleich iſt. Setzt man alſo dieſen Abſtand = h und aABb = A, ſo iſt der Kubikinhalt des Parallelepipedon = Ah, und da das Prisma die Hälfte hiervon beträgt, ſo iſt

$$P = \frac{1}{2} Ah.$$

Iſt nun mn = g der normale Abſtand der Linien Aa und Bb von einander, ſo iſt für Aa = k, die Fläche A = gk, es iſt alſo auch

$$P = \frac{1}{2} gkh = k \times \frac{1}{2} gh.$$

Nun iſt aber $\frac{1}{2}gh$ der Flächeninhalt des Dreiecks, welches den normalen Durchſchnitt des Prisma bildet; es wird alſo der Kubikinhalt eines Prisma gefunden, wenn man die normale Durchſchnittsfläche deſſelben mit der Kante multiplicirt. Dieſe bereits oben No. 2. angegebene Regel wird auf dieſe Weiſe direct gefunden, und man kann hieraus umgekehrt die §. 32. No. 2 aufgeſtellte Regel für das Parallelepipedon ableiten; eine Ableitung, welche jedenfalls einfacher, als die dortige iſt, bei welcher trigonometriſche Hülfsformeln benutzt werden mußten.

Zuſatz 2. Wenn man die Seite eines regelmäßigen nEcks = a ſetzt, ſo iſt der Flächeninhalt deſſelben = $\frac{na^2 \operatorname{tg} \varphi}{4r}$ für $\varphi = \left(\frac{n-2}{n}\right) 90°$. Soll alſo der Kubikinhalt eines Prisma mit regelmäßiger Grundfläche gefunden werden, ſo braucht man nur dieſen Werth für G in der allgemeinen Formel zu ſubſtituiren. Daher iſt

$$P = \frac{Hna^2 \operatorname{tg} \varphi}{4r}$$

oder auch $P = \frac{kna^2 \operatorname{tg} \varphi \sin \gamma}{4r^2}$

Will man den obigen Werth für G in der Formel No. 4. ſubſtituiren, ſo muß für C der Polygonalwinkel geſetzt werden $= \frac{(n-2) \cdot 180^0}{n} = 2\,\varphi$, und es iſt daher auch

$$P = \frac{2\,k\,n\,a^2\,tg\,\varphi}{4\,r} \cdot \frac{\sqrt{\sin S \sin(S-A) \sin(S-B) \sin(S-C)}}{r \sin 2\,\varphi}$$

$$= \frac{k\,n\,a^2 \sqrt{\sin S \sin(S-A) \sin(S-B) \sin(S-C)}}{4 \cos^2 \varphi}.$$

§. 36.

Nähere Beſtimmung des Kubikinhalts der Säulen.

Jedes Prisma, deſſen Grundflächen regelmäßige Vielecke ſind, wird eine Säule genannt, und bezeichnet man den Kubikinhalt einer ſolchen Säule mit P, ſo iſt, wenn dieſelbe ein regelmäßiges nEck zur Grundfläche hat, die Höhe der Säule $= H$ und die Seite der Grundfläche $= a$ geſetzt wird,

$$P = \frac{H.\ na^2\ tg\ \varphi}{4\ r}$$

wo, wie bereits im obigen Zuſatz angegeben iſt, φ einen Winkel $= \left(\frac{n-2}{n}\right) 90^0$ bedeutet.

Nun iſt 1. für $n = 4$, $\varphi = 45^0$, alſo $tg\,\varphi = r$; alſo wenn der Kubikinhalt der 4kantigen Säule $= P_4$ geſetzt wird,

$$P_4 = a^2 H.$$

2. Für $n = 6$ iſt $\varphi = 60^0$;

alſo $tg\,\varphi = \frac{r \sin 60^0}{\cos 60^0} = \frac{2 \sin 30^0 \cos 30^0}{\sin 30^0} = 2 \cos 30^0 = r\sqrt{3}$

und daher, wenn man den Kubikinhalt der 6kantigen Säule $= P_6$ ſetzt

$$P_6 = \frac{3\,H\,a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

3. Für $n = 8$ iſt $\varphi = \frac{3}{4} \cdot 90^0 = 67\frac{1}{2}{}^0$ und man findet $tg\ 67\frac{1}{2}{}^0 = (1 + \sqrt{2})\ r$, folglich iſt

$$P_8 = 2\,H\,(1 + \sqrt{2})\,a^2.$$

Anmerkung. Der hier angegebene Werth für $tg\ 67\frac{1}{2}{}^0$ läßt ſich auf folgende Weiſe ableiten: Es iſt, wenn man einſtweilen zur Abkürzung $22\frac{1}{2}{}^0 = \alpha$ ſetzt,

$$\text{tg } 67\tfrac{1}{2}{}^0 = \text{tg } (45^0 + \alpha) = \text{r} \left(\frac{\sin (45^0 + \alpha)}{\cos (45^0 + \alpha)}\right)$$

$$= \text{r} \left(\frac{\sin 45^0 \cos \alpha + \cos 45^0 \sin \alpha}{\cos 45^0 \cos \alpha - \sin 45^0 \sin \alpha}\right).$$

und weil $\sin 45^0 = \cos 45^0$, ſo iſt

$$\text{tg } 67\tfrac{1}{2}{}^0 = \text{r} \left(\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}\right)$$

$$= \frac{\text{r} (\cos \alpha + \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\text{r} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \alpha)}{\text{r} \cos 2 \alpha}$$

$$= \frac{\text{r}^2 + \text{r} \sin 2 \alpha}{\cos 45^0} = \frac{\text{r}^2 + \text{r} \sin 45^0}{\sin 45^0}$$

und weil $\sin 45^0 = \frac{\text{r}}{2} \sqrt{2}$, ſo erhält man hierdurch

$$\text{tg } 67\tfrac{1}{2}{}^0 = \frac{\text{r}^2 + \frac{\text{r}^2}{2} \sqrt{2}}{\frac{\text{r}}{2} \sqrt{2}} = \frac{2 \text{r} + \text{r} \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2 \text{r} \sqrt{2} + 2 \text{r}}{2} = \text{r} (1 + \sqrt{2}).$$

4. Für $n = 5$ iſt $\varphi = 54^0$ und daher findet man

$$\text{tg } \varphi = \text{tg } 54^0 = \text{r} \sqrt{\left(\frac{5 + 2 \sqrt{5}}{5}\right)}, \text{ folglich iſt}$$

$$P_5 = \frac{5 \text{ H } a^2}{4} \sqrt{\left(\frac{5 + 2 \sqrt{5}}{5}\right)} = \frac{\text{H } a^2 \sqrt{(25 + 10 \sqrt{5})}}{4}$$

Anmerkung. Daß $\text{tg } 54^0 = \text{r} \sqrt{\left(\frac{5 + 2 \sqrt{5}}{5}\right)}$, läßt ſich auf folgende Art beweiſen: Es iſt

$\sin 54^0 = \frac{\text{r}}{4} (1 + \sqrt{5})$ und $\cos 54^0 = \sin 36^0 =$

$\frac{\text{r}}{4} \sqrt{(10 - 2 \sqrt{5})}$; folglich iſt $\text{tg } 54^0 =$

$$\text{r} \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{(10 - 2 \sqrt{5})}}\right] = \text{r} \left(\frac{(1 + \sqrt{5}) \sqrt{(10 + 2 \sqrt{5})}}{\sqrt{(10 - 2 \sqrt{5})(10 + 2 \sqrt{5})}}\right) =$$

$$\text{r} \left(\frac{(1 + \sqrt{5}) \sqrt{(10 + 2 \sqrt{5})}}{\sqrt{80}}\right) = \text{r} \left(\frac{(\sqrt{5} + 5) \sqrt{(10 + 2 \sqrt{5})}}{20}\right)$$

$$= \text{r} \left(\frac{\sqrt{(10 + 2 \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})^2}}{20}\right) = \left(\frac{\sqrt{(10 + 2 \sqrt{5})(30 + 10 \sqrt{5})}}{20}\right)$$

$$= \frac{\text{r} \sqrt{(400 + 160 \sqrt{5})}}{20} = \frac{\text{r} \sqrt{(25 + 10 \sqrt{5})}}{5} = \text{r} \sqrt{\left(\frac{5 + 2 \sqrt{5}}{5}\right)}.$$

5. Für $n = 10$ iſt $\varphi = 72^0$ und

$$\text{tg } 72^0 = \frac{\text{r} \sin 72^0}{\cos 72^0} = \text{r} \left(\frac{\frac{\text{r}}{4} \sqrt{(10 + 2 \sqrt{5})}}{\frac{\text{r}}{4} (-1 + \sqrt{5})}\right)$$

$$= r\left(\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}\right) = r\left(\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}}{4}\right)$$

$$= r\left(\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}}{4}\right) = r\left(\frac{\sqrt{(80+32\sqrt{5})}}{4}\right)$$

nämlich es iſt tg $72^0 = r\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$
und daher iſt

$$P_{10} = \frac{10\,H\,a^2 \cdot r\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{4r} = \frac{5\,H\,a_2\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{2}.$$

Auf gleiche Weiſe läßt ſich die Formel für den Kubikinhalt einer jeder anderen regelmäßigen Säule angeben, wobei man jedoch nicht nöthig hat, den analytiſchen Werth für tg φ zu ſubſtituiren. So iſt für $n = 9$, $\varphi = 70^0$ und

$$P_9 = \frac{9\ H\ a^2\ tg\ 70^0}{4\ r}.$$

Eben ſo iſt $P_{12} = \dfrac{3\ H\ a^2\ tg\ 75^0}{r}$ ꝛc.

H bedeutet hier überall den normalen Abſtand der beiden parallelen Grundflächen von einander; wenn alſo die Kante der Säule = k iſt, und die Neigung derſelben gegen die Grundfläche = γ, ſo iſt $H = \dfrac{k\ \sin\ \gamma}{r}$, und es wird H = k, wenn $\gamma = 90^0$ iſt, alſo für jede normale Säule.

§. 37.
Von der Oberfläche der Prismen.

Wenn EFGH ein normaler Querſchnitt des 4kantigen Prisma, Fig. 15., iſt, ſo ſtehen die ſämmtlichen Kanten normal auf dieſem Querſchnitte, und durch die Seiten deſſelben wird daher der normale Abſtand je zweier neben einander liegenden Kanten ausgedrückt, folglich iſt die Fläche des Parallelogramms abBA = (aA) × (EF) ꝛc. Die Fläche aller, die Seitenwände eines Prisma bildenden Parallelogramme wird hiernach erhalten, wenn man den Umfang des normalen Querſchnittes mit der Kante multiplicirt. Wird alſo der Umfang des Querſchnittes = U geſetzt, die Kante = k und die Grundfläche = G, ſo wird die ganze Oberfläche F des Prisma ausgedrückt durch die Formel

$$F = k\,U + 2\,G.$$

Hierbei

Hierbei iſt, für ein normales Prisma, U der Umfang von G; man findet alſo die ganze Oberfläche eines normalen Prisma, wenn man zu dem Produkte der Kante und des Umfanges der Grundfläche dieſe ſelbſt, zwei Mal genommen, addirt.

Die Formel für die Oberfläche einer normalen, regelmäßigen nkantigen Säule läßt ſich hieraus leicht ableiten. Für dieſe iſt, wenn man die Seite der Grundfläche = a ſetzt, für

$$\varphi = \left(\frac{n-2}{n}\right) \cdot 90^0$$

$$G = \frac{na^2 \operatorname{tg} \varphi}{4r} \text{ und } U = na$$

folglich

$$F = nak + \frac{na^2 \operatorname{tg} \varphi}{2r}$$

und daher auch $F = na\left(k + \frac{1}{2}a \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r}\right)$.

Die ganze Oberfläche iſt alſo der Seitenfläche einer normalen, regelmäßigen nkantigen Säule gleich, deren Kante eine Länge hat $= k + \frac{1}{2}a \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r}$. Nun drückt aber $\frac{1}{2}a \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r}$ den Abſtand der Seiten eines regelmäßigen Vielecks von dem Mittelpunkte deſſelben aus, oder was daſſelbe iſt, $\frac{1}{2}a \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r}$ giebt den Werth für den Radius des Kreiſes, der in das regelmäßige Vieleck hineingezeichnet werden kann; es iſt alſo auch, wenn man dieſen Radius $= \varrho$ ſetzt,

$$F = na(k + \varrho).$$

§. 38.

Aufgabe.

Es iſt die Grundfläche ADCEB eines Prisma, Fig. 21. gegeben, die Neigung der Kante Dd gegen dieſelbe, alſo $\angle$ dDh $= \gamma$, und der Winkel, welchen dieſe Kante mit der einen anliegenden Seite DA der Grundfläche bildet, $\angle$ dDC = B; es ſoll hieraus der Winkel dDA = X berechnet werden, welchen die Kante mit der andern anliegenden Seite DA der Grundfläche bildet.

Aufloͤſung. Die Normale von einem Punkte d der Kante treffe die Grundflaͤche in h, man ziehe Dh, und ſetze den Winkel CDh = α und ADh = β, ſo iſt, weil man den ganzen Winkel ADC kennt, wenn dieſer = C geſetzt wird, $\beta = C - \alpha$ oder $\beta = C + \alpha$. Dieſes letztere iſt der Fall, wenn Dh die Lage Dh′ hat. Da nun in der durch die Linien DC, Dd und Dh gebildeten Ecke die Ebene dDh mit hDC einen rechten Winkel macht, ſo findet nach §. 20. I. No. 1. die Proportion ſtatt

$$r : \cos\alpha = \cos\gamma : \cos B$$

es iſt alſo $\cos\alpha = \frac{r \cos B}{\cos\gamma}$,

und eben ſo iſt auch in der Ecke, welche von den Linien DA, Dd und Dh eingeſchloſſen wird,

$$r : \cos\beta = \cos\gamma : \cos X$$

alſo $\cos\beta = \frac{r \cos X}{\cos\gamma}$.

Aus dieſer letzteren Gleichung folgt

$$\cos X = \frac{\cos\gamma \cos\beta}{r} = \frac{\cos\gamma \cos(C \pm \alpha)}{r}$$

und es iſt daher auch

$$\cos X = \frac{\cos\gamma\,(\cos C \cos\alpha \pm \sin C \sin\alpha)}{r^2}$$

hiernach iſt

$$r^2 \cos X = \cos\gamma \cos C \cos\alpha \pm \cos\gamma \sin C \sqrt{(r^2 - \cos^2\alpha)}$$

und ſetzt man in dieſem Ausdrucke den obigen Werth fuͤr cos α, ſo wird erhalten

$$r^2 \cos X = \cos\gamma \cos C . \frac{r \cos B}{\cos\gamma} \pm \cos\gamma \sin C \sqrt{\left(r^2 - \frac{r^2 \cos^2 B}{\cos^2\gamma}\right)}$$

$$= r \cos B \cos C \pm r \sin C \sqrt{(\cos^2\gamma - \cos^2 B)}$$

und es iſt daher endlich

$$\cos X = \frac{\cos B \cos C \pm \sin C \sqrt{(\cos^2\gamma - \cos^2 B)}}{r}$$

Zuſatz 1. Kennt man alſo, außer dem Neigungswinkel der Kante gegen die Grundflaͤche, auch den Winkel dDC, ſo iſt hierdurch der Winkel dDA ebenfalls beſtimmt. Sobald aber dieſer = X gefunden iſt, kennt man auch den Winkel aAD = 180° − X, und es laͤßt ſich nun, wenn alle Winkel

der Grundfläche bekannt ſind, nach der obigen Formel auch $\angle aAB$ finden u. ſ. w. Kennt man alſo, außer der Neigung der Kante gegen die Grundfläche, auch die Neigung dieſer Kante gegen eine Seite der Grundfläche, ſo laſſen ſich hieraus alle Winkel berechnen, welche die ſämmtlichen Kanten des Priſma mit allen Seiten der Grundfläche bilden, und hierdurch iſt, wenn alle Seiten der Grundfläche ihrer Größe nach gegeben ſind, für die bekannte Länge der Kante, auch die Flächen der ſämmtlichen Parallelogramme beſtimmt, welche die Seitenflächen des Priſma bilden.

Zuſatz 2. Setzt man den Neigungswinkel der Ebene dDC gegen die Grundfläche = x, ſo iſt nach §. 20. I. No. 2

$$\underline{r : \sin B = \sin x : \sin \gamma}$$

folglich iſt $\sin x = \frac{r \sin \gamma}{\sin B}$.

Man kann alſo auch die Neigung der Seitenflächen gegen die Grundfläche berechnen. Durch die in der obigen Aufgabe gegebenen Stücke laſſen ſich alſo die ſämmtlichen Theile des Priſma berechnen.

Zuſatz 3. Bequemer iſt es in den meiſten Fällen, wenn man zuerſt aus $\angle dDh = \gamma$ und $dDC = B$ den Werth von α berechnet, wodurch, wenn man $\angle ADC = C$ kennt, auch β beſtimmt iſt, und alsdann aus β und γ den Werth von $dDA = X$. Man hat hierbei den Vortheil, daß ſich leichter beurtheilen läßt, in wiefern die einzelnen Stücke größer oder kleiner als 90^0 ſind.

§. 39.

Von der Conſtruction des Netzes eines dreiſeitigen Priſma.

Man verſteht überhaupt unter dem Netze eines Körpers: die in einer Ebene verzeichnete Figur, welche die Oberfläche eines Körpers ſo darſtellt, daß ſie unmittelbar um den Körper gelegt werden kann, ohne daß ein Verrücken oder Verſchieben der Theile der Figur hierzu erforderlich iſt. Nun ſei abc, Fig. 22., die Grundfläche eines dreiſeitigen Priſma, und die Parallelogramme abgf und adef zwei Seitenflächen deſſelben, wobei natürlich ad = ac ſein muß, ſo iſt hierdurch das

Prisma der Größe und der Form nach beſtimmt, und man braucht nur noch das Dreieck fgl = △ abc über fg ſo zu verzeichnen, daß fl = ac und gl = bc iſt, und das Parallelogramm bghk, von welchem die Seiten gegeben ſind, es muß nämlich bk = bc ſein. Damit die auf dieſe Weiſe erhaltene Figur aber unmittelbar um das Prisma ſich legen laſſe, muß das Parallelogramm bghk ſo verzeichnet werden, daß wenn daſſelbe um bg und adef um af gedreht wird, beide ſo zuſammentreffen, daß die Linien kh und de ſich decken, es müſſen alſo die Punkte d und k zuſammenfallen. Um dieſen Zweck zu erreichen, braucht man nur von d eine Normale dp auf af zu ziehen, dieſelbe über q hinaus zu verlängern, und von b aus mit bc einen Kreisbogen zu ſchlagen. Trifft dieſer die verlängerte dpq in k, ſo iſt kbg der Winkel des dritten Parallelogramms, welches durch dieſen Winkel und durch die Linien kb und bg der Größe, Form und Lage nach vollkommen beſtimmt iſt. Denn da dp und qp in einem und demſelben Punkte p auf af ſenkrecht ſtehen, ſo ſchließen dieſe Linien bei jeder Lage von adef gegen abgf, indem adef um af ſich dreht, den Neigungswinkel dieſer beiden Ebenen ein, und es liegt daher pd in der Ebene, welche die abgf in pq normal ſchneidet. Aus demſelben Grunde aber liegt auch qk in eben dieſer Ebene, und müſſen daher bei dem Zuſammentreffen der Linien de und kh die Punkte k und h zuſammenfallen. Daß aber, wenn adef um af und bghk um bg ſich dreht, die Linien de und kh ſich nicht ſchneiden können, ſondern immer in einer Ebene liegen und zuſammenfallen müſſen, ergiebt ſich auf folgende Art: Es iſt, während bkhg um bg ſich dreht, immer kh parallel zu bg und alſo auch zu af, nach §. 2. No. 6. Da nun auch de immer parallel zu af bleibt, ſo ſind auch die Linien kh und de in jeder hier möglichen Lage parallel.

Zuſatz 1. Wenn von dem Prisma gegeben ſind: die Parallelogramme adef und abgf und von dem dritten der Winkel gbk, ſo wird durch die verlängerte Normale dpq die Seite bk des dritten Parallelogramms der Größe nach beſtimmt, und es ſind nun da, ab und bk die drei Seiten der Grund=

fläche. Es kann alſo auch in dieſem Fall das Netz leicht verzeichnet werden.

Zuſatz 2. Setzt man ad = m, ab = n, bk = d, $\angle$daf = A, $\angle$fab = B und $\angle$gbk = φ, ſo ergiebt ſich die Abhängigkeit dieſer Größen von einander auf folgende Art: Man ſetze ap = p, ao = o und bq = q, ſo iſt

$$m : p = r : \cos A, \text{ alſo } p = \frac{m \cos A}{r}$$

$$n : o = r : \cos B, \text{ alſo } o = \frac{n \cos B}{r}$$

$$\text{und } d : q = r : \cos \varphi, \text{ alſo } q = \frac{d \cos \varphi}{r}.$$

$$\text{Nun iſt } q = p - o$$

$$\text{alſo auch } \frac{d \cos \varphi}{r} = \frac{m \cos A - n \cos B}{r}$$

$$\text{und daher } \cos \varphi = \frac{m \cos A - n \cos B}{d}$$

eine Formel, welche mit dem Ausdrucke vollkommen übereinſtimmt, der §. 32. Aufgabe 3. erhalten wurde. Uebrigens iſt auch leicht einzuſehen, daß dort wie hier ganz daſſelbe geſucht wird.

§. 40.

Von dem Netze eines Priſma überhaupt.

Iſt abcde, Fig. 23. die Grundfläche eines Priſma, und ſind außer dieſer die beiden Parallelogramme ab$\beta\alpha$ und aFGα gegeben, wobei aF = ae ſein muß, ſo iſt das Priſma dadurch der Größe und Form nach beſtimmt, und es muß ſich daher auch das Netz deſſelben entwerfen laſſen, wobei es nur darauf ankommt, die drei Parallelogramme bm, Cn und Do ſo zu zeichnen, daß bei dem Zuſammenſchlagen der ganzen Figur bC mit bc, CD mit cd, DE mit de und Eo mit FG zuſammenfällt.

Bei dem Zuſammenſchlagen des Netzes aber dreht ſich die Grundfläche abcde um ab als um eine Axe, und fällt man daher die Normale ei auf dieſe Axe, und verlängert ſie nach ε, ſo ſchließen, bei jeder Lage der Grundfläche, die Linien ei und iε den Neigungswinkel derſelben gegen ab$\beta\alpha$ ein,

und es befindet ſich daher bei dem Drehen der Grundfläche um ab der Punkt e immer in der durch iε auf der verbreiteten $ab\beta\alpha$ errichteten Vertikalebene. Eben ſo iſt auch, wenn man von F eine Normale Ff auf $a\alpha$ fällt und dieſelbe verlängert, der Punkt F, indem $aFG\alpha$ um $a\alpha$ ſich dreht, immer in der Vertikalebene, welche durch fE auf $ab\beta\alpha$ errichtet werden kann. Da nun die Linien ei und Ff ſich in ε ſchneiden, ſo folgt, daß die Durchſchnittslinie beider Vertikalebenen die erweiterte Ebene $ab\beta\alpha$ in ε trifft. In eben dieſer Linie aber, welche normal auf $ab\beta\alpha$ iſt, müſſen die Punkte e und F zuſammentreffen; es liegt alſo der Punkt, in welchem e und F zuſammentreffen, wenn abcde um ab und $aFG\alpha$ um $a\alpha$ ſich dreht, normal über ε. Legt man nun durch e die Linie eh und durch ε die Linie εr parallel zu ab, ſo muß bei dem Zuſammentreffen der Punkte e und F die Linie eh normal über εr liegen. Zieht man ſonach aus den Ecken c und d der Grundfläche die Normalen cl und dk auf ab, und verlängert dieſelben, bis ſie die εr in q und p treffen, ſo ſind dieſes die Punkte, über welchen g und h normal liegen, wenn e und F zuſammentreffen. Wird in dieſer Lage g mit p verbunden, ſo iſt gkp ein bei p rechtwinkliges Dreieck, und es iſt daſſelbe dem Dreieck ähnlich, welches erhalten wird, wenn man bei der geneigten Lage von abcde aus d eine Normale auf $ab\beta\alpha$ fällt. Der Punkt δ, in welchem dieſe Normale die Ebene trifft, liegt nothwendig in der verlängerten kp, und es findet daher die Proportion ſtatt

$$kg : kp = gd : p\delta$$

oder was daſſelbe iſt,

$$ie : i\varepsilon = gd : p\delta.$$

Da nun die erſten drei Glieder dieſer Proportion gegeben ſind, ſo kann man leicht das vierte finden. Es läßt ſich alſo leicht der Punkt δ angeben, über welchem normal der Punkt d liegen muß, wenn bei dem Zuſammenlegen des Netzes e mit F zuſammentreffen. Auf gleiche Weiſe iſt für

$$ie : i\varepsilon = hc : q\gamma$$

der durch dieſe Proportion der Lage nach beſtimmte Punkt γ, der, über welchem c normal zu liegen kommt.

Da nun bei dem Zuſammenlegen des Netzes C mit c

zuſammentreffen muß, während bCmβ um bβ ſich dreht, ſo folgt, daß wenn man γ mit C verbindet, dieſe Linie die bβ normal ſchneiden muß. Eben ſo muß, weil D mit d zuſammentrifft, die Cm und daher auch die bβ von Dd normal geſchnitten werden, und weil bei dem Zuſammenſchlagen des Netzes E mit e zuſammentrifft, ſo muß auch von Eε die bβ normal geſchnitten werden. Dieſe Betrachtung nun führt zu der folgenden Conſtruction des Netzes von dem durch die Grundfläche abcde und die beiden Parallelogramme ab$\beta\alpha$ und aFGα beſtimmten Prisma.

Man fälle von e eine Normale auf ab und von F auf aα, und verlängere dieſelben, bis ſie ſich in ε ſchneiden; durch e und ε lege man die Linien eh und εr parallel zu ab; ziehe hierauf von den übrigen Ecken c und d der Grundfläche die Normalen cl und dk auf ab, verlängere dieſelben und nehme pδ und qγ ſo, daß die Proportionen ſtatt finden:

$$ei : i\varepsilon = gd : p\delta$$

$$\text{und } ei : i\varepsilon = hc : q\gamma.$$

Von den auf dieſe Weiſe beſtimmten Punkten ε, δ und γ ziehe man nun Normale durch bβ, und ſchneide von b aus die durch γ gelegte Normale mit einer Linie bC = bc. Von C aus ſchneide man die Normale, welche durch δ gelegt iſt, mit CD = cd, und die durch ε gezogene Normale endlich ſchneide man von D aus mit DE = de. Werden nun die hierdurch ihrer Größe und Lage nach beſtimmten Parallelogramme bm, Cn und Do vollendet, ſo giebt die Figur FGoE das Netz für die ſämmtlichen Seitenflächen des Prisma, und man braucht jetzt nur noch an $\alpha\beta$ eine der abcde congruente Figur in der gehörigen Lage anzuſetzen, um das vollſtändige Netz zu erhalten.

Zuſatz 1. Wenn aF mit ab in gerader Linie liegt, und es iſt $\angle$ baα = 90°, ſo befinden ſich auch bC, CD und DE in eben dieſer Linie. Das Netz wird alſo in dieſem Falle ganz einfach erhalten, wenn man auf der verlängerten ab Stücke anſetzt = bc, cd, de, u. ſ. w.

Zuſatz 2. Da bei dem Zuſammenlegen des Netzes dk und kp in einer Vertikalebene auf ab$\beta\alpha$ liegen, ſo ſchließen alsdann dieſe Linien den Neigungswinkel ein, welchen die beiden

Ebenen abcde und ab$\beta\alpha$ mit einander bilden. Dieſer Neigungswinkel wird alſo erhalten, wenn man auf pr den Punkt x dadurch beſtimmt, daß man aus k mit kg einen Bogen beſchreibt, welcher die pr in x ſchneidet, und hierauf kx zieht. Es iſt alsdann xkp der Neigungswinkel der beiden Ebenen. Eben ſo leicht läßt ſich auch der Neigungswinkel von aFG$\varepsilon\alpha$ gegen ab$\beta\alpha$ beſtimmen. Zu dieſer Abſicht braucht man nur aus ε mit einem Radius = fF einen Bogen zu beſchreiben, der die Linie aα in z ſchneidet, und die Linie εz zu ziehen. Hier würde fεz der Neigungswinkel ſein, wenn ε rechts von aα läge, weil dieſer Punkt ſich aber auf der entgegengeſetzten Seite von aα befindet, ſo iſt der äußere Winkel zεF der Neigungswinkel beider Ebenen.

Zuſatz 3. Bei dem Zuſammenſchlagen des Netzes liegt e normal über ε, und es entſteht daher, wenn in dieſer Lage ε mit e und mit a verbunden wird, ein rechtwinkliges Dreieck, von welchem ea die Hypotenuſe und aε die eine Kathete iſt. Dieſes Dreieck läßt ſich ſonach leicht conſtruiren, und es iſt der, der anderen Kathete gegenüberliegende Winkel, der Neigungswinkel der von ae und aF gebildeten Kante gegen die Ebene ab$\beta\alpha$. Auf gleiche Art kann auch der Neigungswinkel gefunden werden, welchen die von bc und bC gebildete Kante mit der Ebene ab$\beta\alpha$ bildet.

§. 41.

Der Cylinder.

Der Cylinder iſt ein Körper, welcher von zwei gleichen und parallelen Kreiſen und von einer krummen Seitenfläche eingeſchloſſen wird, die dieſe Kreiſe begränzen. Der krummen Seitenfläche muß jedoch die Eigenſchaft zukommen, daß zu jedem Punkte B in dem Umfange des einen Kreiſes, Fig. 24., ein entſprechender Punkt b in dem Umfange des anderen in der Art ſich angeben läßt, daß die hierdurch beſtimmte gerade Linie in der krummen Oberfläche liegt. Dieſe Linie Bb wird die Seite des Cylinders genannt. Nimmt man nun den Bogen BD = bd, ſo müſſen, weil die Kreiſe gleich und parallel ſind, auch die Sehnen BD und bd gleich ſein und parallel laufen, und es iſt daher, wenn Dd gezogen wird, dieſe gleich

und parallel der Bb, und es gilt daſſelbe von allen auf gleiche Weiſe gezogenen Linien, die ſämmtlich in der krummen Oberfläche des Cylinders liegen. Verbindet man die Mittelpunkte C und c beider Grundflächen, ſo iſt dieſe Linie, welche man die Axe des Cylinders nennt, gleich und parallel der Seite Bb; denn es ſind die Dreiecke BCD und bcd congruent, und da Bd parallel zu bd iſt, ſo muß auch BC parallel zu bc ſein, und weil überdies BC = bc, ſo iſt BCcb ein Parallelogramm.

Der Cylinder gehört ebenfalls zu der Gattung der Prismen, denn es hat derſelbe eben ſo wie alle Prismen zwei parallellaufende congruente Grundflächen, und man findet daher den Kubikinhalt eines Cylinders, wenn man die Grundfläche deſſelben mit ſeiner Höhe multiplicirt. Dieſer Satz folgt unmittelbar aus dem, was bisher von den Prismen geſagt worden iſt, und es bedarf derſelbe daher keines weiteren Beweiſes; man kann die Richtigkeit deſſelben aber auch auf folgende Art einſehen.

Ein regelmäßiges Vieleck innerhalb eines Kreiſes iſt deſto größer, je mehr Seiten es hat, während es doch immer kleiner als die Kreisfläche iſt. Setzt man nun die Kreisfläche = K, die des Polygons im Kreiſe = p, und K − p = d, ſo kann, wenn die Anzahl der Seiten von p hinlänglich groß iſt, d kleiner werden, als a für jeden noch ſo kleinen Werth = a.

Ein regelmäßiges Vieleck um den Kreis wird deſto kleiner, je mehr Seiten es hat, während es doch immer größer iſt, als die Kreisfläche. Wird die Fläche dieſes Vielecks mit P bezeichnet, und P − K = δ geſetzt, ſo kann ebenfalls, wenn die Anzahl der Seiten von P hinlänglich groß angenommen wird, δ kleiner als α werden für jeden noch ſo kleinen Werth = α.

Nun ſei die Höhe des Cylinders = H und der Kubikinhalt C deſſelben ſei C = GH, ſo iſt entweder

$$G < K \text{ oder } G > K \text{ oder } G = K.$$

Nimmt man G < K und ſetzt

$$K - G = a$$

ſo iſt, weil in K − p = d

d < a ſein kann, für dieſen Fall auch

$$\frac{K - p < K - G}{}$$

und daher $p > G$

folglich auch $pH > GH$

nämlich es iſt $pH > C.$

Es iſt alſo das Prisma, welches eine Grundfläche $= p$ und eine Höhe $= H$ hat, größer als der Cylinder. Weil aber p in K beſchrieben iſt, ſo liegt dieſes Prisma ganz innerhalb des Cylinders, wenn man es ſo conſtruirt, daß die Kanten deſſelben parallel zu der Axe des Cylinders laufen, und es iſt ſonach das Prisma kleiner als der Cylinder, was der Folgerung $pH > C$ widerſpricht. Es kann alſo nicht ſein $G < K$.

Nimmt man $G > K$ und ſetzt $G - K = \alpha$, ſo iſt, weil in der Gleichung $P - K = \delta$, der Werth von δ kleiner, als der von α werden kann

$$\frac{P - K < G - K}{}$$

und daher $P < G$

alſo auch $PH < GH$

alſo $PH < C.$

Das Prisma PH, das eine Grundfläche $= P$ und eine Höhe $= H$ hat, iſt alſo kleiner als der Cylinder. Weil aber P um K beſchrieben iſt, ſo wird der ganze Cylinder von dem Prisma umſchloſſen, wenn man das Prisma ſo conſtruirt, daß die Kanten deſſelben parallel zu der Axe des Cylinders laufen, und es iſt daher das Prisma nothwendigerweiſe größer, als der Cylinder, was dem erhaltenen Reſultate $PH < C$ widerſpricht. Es kann alſo auch $G > K$ nicht ſein.

Da nun weder ſein kann $G < K$ noch $G > K$, ſo iſt $G = K$ und daher der Kubikinhalt des Cylinders

$$C = KH.$$

Für den Radius der Grundfläche $= R$ aber iſt

$$K = R^2\pi,$$

folglich iſt auch $C = HR^2\pi,$

und dieſes iſt die Formel für den Kubikinhalt eines Cylinders, wenn die Höhe deſſelben $= H$ und der Radius ſeiner Grundfläche $= R$ iſt. Da ſich übrigens bei einem Cylinder leichter der Umfang ſeiner Grundfläche als der Radius derſelben meſſen läßt, und, wenn man den Umfang eines Kreiſes mit U bezeichnet, die Gleichung ſtatt findet

$$U = 2R\pi \text{ alſo } R = \frac{U}{2\pi}$$

ſo iſt auch, wenn man in der obigen Formel dieſen Werth für R ſetzt

$$C = \frac{HU^2}{4\pi}.$$

Iſt nun der Cylinder normal, ſo daß die Axe deſſelben normal auf der Grundfläche ſteht, ſo iſt H der Axe gleich, oder was daſſelbe iſt, die Seite Bb = k des Cylinders iſt zugleich die Höhe deſſelben. Iſt aber die Axe, und alſo auch die Seite k des Cylinders, unter einem Winkel γ gegen die Grundfläche geneigt, ſo erhält man für H den Werth $H = \frac{k \sin \gamma}{r}$, und es iſt in dieſem Falle alſo

$$C = \frac{kR^2\pi \sin \gamma}{r} = \frac{kU^2 \sin \gamma}{4r\pi}$$

Die Seitenfläche eines Cylinders, alſo die krumme Oberfläche deſſelben, wird eben ſo, wie die eines jeden andern Prisma gefunden, wenn man den Umfang eines normalen Querſchnitts deſſelben mit der Seite oder Kante multiplicirt. Iſt nun der Cylinder normal, ſo bildet die Grundfläche ſelbſt einen normalen Querſchnitt, und es iſt daher die krumme Oberfläche eines ſolchen Cylinders

$$= Uk = 2R\pi \cdot k.$$

Addirt man hierzu noch die beiden Kreisflächen, welche die Grundflächen des Cylinders bilden, ſo erhält man die ganze Oberfläche F deſſelben. Für den normalen Cylinder iſt daher

$$F = 2kR\pi + 2R^2\pi$$
$$= 2R\pi\,(k + R).$$

Die ganze Oberfläche eines ſolchen Cylinders iſt daher der krummen Oberfläche eines andern gleich, der dieſelbe Grundfläche hat, und deſſen Seite, und alſo auch deſſen Axe = k + R iſt.

Für einen geneigten Cylinder wird zwar ebenfalls die krumme Oberfläche gefunden, wenn man den normalen Querſchnitt mit der Seite multiplicirt; der Querſchnitt aber iſt in dieſem Falle eine Elypſe, deren Länge ſich nicht durch eine einfache Formel ausdrücken läßt, und es kann daher von der

Oberfläche der ſchiefen Cylinder auch erſt in der zweiten Abtheilung dieſes Werkes die Rede ſein.

Bei einem normalen Cylinder ſteht die Seite Bb ſenkrecht auf der Grundfläche, und alſo auch auf dem Umfange abde derſelben. Die krumme Seitenfläche eines ſolchen Cylinders iſt daher, wenn ſie in einer Ebene dargeſtellt wird, ein Rechteck, deſſen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche und deſſen Höhe der Seite des Cylinders gleich iſt. Wird dieſes Rechteck verzeichnet, und an der Grundlinie ſowohl als an der derſelben gegenüberliegenden Seite zwei dieſe Linien berührende Kreiſe, welche beide außerhalb des Rechtecks liegen, und die den Grundflächen des Cylinders gleich ſind, ſo erhält man das vollſtändige Netz des Cylinders.

Zuſatz 1. Ein normaler Cylinder wird erzeugt, wenn ein Rechteck BCcb um die eine Seite Cc als um eine Axe ſich dreht, bis es wieder in die vorige Lage kommt. In dieſem Falle beſchreibt das Rechteck ſelbſt den Cylinder, die Seite Bb erzeugt die krumme Oberfläche, und die Linien CB und cb ergänzen die beiden Grundflächen deſſelben.

Zuſatz 2. Dreht das Rechteck BCcb ſich um Cc, ſo iſt für Cc = k und CB = R der Kubikinhalt C des erzeugten Cylinders

$$C = kR^2\pi$$

Dreht das Rechteck ſich aber um BC als um eine Axe, und wird der Kubikinhalt des auf dieſe Weiſe erzeugten Cylinders = c geſetzt, ſo iſt

$$c = Rk^2\pi$$

und es iſt daher

$$C : c = kR^2\pi : Rk^2\pi = R : k;$$

die beiden auf dieſe Weiſe gebildeten Cylinder verhalten ſich alſo zu einander, wie die Radien ihrer Grundflächen.

§. 42.

Formeln für den Cylinder.

Wird der Kubikinhalt eines normalen Cylinders = C, die ganze Oberfläche = F, die Seite = k und der Radius der Grundfläche = R geſetzt, ſo hängen dieſe Größen durch die Gleichungen von einander ab

$$C = kR^2\pi \text{ und } F = 2R\pi\,(k + R).$$

Da nun dieſe beiden Gleichungen überhaupt nur vier verſchiedene Größen enthalten, ſo folgt, daß je zwei derſelben hinreichen, um den Werth der beiden übrigen zu beſtimmen. Dieſes führt zu folgenden Formeln:

Gegeben.	Geſucht.	Formeln.
R, k	C	$C = kR^2\pi$
	F	$F = 2R\pi\,(k + R)$
R, C	k	$k = \frac{C}{R^2\pi}$
	F	$F = 2\left(\frac{C}{R} + R^2\pi\right)$
R, F	k	$k = \frac{F}{2R\pi} - R$
	C	$C = \frac{1}{2}FR - R^2\pi$
k, C	R	$R = \sqrt{\frac{C}{k\pi}}$
	F	$F = 2\left[\frac{C}{k} + \sqrt{CK\pi}\right]$
k, F	R	$R = -\frac{1}{2}k + \sqrt{\left[\frac{k^2}{4} + \frac{F}{2\pi}\right]}$
	C	$C = \frac{k}{2}\left[F + k^2\pi - k\sqrt{(2F\pi + k^2\pi^2)}\right]$
C, F	R	R u. k ſind durch die kubiſchen Gleichungen beſtimmt $R^3\pi - \frac{1}{2}FR + C = 0$
	k	$k^3 - \frac{F^2}{4C\pi}\cdot k^2 + \frac{F}{\pi}k - \frac{C}{\pi} = 0$

Zuſatz 1. Wenn Fig. 24. die Radien CB und cb parallel laufen, und eben ſo CD mit cd, ſo ſind die Kreisausſchnitte BCD und bcd gleich und parallel, und es wird da=

her der Kubikinhalt des hierdurch beſtimmten Cylinderausſchnittes ebenfalls, wie der eines Prisma gefunden. Nun iſt für BC = R und $\angle$BCD = φ^0, die Fläche des Ausſchnittes = $\frac{\varphi}{360} \cdot R^2\pi$; folglich iſt der Kubikinhalt von BCDMbcdm

$$= \frac{\varphi}{360} \cdot HR^2\pi$$

wenn H die Höhe des Cylinders bedeutet.

Da ferner die Länge des Bogens BMD = $\frac{\varphi}{360} \cdot 2R\pi$ iſt, ſo erhält man die ganze Oberfläche dieſes Ausſchnittes, wenn der Cylinder normal iſt, durch die Formel

$$H \times \frac{\varphi}{360} \cdot 2R\pi + 2HR + 2. \frac{\varphi}{360} \cdot R^2\pi$$

$$= \frac{\varphi}{180} \cdot R\pi\,[H + R] + 2HR.$$

Zuſatz 2. Wenn CB zu cb und CD zu cd parallel iſt, ſo ſind auch die Kreisabſchnitte BDM und bdm gleich und parallel; es kann alſo auch der Inhalt des, durch BDM und bdm beſtimmten Cylinderabſchnittes nach den für die Prismen überhaupt gegebenen Regeln gefunden werden. Es iſt aber für $\angle$BCD = φ^0 die Fläche des Abſchnittes BMD

$$= R^2\left(\frac{\varphi}{360} \cdot \pi - \frac{\sin \varphi}{2r}\right);$$

folglich iſt der Kubikinhalt des Cylinderabſchnittes

$$= HR^2\left(\frac{\varphi}{360} \cdot \pi - \frac{\sin \varphi}{2r}\right).$$

Die Länge des Bogens BMD iſt = $\frac{\varphi}{360} \cdot 2R\pi$, und die Länge der Sehne BD = $\frac{2R \sin \frac{1}{2}\varphi}{r}$

folglich iſt der Umfang des Kreisabſchnittes BMD

$$\frac{\varphi}{360} \cdot 2R\pi + \frac{2R \sin \frac{1}{2}\varphi}{r}$$

$$= 2R\left[\frac{\varphi}{360} \cdot \pi + \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi}{r}\right].$$

Von einem normalen Cylinder wird daher die ganze Oberfläche eines Abſchnitts ausgedrückt durch die Formel

$$2HR\left[\frac{\varphi}{360}\cdot\pi+\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{r}\right]+2R^2\left[\frac{\varphi}{360}\pi-\frac{\sin\varphi}{2r}\right]$$
$$=2R\cdot\frac{\varphi}{360}\cdot\pi\,(H+R)-2R\left[\frac{R\sin\varphi}{2r}-\frac{H\sin\frac{1}{2}\varphi}{r}\right]$$
$$=2R\cdot\frac{\varphi}{360}\cdot\pi\,(H+R)-\frac{2R\sin\frac{1}{2}\varphi}{r}\left[\frac{R\cos\frac{1}{2}\varphi}{r}-H\right].$$

Zuſatz 3. Bezeichnet man den Kubikinhalt zweier Cylinder mit C und c, ihre Radien mit R und ϱ und ihre Höhen mit H und h, ſo iſt

$$C = HR^2\pi \text{ und } c = h\varrho^2\pi$$
$$\text{folglich iſt } C : c = HR^2 : h\varrho^2$$

und für $H = h$ wird

$$C : c = R^2 : \varrho^2.$$

Cylinder von gleicher Höhe verhalten ſich alſo zu einander, wie die Quadrate der Radien ihrer Grundfläche, und es gilt dieſes auch von ähnlichen Ausſchnitten und ähnlichen Abſchnitten ſolcher Cylinder.

Die krummen Seitenflächen zweier normalen Cylinder von gleicher Höhe verhalten ſich unmittelbar, wie die Radien ihrer Grundflächen; aber für die ganzen Oberflächen derſelben findet kein ſo einfaches Verhältniß ſtatt, denn da, wenn dieſe Flächen mit F und f bezeichnet werden,

$$F = 2R\pi\,(H + R) \text{ und } f = 2\varrho\pi\,(h + \varrho)$$

ſo iſt für $H = h$

$$F : f = R\,(H + R) : \varrho\,(h + \varrho).$$

§. 43.

Allgemeine Bemerkungen über die Prismen.

1. Die Eigenthümlichkeit aller Prismen beſtehet darin, daß ſie von zwei congruenten Grundflächen begränzt werden, die parallel zu einander laufen, und deren homologe Seiten ebenfalls eine parallele Lage zu einander haben. Dieſe letztere Bedingung gehört weſentlich zu der Erklärung eines Prisma, weil nur bei einer ſolchen Lage der beiden Grundflächen, wenn dieſe geradlinig ſind, die Seitenflächen ſämmtlich Parallelogramme ſein müſſen. Dreht man die eine der beiden Grundflächen (ohne dabei ihre parallele Lage gegen die andere zu ändern), ſo daß die homologen Seiten nicht mehr parallel

laufen, ſo läßt ſich der hierdurch beſtimmte Körper auch nicht mehr von den Seiten durch lauter Parallelogramme begränzen, und er hört auf ein Prisma zu ſein.

2. Auch wenn die beiden congruenten und parallelen Grundflächen krummlinige Figuren ſind, gehört der Körper zu der Gattung der Prismen, ſobald ſie eine ſolche Lage zu einander haben, daß die in dieſen Figuren gezogenen gleichliegenden Linien parallel laufen. Nur wenn die beiden Grundflächen Kreiſe ſind, entſteht immer ein Prisma, ſobald dieſe Kreiſe gleich groß ſind und parallel laufen, ohne daß hierbei von einer gleichen Lage homologer Seiten die Rede ſein kann.

3. Ein Prisma entſteht nach der gewöhnlichen Erklärung, wenn irgend eine Figur, welche die Grundfläche bildet, ſich parallel zu ſich ſelbſt bewegt, und es beſchreibt hierbei der Umfang der Figur die Seitenfläche des Prisma. Aus dieſer Erklärung folgt unmittelbar, daß, wenn ein Prisma parallel zu ſeiner Grundfläche von einer Ebene geſchnitten wird, die Oberfläche des Schnittes, der Grundfläche immer congruent ſein muß. Uebrigens kann man die Entſtehung eines Prisma ſich auch auf folgende Art denken: Es haben zwei congruente und parallellaufende Grundflächen eine ſolche Lage zu einander, daß die homologen Seiten derſelben parallel laufen, und es ſind zwei gleichnamige Ecken derſelben durch eine gerade Linie verbunden. Wird nun dieſe Linie parallel zu ſich ſelbſt um den Umfang der Grundflächen herum geführt, ſo beſchreibt ſie die Seitenflächen des Prisma, welches durch dieſe und die gegebenen Grundflächen vollſtändig begränzt wird.

4. Der Kubikinhalt eines jeden Prisma ohne Ausnahme wird gefunden, wenn man die Grundfläche deſſelben mit ſeiner Höhe, alſo mit dem normalen Abſtande der beiden Grundflächen von einander, multiplicirt. Oder es wird auch der Kubikinhalt erhalten, wenn man die Fläche des normalen Querſchnitts, nämlich des Querſchnitts, welcher die ſämmtlichen Kanten normal ſchneidet, mit der Kante des Prisma multiplicirt.

5. Den Flächeninhalt der Seitenflächen eines Prisma erhält man, wenn man den Umfang des normalen Querſchnitts mit

mit der Kante des Prisma multiplicirt; und werden hierzu noch die beiden Grundflächen addirt, ſo erhält man die ganze Oberfläche des Prisma.

6. Wird der Kubikinhalt eines Prisma mit P bezeichnet, die Seitenfläche = S, die Grundfläche = G und die ganze Oberfläche = F geſetzt, und ſetzt man ferner die Kante = k, den Neigungswinkel derſelben gegen die Grundfläche = γ, die Höhe des Prisma = H, die Fläche des normalen Querſchnitts = f und den Umfang dieſes Querſchnitts = U, ſo hängen dieſe Größen durch folgende Grundformeln von einander ab: Es iſt

1. $H = \frac{k \sin \gamma}{r}$

2. $P = GH = \frac{Gk \sin \gamma}{r} = kf$

3. $S = kU$

4. $F = 2G + S = 2G + kU.$

Setzt man ferner $f = Ux$, nimmt man alſo an, daß die Fläche des Querſchnitts erhalten wird, wenn man den Umfang deſſelben mit x multiplicirt, ſo iſt auch

5. $P = kUx = Sx.$

Formeln, durch welche um ſo mehr der Inhalt und die Oberfläche eines Prismá in den meiſten Fällen ſich berechnen läßt, da man faſt immer von einem gegebenen Prisma die Größe der zu dieſer Berechnung erforderlichen Stücke durch eine wirkliche Meſſung ermitteln kann.

7. Der normale Querſchnitt des Prisma hat wenigſtens das mit der Grundfläche gemein, daß beide Figuren von gleich vielen Seiten eingeſchloſſen ſind. Die Winkel dieſes Querſchnittes ſind die Neigungswinkel der Parallelogramme, welche als Seitenflächen das Prisma begränzen, und iſt von der Grundfläche irgend eine Seite = A, der Winkel des an dieſer Seite anliegenden Parallelogramms = α, und wird die in dieſer Fläche liegende Seite des normalen Querſchnitts = a geſetzt, ſo findet immer die Gleichung ſtatt

$$a = \frac{A \sin \alpha}{r}.$$

Man kann alſo in jedem Falle, wenn einige Stücke eines Prisma gegeben ſind, durch welche daſſelbe der Größe

und der Form nach beſtimmt iſt, die einzelnen Theile des Querſchnitts durch Rechnung finden.

Uebrigens iſt bereits §. 38. gezeigt worden, wie man, wenn die Grundfläche der Größe und Form nach gegeben iſt, und außerdem die Neigung der Kanten und der Winkel eines der Parallelogramme, die Winkel aller übrigen und ihre Neigung gegen die Grundfläche berechnen kann. Da man aber auf dieſe Weiſe von jeder der körperlichen Ecken an der Grundfläche alle Theile außer der Neigung der beiden aneinander ſtoßenden Parallelogramme kennen lernet, ſo iſt es auch nicht ſchwer, dieſen Neigungswinkel ebenfalls zu finden.

8. Wird ein Prisma parallel zu einer Kante geſchnitten, ſo iſt, wie ſich leicht einſehen läßt, der Querſchnitt immer ein Parallelogramm und es gilt dieſes auch von einem Cylinder, wenn man ihn parallel zur Axe ſchneidet, oder, was daſſelbe iſt, parallel zur Seite: und eben ſo gilt dieſer Satz von jedem anderen zu der Gattung der Prismen gehörigen Körper, deſſen Grundfläche irgend eine krummlinige Figur iſt. Hieraus folgt, daß jeder, durch einen ſolchen Schnitt von dem Prisma getrennte Theil, ebenfalls ein Prisma iſt.

9. Zwei Prismen ſind ähnlich, wenn ſie von lauter ähnlichen Flächen eingeſchloſſen werden, die in derſelben Ordnung nebeneinander liegen. Sie müſſen alſo ähnliche Grundflächen haben, und die an homologen Seiten derſelben anliegenden Parallelogramme müſſen ebenfalls ähnlich ſein, und eine gleiche Lage in beiden haben; ſo daß, wenn in dem Prisma P eine Ecke gebildet wird von dem Winkel a der Grundfläche G, den hier die Seiten B und C einſchließen, und von den Winkeln b und c der beiden anſtoßenden Parallelogramme, deren gemeinſchaftliche Kante = K iſt, und in welchen die Winkel ſo liegen, daß b von B und K, und c von C und K eingeſchloſſen wird; ſo muß in dem Prisma p, wenn es dem P ähnlich ſein ſoll, die Grundfläche g ähnlich ſein der G, und es muß, wenn in g die Seiten β und γ der B und C homolog ſind, die alſo ebenfalls einen Winkel = a einſchließen, der von β und der Kante k des Prisma p gebildete Winkel dem von B und K gebildeten Winkel b, und der von γ und k gebildete dem von C und K gebildeten Winkel c gleich ſein,

und alſo $B : K = b : k.$

Hieraus geht zugleich hervor, daß ähnliche Prismen auch immer eine gleiche Neigung gegen ihre Grundflächen haben, die immer durch die gegebenen Winkel a, b und c vollkommen beſtimmt iſt. Es können aber zwei Prismen ähnliche Grundflächen haben, gegen welche die Kanten in beiden gleich geneigt ſind, und es kann, wenn B und b homologe Seiten dieſer Grundflächen, und K und k die Kanten der Prismen ſind, die Proportion ſtatt finden

$$B : K = b : k$$

ohne daß deshalb die Prismen ähnlich zu ſein brauchen, weil derſelbe Neigungswinkel γ der Kante k bleiben kann, während K die Lage gegen die anliegenden Seiten der Grundfläche ändert. Nun iſt nach der angegebenen Bezeichnung

$$G : g = B^2 : b^2$$

und $K : k = B : b$

alſo $GK : gk = B^3 : b^3$

und daher auch $GK \sin \gamma : gk \sin \gamma = B^3 : b^3$

oder $P : p = B^3 : b^3.$

Es verhalten ſich alſo immer ähnliche Prismen zu einander, wie die dritten Potenzen der in ihnen ähnlich liegenden Seiten; aber Prismen, die ſich auf eine ſolche Weiſe zu einander verhalten, ſind deswegen nicht nothwendiger Weiſe ähnlich.

10. Es iſt bereits bemerkt worden, daß die Grundfläche eines Prisma, wenn es nur eine ebene Figur iſt, jede beliebige Form haben kann, und daher kann dieſelbe nicht blos ein Theil der Kreisfläche ſein, (eine Form, die bereits §. 42. berückſichtigt worden iſt,) oder überhaupt irgend eine krummlinige Figur, oder eine ſolche, die zum Theil von krummen und zum Theil von geraden Linien eingeſchloſſen wird, oder eine Figur mit zum Theil einſpringenden Winkeln ꝛc.; ſondern es kann die Grundfläche eines Prisma auch eine Figur ſein, innerhalb welcher ein Stück fehlt, und der Körper bildet in dieſem Falle ein zum Theil hohles Prisma. Iſt die Grundfläche ein Kreisring, alſo ein Kreis, innerhalb welches ein anderer herausgeſchnitten iſt, ſo wird das Prisma eine Röhre: es kann aber auch aus dem Kreiſe eine andere Figur heraus-

geſchnitten ſein, oder aus einer andern Figur ein Kreis, oder irgend eine Figur aus irgend einer anderen. In allen dieſen Fällen erhält man hohle Prismen, deren Kubikinhalt, wie der eines jeden anderen Prisma, gefunden wird, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt. Beſteht die Grundfläche z. B. aus einem Kreisringe, und iſt der Radius des äußeren Kreiſes = R und der des innern = ϱ, ſo iſt die Fläche des Ringes =

$$R^2\pi - \varrho^2\pi = (R + \varrho)(R - \varrho)\pi$$

und der Kubikinhalt der Röhre iſt daher in dieſem Falle

$$= H(R + \varrho)(R - \varrho)\pi.$$

Auch die Oberfläche eines ſolchen hohlen Prisma wird nach der bekannten Regel gefunden; nur muß man, wenn auch die innere Fläche der Höhlung mit angegeben werden ſoll, noch das Produkt aus dem Umfange der innerhalb fehlenden Figur des normalen Querſchnitts und der Seite des Prisma, zu der äußeren Fläche addiren. Iſt z. B. von einer normalen Röhre der Radius des äußeren Kreiſes = R, der des innern = ϱ und die Seite oder die Höhe = H, ſo iſt

die äußere Seitenfläche = $2R\pi \times H$

die innere = $2\varrho\pi \times H$

und die beiden Grundflächen ſind = $2(R^2 - \varrho^2)\pi$,

folglich iſt die ganze Oberfläche einer ſolchen Röhre, die innere Fläche mitgerechnet, =

$$2R\pi(H + R) + 2\varrho\pi(H - \varrho).$$

Ganz allgemein iſt, wenn der äußere Umfang des normalen Querſchnitts = U, der innere Umfang = u, die zwiſchen U und u enthaltene Fläche = f und die Kante oder Seite des Prisma = k iſt, die ganze Oberfläche deſſelben, die innere Fläche mitgerechnet, =

$$(U + u)k + 2f.$$

Uebrigens iſt leicht einzuſehen, daß weder der Kubikinhalt noch die Oberfläche eines ſolchen Prisma geändert wird, wenn die innere Figur ihre Lage gegen die äußere ändert, nur verſteht es ſich von ſelbſt, daß die eine immer ganz von der andern umſchloſſen ſein muß.

§. 44.

Beiſpiel als Norm für das Berechnen der Prismen.

Von der Grundfläche abcd eines 4ſeitigen Prisma, Fig. 25., kennt man die drei Seiten

$$A = 48{,}5\ ,\ B = 63{,}7\ ,\ C = 85{,}4 \text{ Zoll}$$

und die von dieſen Seiten eingeſchloſſenen Winkel

$$a = 138^\circ\ 28' \text{ und } b = 81^\circ\ 37'$$

und es iſt die Lage der Kanten dadurch beſtimmt, daß man weiß: es iſt der Winkel, welchen die Kante k′ an a mit ab bildet = 83° 20′ und der Winkel, welchen ſie mit ad bildet = 76° 12′; die Länge der Kante ſelbſt iſt k = 88,5. Es ſollen alle einzelnen Theile des hierdurch beſtimmten Prisma berechnet werden.

Aufl ö ſung.

1. Berechnung der Grundfläche.

Da von dem Viereck abcd fünf nebeneinander liegende Stücke gegeben ſind, ſo laſſen ſich die fehlenden drei Stücke D, ∠c und ∠d, ſo wie der Flächeninhalt der ganzen Figur, auf verſchiedene Weiſe trigonometriſch berechnen, und man findet

$$D = 102;\ \angle c = 67^\circ\ 31',\ \angle d = 72^\circ\ 24'$$

und der Flächeninhalt G des ganzen Vierecks wird gefunden

$$G = 5048{,}65.$$

2. Die Neigung der Kanten gegen die Grundfläche.

Da von der körperlichen Ecke a alle drei Winkel gegeben ſind, durch welche dieſelbe gebildet wird; ſo läßt ſich hieraus die Neigung der Kante gegen die Fläche dab mit Hülfe der Formel §. 30. berechnen, nämlich es iſt, wenn dieſe drei Winkel mit a, β und δ bezeichnet werden $\frac{a+\beta+\delta}{2} = S$, und wenn die Neigung der Kante k = m geſetzt wird,

$$\sin m = \frac{2\sqrt{\sin S \sin (S-a) \sin (S-\beta) \sin (S-\delta)}}{\sin a}$$

Nun iſt in der Ecke bei a

$$\angle dab' = \angle a = 138^0\ 28'$$
$$\angle bak' = \angle \beta = 83^0\ 20'$$
$$\angle dak' = \angle \delta = 76^0\ 12'$$
$$\text{alſo } S = 149^0$$

folglich iſt $\log \sin S = \log \sin 149^0 = 9{,}7118393$
$\log \sin (S - a) = \log \sin 10^0\ 32' = 9{,}2619941$
$\log \sin (S - \beta) = \log \sin 65^0\ 40' = 9{,}9595964$
$\log \sin (S - \delta) = \log \sin 72^0\ 48' = 9{,}9801299$
$38{,}9135597$
$(:2) = 19{,}4567798$
$\log 2 = 0{,}3010300$
$19{,}7578098$
$\log \sin a = \log \sin 138^0\ 28' = 9{,}8215500$
daher iſt $\log \sin m = 9{,}9362598$

Es iſt alſo der Neigungswinkel $m = 59^0\ 42'\ 40''$.

3. Berechnung der drei Neigungswinkel der Ecke a.

Von dieſer Ecke ſind die drei ebenen Winkel gegeben
$$a = 138^0\ 29';\ \beta = 83^0\ 20';\ \delta = 76^0\ 12'$$
und werden die ihnen gegenüberliegenden Neigungswinkel bezeichnet mit a', β' und δ', ſo iſt nach §. 20. II. No. 1.
$$\sin \tfrac{1}{2} a' = r \sqrt{\frac{\sin (S - \beta) \sin (S - \delta)}{\sin \beta \sin \delta}}.$$

Es iſt aber $\log \sin (S - \beta) = 9{,}9595964$
$\log \sin (S - \delta) = 9{,}9801299$
$19{,}9397263$

$\log \sin \beta = 9{,}9970535$
$\log \sin \delta = 9{,}9872793$
$19{,}9843328$
$1{,}9553935 - 2$
$(:2)\ 0{,}9776967 - 1$
$\log r = 10{,}0000000$
alſo $\log \sin \tfrac{1}{2} a' = 9{,}9776967$

und es iſt daher $\tfrac{1}{2} a' = 71^0\ 47'\ 41''$, alſo $a' = 143^0\ 35'\ 22''$, und auf gleiche Weiſe findet man
$\beta' = 62^0\ 46'\ 4''$ und $\delta' = 60^0\ 23'\ 8''$.

Hiernach iſt der Neigungswinkel der beiden an a in der Kante k zuſammenſtoßenden Parallelogramme $= a' = 143^0\ 35'\ 22''$;

der Neigungswinkel, welchen das an der Grundfläche mit ba anliegende Parallelogramm mit der Grundfläche bildet = $\beta' = 62^0\ 46'\ 4''$; und der Neigungswinkel, welchen das an der Grundfläche mit da anliegende Parallelogramm mit der Grundfläche macht = δ' = $60^0\ 23'\ 8''$.

4. Berechnung der Ecke b.

Da $\angle k'ab = 83^0\ 20'$, ſo iſt, wenn die Kante an b mit k'' bezeichnet wird, $\angle k''ba = 96^0\ 40' = \alpha$. Außerdem kennt man $\angle abc = b = 81^0\ 37'$ und den Neigungswinkel der Kante k'' gegen die Grundfläche $m = 59^0\ 42'\ 40''$, und hieraus läßt ſich die Größe des Winkels k''bc mittelſt der Formel §. 38. berechnen; nämlich es iſt, wenn man dieſen Winkel = γ ſetzt

$$\cos\gamma = \frac{\cos\alpha\cos b + \sin b\sqrt{(\cos^2 m - \cos^2\alpha)}}{r}$$

$$= r\left[\frac{\cos\alpha\cos b}{r^2} + \frac{\sin b}{r}\sqrt{\left(\frac{\cos^2 m}{r^2} - \frac{\cos^2\alpha}{r^2}\right)}\right].$$

Nun iſt $\log\left(\frac{\cos m}{r}\right) = 0{,}7027407-1$

alſo $\log\frac{\cos^2 m}{r^2} = 0{,}4054814-1$, u. daher $\frac{\cos^2 m}{r} = 0{,}25438$

und $\log\left(\frac{\cos\alpha}{r}\right) = 0{,}0648057-1$

alſo $\log\frac{\cos^2\alpha}{r^2} = 0{,}1296114-2$, u. daher $\frac{\cos^2\alpha}{r^2} = 0{,}013477.$

Da nun $\frac{\sin b}{r} = 0{,}98931$, ſo iſt

$$\cos\gamma = r\left[\frac{\cos\alpha\cos b}{r^2} + 0{,}98931\sqrt{0{,}240903}\right]$$

$$= r\left[\frac{\cos\alpha\cos b}{r^2} + 0{,}98931\cdot 0{,}49082\right]$$

$$= r\left[\frac{\cos\alpha\cos b}{r^2} + 0{,}48557\right].$$

Man findet aber $\frac{\cos\alpha\cos b}{r^2} = -\ 0{,}016926$

folglich iſt $\cos\gamma = r(-0{,}016926 + 0{,}48557) = r \times 0{,}468644$ und es iſt daher $\gamma = 62^\circ\ 3'\ 13''$.

Man kennt alſo jetzt die drei ebenen Winkel der körperlichen Ecke b, nämlich es iſt

$$\angle abc = \angle b = 81^\circ\ 37'$$
$$\angle k''ba = \angle \alpha = 96^\circ\ 40'$$
$$\text{und } \angle k''bc = \angle \gamma = 62^\circ\ 3'\ 13''$$

und es laſſen ſich die Neigungswinkel dieſer Ecke leicht berechnen. Bezeichnet man dieſe Winkel der Reihe nach, ſo wie ſie den ebenen Winkeln gegenüberliegen, mit b′, α'' und γ'', ſo iſt der hier mit γ'' bezeichnete Winkel derſelbe, welcher bereits in No. 3. gefunden worden iſt, und der dort mit β' bezeichnet wurde.

Für den Neigungswinkel an der Kante $k'' = b'$ kann die Formel benutzt werden

$$\cos \tfrac{1}{2}b' = r\sqrt{\frac{\sin S \sin (S - b)}{\sin \alpha \sin \gamma}}$$

und es iſt $\log \sin S = \log \sin 120^\circ 10' 6\tfrac{1}{2}'' = 9{,}9368068$

$\log \sin (S - b) = \log \sin 38^\circ 33' 6\tfrac{1}{2}'' = 9{,}7946428$

$19{,}7314496$

$\log \sin \alpha = 9{,}9970535$

$\log \sin \gamma = 9{,}9461507$

$19{,}9432042$

$1{,}7882454 - 2$

$(:2) = 0{,}8941227 - 1$

$\log r = 10{,}0000000$

$\log \cos \tfrac{1}{2}b' = 9{,}8941227$

und es iſt daher $\tfrac{1}{2}b' = 38^\circ 24' 16''$, alſo $b' = 76^\circ 48' 32''$; auf gleiche Weiſe findet man

$$\alpha'' = 102^\circ\ 10'\ 57'' \text{ und } \gamma'' = 60^\circ\ 23'\ 8''.$$

Hiernach iſt der Neigungswinkel der beiden in der Kante k″ zuſammenſtoßenden Parallelogramme $= b' = 76^\circ$ $48'\ 32''$;

der Neigungswinkel des an ab anliegenden Parallelogramms mit der Grundfläche $= 60^\circ\ 23'\ 8''$; und

der Neigungswinkel des an bc anliegenden Parallelogramms mit der Grundfläche $= \alpha'' = 102^\circ\ 10'\ 57''$.

5. Berechnung der Ecke c.

Da der Winkel $k''bc = 62^0\ 3'\ 13''$, ſo iſt; wenn die an c anſtoßende Kante mit k''' bezeichnet wird, der Winkel $k'''cb = 117^0\ 56'\ 47''$. Außerdem iſt nach No. 1. $\angle bcd = 67^0\ 31'$, und der Neigungswinkel, welchen das Parallelogramm an bc mit der Grundfläche bildet, iſt nach No. 4. gefunden worden $= 102^0\ 10'\ 57''$; folglich kennt man von der körperlichen Ecke c zwei ebene Winkel und den von denſelben eingeſchloſſenen Neigungswinkel, woraus der dritte ebene Winkel $k'''cd$ ſich mittelſt der Formeln §. 20. II. No. 2. berechnen läßt. Man könnte übrigens ſtatt deſſen auch die §. 38. gefundene Formel, eben ſo wie bei No. 4. anwenden, weil auch hier der Neigungswinkel der Kante k''' gegen die Grundfläche $= 59^0\ 42'\ 40'' = m$ bekannt iſt. Setzt man hier

$$\angle k'''cb = 117^0\ 56'\ 47'' = B$$
$$\angle bcd = 67^0\ 31' = C,$$

den von dieſen ebenen Winkeln eingeſchloſſenen Neigungswinkel $= 102^0\ 10'\ 57'' = \delta'$, und ſetzt man nun den dritten ebenen Winkel $k'''cd = D$, ſo iſt nach §. 20.

$$\cos D = \frac{\sin B \sin C \cos \delta' + r \cos B \cos C}{r^2}$$
$$= r\left[\frac{\sin B \sin C \cos \delta'}{r^3} + \frac{\cos B \cos C}{r^2}\right].$$

Nun iſt $\log \frac{\sin B}{r} = 0{,}9461507 - 1$

$$\log \frac{\sin C}{r} = 0{,}9656677 - 1$$
$$\log \frac{\cos \delta'}{r} = 0{,}3243364 - 1$$
$$\overline{0{,}2361548 - 1.}$$

Die dieſem Logarithmen entſprechende Zahl iſt $= 0{,}1722482$, und ſie muß negativ genommen werden, weil der Ausdruck $\frac{\sin B \sin C \cos \delta'}{r^3}$ den negativen Factor $\cos \delta'$ enthält.

Ferner iſt

$$\log \frac{\cos B}{r} = 0{,}6708542 - 1$$

$$\log \frac{\cos C}{r} = 0{,}5825345 - 1$$

$$0{,}2533887 - 1,$$

und die hierzu gehörige Zahl = 0,1792209 iſt ebenfalls negativ, weil cos B einen negativen Werth hat. Es iſt alſo

$$\frac{\sin B \sin C \cos \delta}{r^3} = -0{,}1722482$$

$$+ \frac{\cos B \cos C}{r^2} = -0{,}1792209$$

folglich iſt $\cos D = -0{,}3514691 \times r$

und daher $D = 110^0\ 34'\ 38''$.

Wird nun der Neigungswinkel an der Kante k''', der dem Winkel bcd = C gegenüberliegt, mit c' bezeichnet, und aus den gegebenen Stücken B, C und δ' berechnet, ſo kann dieſes mit Hülfe der Formeln §. 20. II. No. 3. geſchehen.

Hiernach iſt

$$\text{tg } c' = \frac{\text{tg } \delta' \sin \psi}{\sin (B - \psi)} \text{ für tg } \psi = \frac{\text{tg } C \cos \delta'}{r}.$$

Nun iſt aber log tg C = 10,3831332
log cos δ' = 9,3243364
19,7074696
log r = 10,0000000
log tg ψ = 9,7074696
und daher iſt $\psi = 152^0\ 59'\ 2''$
da nun $B = 117^0\ 56'\ 47''$
ſo iſt $B - \psi = -\ 35^0\ 2'\ 15''$.
Es iſt aber log sin ψ = 9,6572863
log tg δ' = 10,6657717
20,3230580
log sin (B − ψ) = 9,7589969
folglich iſt tg c' = 10,5640611
und daher $c' = 74^0\ 44'\ 18''$.

Endlich findet man den Neigungswinkel des Parallelogramms an cd gegen die Grundfläche = 112°. 43' 48''.

Außerdem iſt gefunden worden der Neigungswinkel an der Kante $k''' = 74^\circ\ 44'\ 18''$.

6. Berechnung der Ecke d.

Es iſt gefunden worden in No. 5. $\angle k'''cd = 110^\circ\ 34'\ 38''$, alſo iſt, wenn die Kante an $d = k''''$ geſetzt wird, $\angle k''''dc = 69^\circ\ 25'\ 22''$. Außerdem iſt gegeben $k'ad = 76^\circ\ 12'$, und daher iſt $\angle k''''da = 103^\circ\ 48'$. Da nun ferner nach No. 1. $\angle adc = 72^\circ\ 24'$, ſo kennt man von der Ecke d alle drei ebenen Winkel, und es laſſen ſich daher die Neigungswinkel derſelben leicht berechnen. Setzt man hier

$$\angle k''''dc = 69^\circ\ 25'\ 22'' = C$$
$$\angle k''''da = 103^\circ\ 48' = A$$
$$\angle adc = 72^\circ\ 24' = D,$$

und den dieſem letzteren gegenüberliegenden Neigungswinkel, alſo den Neigungswinkel an der Kante $k'''' = d'$, ſo iſt

$$\cos d' = r\left(\frac{r \cos D}{\sin A \sin C} - \frac{\cos A \cos C}{\sin A \sin C}\right).$$

Es iſt aber log sin A = 9,7872793
log sin C = 9,9713683
alſo log sin A sin C = 19,9586476

log r cos D = 19,4805385
log sin A sin C = 19,9586476
0,5218909 – 1, wozu die Zahl gehört 0,3325760

log cos A = 9,3775493
log cos C = 9,5458876
18,9234369
log sin A sin C = 19,9586476
0,9647893 – 2, und hierzu gehört die Zahl 0,0922124, welche negativ iſt, weil der Ausdruck $\frac{\cos A \cos C}{\sin A \sin C}$ den negativen Factor cos A enthält. Es iſt alſo

$$\frac{r \cos D}{\sin A \sin C} = +\ 0{,}3325760$$
$$-\frac{\cos A \cos C}{\sin A \sin C} = +\ 0{,}0922124$$

alſo iſt $\cos d' = r \times 0{,}4247884$

und es iſt daher $d' = 64^\circ\ 51'\ 48''$.

7. Zuſammenſtellung.

In der bisherigen Rechnung hat man die ſämmtlichen Winkel des, durch die in der Aufgabe gegebenen Stücke, beſtimmten Prisma gefunden, und es iſt hiernach, wenn die Neigungswinkel an den vier Kanten mit a′, b′, c′ und d′ bezeichnet werden, ſo daß a′ zu der Kante an a; b′ zu der Kante an b gehört ꝛc.

nach	No. 3,	a′ =	143° 35′ 22″
=	No. 4,	b′ =	76° 48′ 32″
=	No. 5,	c′ =	74° 44′ 18″
=	No. 6,	d′ =	64° 51′ 48″
		Summe =	360°

und dieſes ſind die vier Winkel des normalen Querſchnitts des Prisma.

Bezeichnet man ferner die Winkel der Parallelogramme, welche die Seitenfläche des Prisma bilden, in der Art, daß von dem Parallelogramme

an	ad	der Winkel an	a =	k′ad	= A′	geſetzt	wird
=	ba	= = =	b =	k″ba	= B′	=	=
=	cb	= = =	c =	k‴cb	= C′	=	=
=	dc	= = =	d =	k⁗dc	= D′	=	=

ſo iſt	A′ = 76° 12′	alſo	k⁗da =	103° 48′
	B′ = 96° 40′	=	k′ab =	83° 20′
	C′ = 117° 56′ 47″	=	k″bc =	62° 3′ 13″
	D′ = 69° 25′ 22″	=	k‴cd =	110° 34′ 38″.

Werden nun noch die Winkel, welche die Seitenflächen mit der Grundfläche bilden, durch α, β, γ und δ bezeichnet, ſo daß der Winkel an der Seite da = A der Grundfläche mit α, der an ab = B mit β, der an bc = C mit γ und der an cd = D mit δ bezeichnet wird, ſo iſt

$$\alpha = 60^\circ\ 23'\ 8''$$
$$\beta = 62^\circ\ 46'\ 4''$$
$$\gamma = 102^\circ\ 10'\ 57''$$
$$\delta = 112^\circ\ 43'\ 48''.$$

Der Neigungswinkel der Kante gegen die Grundfläche aber iſt nach No. 2. gefunden worden

$$m = 59^\circ\ 42'\ 40''.$$

8. Berechnung des normalen Querſchnitts.

Wenn a′b′c′d′ Fig. 25 a. der normale Querſchnitt iſt, ſo ſind die Winkel deſſelben bereits aus dem Vorhergehenden bekannt, und da die Seiten dieſes Vierecks den normalen Abſtand der Kanten des Priſma von einander ausdrücken, ſo laſſen ſich die Werthe derſelben aus den bekannten Seiten der Grundfläche leicht berechnen. Nämlich es iſt
a′b′ der normale Abſtand der Kanten k′ und k″ von einander, alſo die Höhe des Parallelogramms an ab, Fig. 25., wenn k als die Grundlinie deſſelben angenommen wird. Folglich iſt

$$a'b' = \mathfrak{B} = \frac{(ab)\ \sin\ k''ba}{r} = \frac{B\ \sin\ B'}{r}$$

und eben ſo $b'c' = \mathfrak{C} = \frac{C\ \sin\ C'}{r}$

$$c'd' = \mathfrak{D} = \frac{D\ \sin D'}{r}$$

$$\text{und } d'a' = \mathfrak{A} = \frac{A\ \sin\ A'}{r}.$$

Hiernach iſt alſo

$$\mathfrak{B} = \frac{63{,}7\ \sin\ 83^0\ 20'}{r} = 63{,}3$$

$$\mathfrak{C} = \frac{85{,}4\ \sin\ 62^0\ 3'\ 13''}{r} = 75{,}4$$

$$\mathfrak{D} = \frac{102\ \sin\ 69^0\ 25'\ 22''}{r} = 95{,}5$$

$$\mathfrak{A} = \frac{48{,}5\ \sin\ 76^0\ 12'}{r} = 47{,}1$$

Da ferner die Fläche f des Vierecks a′b′c′d′ ausgedrückt wird durch

$$f = \frac{\mathfrak{AB}\ \sin\ a'}{2\ r} + \frac{\mathfrak{CD}\ \sin\ c'}{2\ r}$$

$$\text{und da } \frac{\mathfrak{AB}\ \sin\ a'}{2\ r} = 884{,}84$$

$$\text{und } \frac{\mathfrak{CD}\ \sin\ c'}{2\ r} = 3473{,}38$$

ſo iſt f = 4358,22.

9. Der Kubikinhalt des Prisma.

Setzt man dieſen = P, ſo iſt

$$P = \frac{k \sin m \times G}{r} \text{ oder auch } P = kf.$$

Die erſtere Formel giebt 385814 Kubikzoll
und die letztere 385703 "

Die hier ſich ergebende kleine Differenz von 111 Kubikzoll entſteht dadurch, daß die bei den berechneten Winkeln vorkommenden Secunden nur ungefähr beſtimmt, aber nicht ganz genau ermittelt worden ſind, ſo daß bei dem einen oder dem anderen dieſer Winkel eine Differenz von einer oder zwei Secunden vorkommen kann.

10. Von der Oberfläche des Prisma.

Die ganze Oberfläche F des Prisma wird ausgedrückt durch

$$F = k(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D}) + 2G$$
$$= 88{,}5 \times 281{,}3 + 2 \times 5048{,}65$$

und es iſt daher

$$F = 34992{,}35 \text{ Quadratzoll.}$$

§. 45.

Einige Aufgaben.

1. Ein Prisma, deſſen Kubikinhalt = P gegeben iſt, hat ein regelmäßiges Dreieck zur Grundfläche, und die Höhe deſſelben iſt der $m$fachen Seite der Grundfläche gleich; man ſoll hieraus die Länge der Seite und auch die ganze Oberfläche finden für den Fall, wenn das Prisma normal iſt.

Auflöſung. Setzt man die Seite des Dreiecks, welches die Grundfläche bildet, = x, ſo iſt die Grundfläche G ſelbſt, weil das Dreieck gleichſeitig ſein ſoll,

$$G = \frac{x^2}{4}\sqrt{3};$$

da nun ſein ſoll die Höhe $H = mx$

$$\text{ſo wird } GH = \frac{mx^3}{4}\sqrt{3}$$

und alſo auch $\frac{mx^3}{4} \sqrt{3} = P$,

woraus folgt $x = \sqrt[3]{\left(\frac{4P}{m\sqrt{3}}\right)}$.

Da nun die Oberfläche des ganzen Priſma ausgedrückt wird durch

$$F = 3x \times mx + 2G$$
$$= 3mx^2 + \frac{x^2}{2}\sqrt{3} = x^2 (3m + \tfrac{1}{2}\sqrt{3})$$

ſo iſt auch $F = (3m + \frac{1}{2}\sqrt{3}) \sqrt[3]{\left(\frac{4P}{m\sqrt{3}}\right)^2}$

$$= (6m + \sqrt{3}) \sqrt[3]{\left(\frac{2P^2}{3m^2}\right)}.$$

Zuſatz. Soll die Höhe des Priſma zweimal ſo groß ſein als die Höhe des Dreiecks, welches die Grundfläche bildet, ſo iſt, weil dieſe Höhe ausgedrückt wird durch $\frac{x}{2}\sqrt{3}$, der Werth von $m = \sqrt{3}$. Da nun gefunden wurde

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{4P}{m\sqrt{3}}\right)},$$

ſo iſt für dieſen Fall $x = \sqrt[3]{\left(\frac{4P}{3}\right)}$

alſo wenn man $P = 6p$ ſetzt, $x = 2\sqrt[3]{p}$.

Die Seite erhält alſo einen rationalen Werth, wenn p ein Kubus iſt, alſo wenn der gegebene Kubikinhalt P das 6fache eines Kubus iſt.

2. Man kennt von einer regelmäßigen normalen nkantigen Säule den Kubikinhalt = P, und weiß, daß die Höhe derſelben dem Durchmeſſer des Kreiſes gleich iſt, in welchen das Vielek, das die Grundfläche bilden ſoll, beſchrieben werden kann; es ſoll die Seite der Säule gefunden werden.

Auflöſung. Für $\varphi = \frac{360^0}{n}$ iſt, wenn die Seite des nEcks = x, die Fläche deſſelben = G, und der Radius des dazu gehörigen Kreiſes = R geſetzt iſt

$$G = \frac{nx^2 \cos \frac{1}{2}\varphi}{4 \sin \frac{1}{2}\varphi} = \frac{nx^2 \cot \frac{1}{2}\varphi}{4r}$$

und $2R = \dfrac{xr}{\sin \frac{1}{2}\varphi}$.

Es iſt alſo $2R \times G = P = \dfrac{nx^3 \cot \frac{1}{2}\varphi}{4 \sin \frac{1}{2}\varphi}$

und daher $x^3 = \dfrac{4P \sin \frac{1}{2}\varphi}{n \cot \frac{1}{2}\varphi}$

alſo $x = \sqrt[3]{\dfrac{4P \sin \frac{1}{2}\varphi}{n \cot \frac{1}{2}\varphi}}$.

Die ganze Oberfläche F dieſer Säule, wenn ſie normal iſt, wird ausgedrückt durch

$$F = nx \times 2R + 2G$$
$$= 2\,[nRx + G]$$

es iſt alſo auch

$$F = 2\left[nx \cdot \frac{xr}{\sin \frac{1}{2}\varphi} + \frac{nx^2 \cot \frac{1}{2}\varphi}{4r}\right]$$
$$= 2nx^2 \left(\frac{r}{\sin \frac{1}{2}\varphi} + \frac{\cot \frac{1}{2}\varphi}{4r}\right).$$

Man kann alſo auch F finden, und es läßt ſich auch umgekehrt, wenn die Oberfläche F gegeben iſt, der Werth von x berechnen.

Da endlich $R = \dfrac{xr}{2 \sin \frac{1}{2}\varphi}$, ſo iſt

$$R = \frac{r}{2 \sin \frac{1}{2}\varphi} \sqrt[3]{\left(\frac{4P \sin \frac{1}{2}\varphi}{n \cot \frac{1}{2}\varphi}\right)} = \frac{r}{2 \sin \frac{1}{2}\varphi} \sqrt[3]{\left(\frac{8P \sin^3 \frac{1}{2}\varphi}{2nr \sin \frac{1}{2}\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi}\right)}$$
$$= r \sqrt[3]{\left(\frac{P}{nr^2 \sin \varphi}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{Pr}{n \sin \varphi}\right)}.$$

Zuſatz. Für $n = 4$ findet man aus dieſen Formeln

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{P\sqrt{2}}{2}\right)} \text{ und } R = \sqrt[3]{\left(\frac{P}{4}\right)}$$

und für $n = 6$ wird

$$x = R = \sqrt[3]{\left(\frac{P}{3\sqrt{3}}\right)}$$

3. In einem dreiſeitigen normalen Prisma von der Höhe $= H$

= H, und von deſſen Grundfläche ABC, Fig. 26., man die drei Seiten BC = a, AC = b und AB = c kennt, iſt eine cylinderförmige Röhre, deren Grundfläche der Kreis $\alpha\beta\gamma$ iſt, ſo enthalten, daß der Abſtand derſelben von allen drei Seiten gleich groß iſt, und es iſt dieſer Abſtand $a\alpha = b\beta = c\gamma = d$ gegeben; man ſoll die Formel für den Kubikinhalt dieſes Körpers beſtimmen.

Aufloͤſung. Zieht man von dem Dreieck ABC die Kreisfläche $\alpha\beta\gamma$ ab, ſo bleibt die Grundfläche von dem maſſiven Theile des Priſma übrig, und dieſe mit H multiplicirt, giebt den geſuchten Kubikinhalt. Da übrigens ſein ſoll

$$a\alpha = b\beta = c\gamma = d$$

ſo iſt auch, wenn man von dem Mittelpunkt D des Kreiſes die Normalen auf die drei Seiten des Dreiecks zieht, Da = Db = Dc, und es iſt daher Da der Radius des Kreiſes, der ſich in das Dreieck ABC hineinzeichnen läßt. Setzt man dieſen Radius = R, ſo iſt bekanntlich, wenn die Fläche des Dreiecks mit f bezeichnet wird,

$$f = \frac{R\,(a + b + c)}{2} = Rh$$

für $\frac{a + b + c}{2} = h$. Nun iſt aber

$$f = \sqrt{h\,(h - a)\,(h - b)\,(h - c)}$$

bekannt, alſo iſt auch $R = \frac{f}{h}$ ebenfalls bekannt.

Wird nun $D\alpha = \varrho$ geſetzt, ſo iſt

$$\varrho = R - d = \frac{f}{h} - d = \frac{f - dh}{h}$$

alſo iſt die Fläche des Kreiſes $\alpha\beta\gamma$ =

$$\varrho^2\pi = \left(\frac{f - dh}{h}\right)^2 \pi = \left(\frac{f^2 - 2\,fdh + d^2h^2}{h^2}\right)\pi;$$

dieſes von der Fläche f des Dreiecks ABC abgezogen, giebt die Grundfläche G von dem maſſiven Theile des Priſma, und es iſt hiernach

$$G = f - \left(\frac{f - dh}{h}\right)^2 \pi$$

und daher der geſuchte Kubikinhalt

$$P = fH - H\left(\frac{f - dh}{h}\right)^2 \pi.$$

Die Oberfläche dieſes Körpers, die innere Fläche der Röhre mitgerechnet, wird ausgedrückt durch

$$F = 2hH + 2(f - \varrho^2\pi) + 2\varrho\pi H$$

$$= 2\left[hH + f - \left(\frac{f - dh}{h}\right)^2 \pi + \left(\frac{f - dh}{h}\right) H\pi\right].$$

Zuſatz. Soll bei einer in einem dreiſeitigen Prisma enthaltenen Röhre, der Kubikinhalt des noch übrigen Körpers halb ſo groß ſein, als der des ganzen Prisma ſein würde, ſo muß die Fläche des Kreiſes $\alpha\beta\gamma$ die Hälfte von der Fläche des ganzen Dreiecks ABC betragen, und es läßt ſich nun der hierdurch beſtimmte Werth von d auf folgende Art berechnen:

Es iſt die Fläche des Kreiſes $\alpha\beta\gamma = \left(\frac{f - dh}{h}\right)^2 \pi$

alſo muß ſein

$$\left(\frac{f - dh}{h}\right)^2 \pi \quad \tfrac{1}{2}f$$

und daher $\frac{f - dh}{h} = \sqrt{\left(\frac{f}{2\pi}\right)}$

alſo auch $\frac{f}{h} - d = \sqrt{\left(\frac{f}{2\pi}\right)}$

und folglich wird $d = \frac{f}{h} - \sqrt{\left(\frac{f}{2\pi}\right)}$.

Nun iſt aber, wenn man den Radius des Kreiſes, der in das Dreieck hinein gezeichnet werden kann, = R ſetzt,

$$R = \frac{f}{h}$$

folglich iſt auch $d = R - \sqrt{\left(\frac{f}{2\pi}\right)}$.

Bezeichnet man aber mit x den Radius des Kreiſes, der die halbe Fläche des Dreiecks haben ſoll,

ſo iſt $x^2\pi = \tfrac{1}{2}f$, alſo $x = \sqrt{\frac{f}{2\pi}}$

es iſt alſo auch $d = R - x$

wie es ſich von ſelbſt verſteht.

4. Aus einem dreiſeitigen Prisma, deſſen Grundfläche ABC, Fig. 26., man kennt, iſt ein ähnliches concentriſches

herausgeſchnitten, von welchem A′B′C′ die Grundfläche bildet, und man kennt den Abſtand der Seiten dieſer Grundfläche von den Seiten des Dreiecks ABC, es iſt alſo $a\alpha = b\beta = c\gamma = d$ gegeben; es ſoll hieraus beſtimmt werden, wie ſich der maſſive Theil zu dem hohlen Theile dieſes Priſma verhält.

Aufloͤſung. Setzt man den maſſiven Theil = P und den hohlen = p, ſo müſſen, weil beide Theile natürlich gleiche Höhe haben, dieſelben zu einander ſich verhalten, wie ihre Grundflächen, und es muß daher die Proportion ſtatt finden

$$P : p = \Delta ABC - \Delta A'B'C' : \Delta A'B'C'$$

$$\text{alſo } P + p : p = \Delta ABC : \Delta A'B'C'.$$

Nun iſt aber $\Delta ABC : \Delta A'B'C' = (AB)^2 : (A'B')^2$

und $AB : A'B' = Dc : D\gamma$

folglich iſt auch

$$P + p : p = (Dc)^2 : (D\gamma)^2.$$

Es iſt aber, wenn man Dc als den Radius des Kreiſes, der in ABC hineingezeichnet werden kann, $=R$ ſetzt, $D\gamma = \varrho = R - d$

folglich iſt $P + p : p = R^2 : (R - d)^2$

und daher $P : p = R^2 - (R - d)^2 : (R - d)^2$

oder $P : p = 2Rd - d^2 : (R - d)^2$.

Da nun $R = \frac{f}{h}$, ſo erhält man

$$P : p = \frac{2fd}{h} - d^2 : \left(\frac{f}{h} - d\right)^2$$

$$= \frac{d\,(2f - dh)}{h} : \frac{(f - dh)^2}{h^2}$$

und endlich $P : p = dh\,(2f - dh) : (f - dh)^2$.

Zuſatz. Soll $P = p$ werden, ſo muß auch ſein

$$dh\,(2f - dh) = (f - dh)^2$$

$$\text{alſo } 2dhf - d^2h^2 = f^2 - 2dhf + d^2h^2$$

$$\text{und } -\tfrac{1}{2}f^2 = -2dhf + d^2h^2$$

es muß alſo auch ſein

$$\tfrac{1}{2}f^2 = f^2 - 2dhf + d^2h^2 = (f - dh)^2$$

$$\text{und daher } \tfrac{1}{2}f\sqrt{2} = f - dh$$

$$\text{alſo } dh = f - \tfrac{1}{2}f\sqrt{2}$$

$$\text{und } d = f\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2h}\right) = hR\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2h}\right) = \frac{R(2 - \sqrt{2})}{2};$$

was auch auf folgende Art hätte gefunden werden können:

Da $\Delta ABC : \Delta A'B'C' = R^2 : \varrho^2$

ſo muß ſein, wenn $\Delta ABC = 2\Delta A'B'C'$ ſein ſoll

$\underline{R^2 = 2\varrho^2}$

alſo $R = \varrho\sqrt{2}$ und $\varrho = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

und daher $R - \varrho = R - \frac{R\sqrt{2}}{2}$

nämlich $d = R\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$.

5. Von einem Prisma wird ein Segment durch eine Ebene abgeſchnitten, die parallel zu den Kanten deſſelben läuft; um wieviel muß die Höhe des übrig bleibenden Theils vergrößert werden, wenn dadurch das weggefallene Stück ergänzt werden ſoll?

Aufloſung. Iſt die Grundfläche des gegebenen Prisma $= G$, die Höhe deſſelben $= H$, der zu dem abgeſchnittenen Segmente gehörige Theil der Grundfläche $= g$ und die geſuchte Verlängerung der Höhe $= x$, ſo hat der übrig bleibende Theil eine Grundfläche $= G - g$ und eine Höhe $= H + x$ und es muß nun ſein

$$(G - g)(H + x) = GH$$

alſo $GH - gH + x(G - g) = GH$

und daher $x(G - g) = gH$

dieſes giebt $x = \frac{gH}{G - g}$

oder was daſſelbe iſt, man erhält die Proportion

$$G - g : g = H : x.$$

Nämlich, wie ſich der übrig bleibende Theil der Grundfläche zu dem abgeſchnittenen verhält, ſo verhält ſich die Höhe des Prisma zu der erforderlichen Verlängerung derſelben. Dieſer Satz hätte auch unmittelbar auf folgende Art gefunden werden können: der abgeſchnittene Theil von dem Prisma hat eine Grundfläche $= g$ und eine Höhe $= H$, und der dafür hinzukommende Theil hat eine Grundfläche $= G - g$ und eine Höhe $= x$, da nun beide einander gleich ſein ſollen, ſo müſſen ſich, nach §. 34. No. 6., die Grundflächen derſelben umgekehrt wie ihre Höhen verhalten, alſo muß ſein

$$G - g : g = H : x.$$

Iſt nun z. B. die Grundfläche das Dreieck ABC, Fig. 20. und der abgeſchnittene Theil deſſelben das Dreieck $\alpha\beta C$, ſo iſt für $CA = B$, $CB = A$, $C\alpha = \beta$ und $C\beta = \alpha$

$$G = \Delta ABC = \frac{AB \sin C}{2r}$$

$$g = \Delta \alpha\beta C = \frac{\alpha\beta \sin C}{2r}$$

und daher

$$\frac{(AB - \alpha\beta) \sin C}{2r} : \frac{\alpha\beta \sin C}{2r} = H : x$$

$$\text{oder } (AB - \alpha\beta) : \alpha\beta = H : x$$

$$\text{folglich } x = \frac{H\alpha\beta}{AB - a\beta}.$$

Iſt die Grundfläche ein Kreis, Fig. 24., und der abgeſchnittene Theil deſſelben ein Kreisausſchnitt bcdm, zu welchem der Centriwinkel bcd von φ^0 gehört, ſo iſt für den Radius $bc = R$

$$G = R^2\pi$$

$$\text{und } g = \frac{\varphi}{360} \cdot R^2\pi$$

$$\text{alſo } R^2\pi - \frac{\varphi}{360} \cdot R^2\pi : \frac{\varphi}{360} \cdot R^2\pi = H : x$$

$$\text{und daher } (360 - \varphi)^0 : \varphi^0 = H : x$$

$$\text{folglich iſt } x = \frac{H\varphi}{360 - \varphi}.$$

Wenn die Grundfläche ein Kreis iſt, und der abgeſchnittene Theil bmd ein Abſchnitt von φ^0, ſo iſt

$$G = R^2\pi$$

$$\text{und } g = R^2 \left(\frac{\varphi}{360} \cdot \pi - \frac{\sin \varphi}{2r}\right)$$

$$\text{alſo } G - g = R^2 \left[\pi - \frac{\varphi}{360} \cdot \pi + \frac{\sin \varphi}{2r}\right]$$

$$= R^2 \left[\left(\frac{360 - \varphi}{360}\right) \pi + \frac{\sin \varphi}{2r}\right]$$

und daher

$$R^2 \left[\left(\frac{360 - \varphi}{360}\right) \pi + \frac{\sin \varphi}{2r}\right] : R^2 \left[\frac{\varphi}{360} \cdot \pi - \frac{\sin\varphi}{2r}\right] = H : x$$

folglich iſt in dieſem Falle

$$x = \frac{H\left[\frac{\varphi}{360}\cdot\pi - \frac{\sin\varphi}{2r}\right]}{\left[\left(\frac{360-\varphi}{360}\right)\cdot\pi + \frac{\sin\varphi}{2r}\right]}.$$

Zuſatz. Wenn umgekehrt $x = h$ gegeben iſt, ſo läßt ſich daraus der entſprechende Werth von g berechnen. Denn da

$$G - g : g = H : h$$

ſo iſt auch $$G : g = H + h : h$$

alſo $$g = \frac{Gh}{H + h}.$$

6. Es iſt ein Cylinder gegeben, deſſen ganze Oberfläche $= F$, und von welchem der Radius der Grundfläche $= R$ iſt; man ſoll von einem Prisma, deſſen Grundfläche ein gleichſeitiges Dreieck, und deſſen Höhe der Seite dieſes Dreiecks gleich iſt, und das mit dem Cylinder gleichen Kubikinhalt hat, die Seite $= x$ und die ganze Oberfläche $= Z$ angeben.

Aufloſung. Da man von dem Cylinder die Oberfläche $= F$ und den Radius der Grundfläche $= R$ kennt, ſo iſt nach §. 42. der Kubikinhalt C durch die Formel beſtimmt

$$C = \tfrac{1}{2}FR - R^3\pi,$$

der Kubikinhalt des Prisma aber iſt

$$= x \times \frac{x^2}{4}\sqrt{3} = \frac{x^3\sqrt{3}}{4}$$

alſo muß ſein $$\frac{x^3\sqrt{3}}{4} = \tfrac{1}{2}FR - R^3\pi$$

und $$x^3 = \frac{2FR - 4R^3\pi}{\sqrt{3}}$$

und daher $$x = \sqrt{\left[\frac{2R\,(F - 4R^2\pi)}{\sqrt{3}}\right]}.$$

Es iſt aber die Oberfläche des Prisma

$$Z = 3x \cdot x + 2 \cdot \frac{x^2}{4}\sqrt{3} = x^2\left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

folglich iſt auch

$$Z = (3 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3})\sqrt[3]{\left(\frac{4R^2\,(F - 4R^2\pi)^2}{3}\right)}.$$

7. Die Grundfläche eines Prisma iſt ein regelmäßiges nEck und der um dieſes nEck beſchriebene Kreis iſt die Grundfläche eines Cylinders, der mit dem Prisma gleichen Kubikin=

halt hat. Wie verhalten ſich die Höhen dieſer Körper zu einander?

Aufloͤſung. Der Flächeninhalt des nEcks im Kreiſe wird, da der Radius = R iſt, für $\varphi = \frac{360^0}{n}$ ausgedrückt durch $\frac{n R^2 \sin \varphi}{2r}$ und die Fläche des Kreiſes iſt $= R^2\pi$. Da nun die beiden Körper gleichen Kubikinhalt haben ſollen, ſo müſſen ſich ihre Höhen umgekehrt wie ihre Grundflächen verhalten; ſetzt man alſo die Höhe des Prisma = p, und die des Cylinders = c, ſo muß ſein

$$p : c = R^2\pi : \frac{nR^2 \sin \varphi}{2r}$$

und es iſt daher

$$p : c = 2r\pi : n \sin \varphi.$$

Zuſatz. Setzt man die Seite des nEcks = a, ſo wird die Seitenfläche des normalen Prisma ausgedrückt durch nap, und es iſt $a = \frac{2R \sin \frac{1}{2}\varphi}{r}$ und es iſt daher die Seitenfläche des Prisma auch $= \frac{2npR \sin \frac{1}{2}\varphi}{r}$. Die Seitenfläche des Cylinders aber iſt $= 2R\pi \cdot c$; ſollen alſo beide Körper gleiche Seitenflächen haben, ſo muß ſein

$$\frac{2npR \sin \frac{1}{2}\varphi}{r} = 2Rc\pi,$$

$$\text{und alſo } p : c = 2R\pi : \frac{2nR \sin \frac{1}{2}\varphi}{r},$$

nämlich es muß ſein

$$p : c = \pi r : n \sin \tfrac{1}{2} \varphi.$$

8. Ein Grundſtück, welches die Form eines Rechtecks hat, deſſen Länge = l und deſſen Breite = b, iſt von einer Mauer umſchloſſen, deren Höhe = h und deren Dicke = d iſt. Wieviel beträgt der Kubikinhalt dieſer Mauer, und wie groß ſind die Seitenflächen derſelben?

Aufloͤſung. Da die innere Länge = l und die Dicke der Mauer = d iſt, ſo beträgt die äußere Länge l + 2d, und eben ſo iſt die äußere Breite = b + 2d. Die ganze Grundfläche des prismatiſchen Körpers beſteht daher aus 4

Paralleltrapezen, und es ſtehen in jedem die parallelen Seiten um die Dicke der Mauer = d von einander entfernt. Von den beiden Trapezen, welche die Grundflächen der Länge bilden, ſind die parallelen Seiten = l und l + 2d, und die Fläche eines jeden derſelben iſt daher $= \frac{d\,[l + (l + 2d)]}{2} =$ d (l + d). Von den beiden übrigen Trapezen, welche die Grundflächen der Breite bilden, ſind die parallelen Seiten b und b + 2d, und die Fläche eines jeden iſt daher = d(b + d). Setzt man alſo den Kubikinhalt der ganzen Mauer = P, ſo iſt dieſer

$$P = h\,[2d\,(l + d) + 2d\,(b + d)]$$
$$= 2hd\,(l + b + 2d).$$

Ferner iſt von der Grundfläche der innere Umfang = 2l + 2b, und der äußere iſt = 2 (l + 2d) + 2 (b + 2d), folglich iſt von der Mauer

die innere Fläche = 2h (l + b)

und die äußere Fläche = 2h (l + b + 4d).

Die ganze Seitenfläche = F wird alſo ausgedrückt durch die Formel

$$F = 2h\,(2l + 2b + 4d)$$
$$= 4h\,(l + b + 2d).$$

Anmerkung. Mittelſt des Ausdrucks für P läßt ſich das zu der Mauer erforderliche Material berechnen, und die Formel für F giebt die Größe der zu bekleidenden Wände an.

Zuſatz. Da P = 2hd (l + b + 2d)
und F = 4h (l + b + 2d)
ſo iſt auch $P = \frac{dF}{2}$ und $F = \frac{2P}{d}$.

9. Von dem Ausſchnitte eines normalen Cylinders kennt man die Seite Cc = H, Fig. 24., den Winkel bcd = φ, und die ganze Oberfläche = F; es ſoll der Radius cb = R berechnet werden.

Auflöſung. Es iſt die Fläche des Ausſchnittes bcdm = $\frac{\varphi}{360} \cdot R^2\pi$ und der Umfang deſſelben iſt =

$2R + \frac{\varphi}{360} \cdot 2R\pi$, folglich iſt die ganze Oberfläche

$$2 \cdot \frac{\varphi}{360} \cdot R^2\pi + \left(2R + \frac{\varphi}{360} \cdot 2R\pi\right) H = F,$$

und daher auch, wenn man zur Abkürzung $\frac{\varphi}{360} = m$ ſetzt

$$2m\pi R^2 + 2H(1 + m\pi) R = F,$$

$$\text{alſo } R^2 + \frac{H(1 + m\pi)}{m\pi} \cdot R = \frac{F}{2m\pi}$$

$$\text{und } \left[R + \frac{H(1+m\pi)}{2m\pi}\right]^2 = \frac{F}{2m\pi} + \frac{H^2(1+m\pi)^2}{4m^2\pi^2}$$

hiernach iſt

$$R + \frac{H(1 + m\pi)}{2m\pi} = \frac{\sqrt{[2m\pi F + H^2(1 + m\pi)^2]}}{2m\pi}$$

und daher endlich

$$R = \frac{-H(1 + m\pi) + \sqrt{[2m\pi F + H^2(1 + m\pi)^2]}}{2m\pi}.$$

10. Von dem Ausſchnitte eines normalen Cylinders kennt man die Höhe = H, den Radius der Grundfläche = R, und weiß, daß die beiden Grundflächen zuſammengenommen der ganzen Seitenfläche gleich ſind; es ſoll hieraus der Winkel des Ausſchnittes berechnet werden.

Aufloſung. Die Fläche bcdm, Fig. 24., iſt =

$$\frac{\varphi}{360} \cdot R^2\pi,$$

und der Umfang des Ausſchnittes = $2R + \frac{\varphi}{360} \cdot 2R\pi$,

die Gleichung iſt daher

$$2 \cdot \frac{\varphi}{360} \cdot R^2\pi = \left(2R + \frac{\varphi}{360} \cdot 2R\pi\right) H,$$

$$\text{alſo } \frac{\varphi R\pi}{360} = H + \frac{\varphi\pi H}{360}$$

$$\text{und } \frac{(R - H)\varphi\pi}{360} = H,$$

folglich iſt $\varphi = \frac{360 H}{(R-H)\pi}$

Zuſatz 1. Setzt man in dieſer Formel $H = \frac{1}{3}R$, ſo wird

$$\varphi = \frac{360 \cdot \frac{1}{3}R}{\frac{2}{3}R\pi} = \frac{360R}{2R\pi},$$

und dieſes giebt die Proportion

$$2R\pi : R = 360^\circ : \varphi^\circ,$$

woraus folgt, daß der Bogen φ in dieſem Falle mit dem Radius des Kreiſes gleiche Länge haben muß, und die ganze Oberfläche des Ausſchnittes iſt $= 2R^2$.

Zuſatz 2. Aus der Formel geht hervor, daß die Bedingungen der Aufgabe nur alsdann ſtatt finden können, wenn H nicht größer als R iſt. Nimmt man $H = R$, ſo iſt bereits für den vollſtändigen Cylinder die krumme Oberfläche $= R \times 2R\pi = 2R^2\pi$, alſo den beiden Grundflächen gleich.

§. 46.

Uebungen.

1. Wenn ein hohler Cylinder oben offen iſt, ſo wird die Oberfläche deſſelben am kleinſten, wenn die Höhe deſſelben dem Radius der Grundfläche gleich iſt; von einem geſchloſſenen Cylinder aber iſt die Oberfläche alsdann am kleinſten, wenn er eine Höhe hat, welche ſo groß iſt, als der Durchmeſſer ſeiner Grundfläche.

2. Von einem Prisma iſt die Grundfläche gegeben, und zwei neben einander liegende Parallelogramme von den Seitenflächen; es ſoll hieraus mittelſt einer geometriſchen Conſtruction die Neigung der Kanten gegen die Grundfläche beſtimmt werden.

3. Man ſoll aus den in No. 2. gegebenen Stücken durch geometriſche Conſtruction den normalen Querſchnitt des Prisma beſtimmen.

4. Von einer 12kantigen Säule mit regelmäßiger Grundfläche iſt die Höhe und die ganze Oberfläche gegeben; es ſoll hieraus die Seite der Grundfläche berechnet werden.

5. Setzt man die Höhe eines Kreisabſchnittes $= h$, und giebt dem zu dieſem Kreisabſchnitte gehörigen Cylinderabſchnitt eine Höhe $= R - h$, ſo wird die ganze Oberfläche dieſes Abſchnittes ausgedrückt durch die einfache Formel

$$\frac{\varphi}{360} \cdot (2R - h) \cdot 2R\pi.$$

6. Wenn die Höhe des Cylinders A, der Radius der Grundfläche von einem anderen Cylinder B iſt, und umgekehrt

die Höhe von B der Radius der Grundfläche von A, ſo verhalten ſich ihre ganzen Oberflächen zu einander umgekehrt wie ihre Höhen.

7. Die Hälfte der krummen Seitenfläche eines Cylinders A, bildet die Grundfläche von B, und umgekehrt iſt die Grundfläche von A der halben Seitenfläche von B gleich. Wie verhalten ſich dieſe beiden Cylinder ihrem Kubikinhalte nach zu einander?

8. Aus einem Cylinder, deſſen Grundfläche ABC, Fig. 27., iſt, ſind die vier Ausſchnitte a, b, c und d, von welchen jeder 45° hält, herausgeſchnitten, die in dem Mittelpunkte e des Kreiſes ABC zuſammenſtoßen. Der Kubikinhalt dieſes Cylinders verhält ſich zu dem des ganzen Cylinders, wenn nichts herausgeſchnitten wäre, wie m : n; wie müſſen ſich daher die Radien eA und eα zu einander verhalten?

Fünfter Abſchnitt.

Die Pyramide und der Kegel.

§. 47.

Erklärungen.

1. Die Pyramide iſt ein Körper, der von irgend einer ebenen Grundfläche und von eben ſo vielen in einem Punkte zuſammentreffenden Dreiecken, als die Grundfläche Seiten hat, eingeſchloſſen wird. Dieſe Dreiecke liegen ſämmtlich an der Grundfläche an, und der Punkt, in welchem ſie alle zuſammentreffen, iſt die Spitze oder der Scheitel der Pyramide. Die Seitenlinien der Dreiecke, alſo die Linien, welche die Spitze der Pyramide mit den Ecken der Grundfläche verbinden, bilden die Kanten, und der normale Abſtand der Spitze von der Grundfläche iſt die Höhe der Pyramide.

2. Eine Pyramide wird drei-, vier- oder überhaupt nſeitig genannt, je nachdem die Grundfläche derſelben ein Drei-, Vier- oder nEck iſt.

3. Zwei Pyramiden ſind ähnlich, ſo wie zwei Körper überhaupt ähnlich ſind, wenn ſie von gleich vielen ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren eingeſchloſſen werden. Es ſind daher zwei Pyramiden ähnlich, wenn ſie ähnliche Grundflächen haben, und die an homologen Seiten derſelben anliegenden Dreiecke ebenfalls ähnlich ſind.

4. Wenn eine Pyramide parallel zu ihrer Grundfläche von einer Ebene geſchnitten wird, ſo iſt die durch die Seitenfläche der Pyramide beſtimmte Figur der ſchneidenden Ebene, der Grundfläche ähnlich, und der durch dieſe Ebene abgeſchnittene Theil der Pyramide iſt ebenfalls eine Pyramide, welche der ganzen ähnlich iſt.

Beweis. Es ſei ABC, Fig. 28., die Grundfläche und m die Spitze der Pyramide, welche parallel zur Grundfläche durch abc geſchnitten wird, ſo iſt nach §. 3. No. 8. ab zu AB parallel, und eben ſo auch ac zu AC und bc zu BC, und es iſt daher nach §. 3. No. 4. $\angle bac = \angle BAC$, $\angle abc = \angle ABC$ und $\angle acb = \angle ACB$. Ferner iſt

$$mA : ma = AB : ab = AC : ac$$

und weil $mA : ma = mC : mc$

und $mC : mc = CA : ca = CB : cb$

ſo iſt überhaupt

$$AB : ab = AC : ac = BC : bc,$$

und es ſind daher die Figuren ABC und abc ähnlich, nämlich es iſt der Durchſchnitt ähnlich der Grundfläche. Außerdem ergiebt ſich aber auch, daß ähnlich iſt

$\triangle abm$ dem $\triangle ABm$
$\triangle acm$ „ $\triangle ACm$
und $\triangle bcm$ „ $\triangle BCm$

folglich iſt auch der abgeſchnittene Theil abcm der ganzen Pyramide ähnlich.

Zuſatz. Da $mA : ma = mB : mb = mC : mc$
$= AB : ab = BC : bc = AC : ac,$
ſo folgt, daß alle begränzenden Linien der ganzen Pyramide zu den ähnlich liegenden der abgeſchnittenen daſſelbe Verhältniß

haben. Nimmt man aber an, daß die Normale von m auf die Grundfläche dieſe in D trifft, und abc in d ſchneidet, ſo iſt nach §. 3. No. 9. mA : ma = mD : md; es hat alſo die Höhe der ganzen Pyramide zu der des abgeſchnittenen Theils daſſelbe Verhältniß, in welchem die Kanten, und alſo überhaupt alle begränzenden Linien beider zu einander ſtehen.

§. 48.

Grundeigenſchaften der dreiſeitigen Pyramide.

1. Iſt ABCm eine dreiſeitige Pyramide, ſo kann jede Seitenfläche derſelben als Grundfläche angeſehen werden, und es wird alsdann die Grundfläche eine Seitenfläche. Nimmt man nämlich ABC als Grundfläche an, ſo iſt m die Spitze und die Dreiecke ABm, ACm und BCm ſind die Seitenflächen; wird aber ſtatt deſſen ABm als Grundfläche angenommen, ſo iſt C die Spitze und es ſind die Dreiecke CAm, CBm und CAB die Seitenflächen.

2. Halbirt man die Kante mC in c, und legt durch dieſen Punkt eine Ebene cab parallel zu CAB, und die Ebene $c\alpha\beta$ parallel zu mAB, ſo werden durch dieſe beiden Ebenen zwei Pyramiden cabm und $c\alpha\beta$C von der ganzen abgeſchnitten, die gleich und ähnlich ſind. Denn da cab parallel iſt zu CAB, ſo iſt die Pyramide cabm der ganzen ähnlich nach §. 47. No. 4., und weil $c\alpha\beta$ parallel iſt zu mAB, und dieſe Fläche auch als Grundfläche der ganzen Pyramide angeſehen werden kann, ſo iſt die Pyramide $c\alpha\beta$C ebenfalls der ganzen ähnlich, und es ſind daher auch die beiden Pyramiden cabm und $c\alpha\beta$C unter ſich ähnlich. Nun iſt

$$\begin{aligned} mc &= & cC &= \tfrac{1}{2}mC \\ ma &= aA = & c\alpha &= \tfrac{1}{2}mA \\ mb &= bB = & c\beta &= \tfrac{1}{2}mB \\ ca &= \alpha A = & C\alpha &= \tfrac{1}{2}CA \\ cb &= \beta B = & C\beta &= \tfrac{1}{2}CB \\ \text{und } ab &= & \alpha\beta &= \tfrac{1}{2}AB. \end{aligned}$$

In den beiden Pyramiden cabm u. $c\alpha\beta$C ſind alſo alle Dimenſionen gleich groß, und ſie ſind daher nicht nur ähnlich, ſondern auch gleich.

3. Nachdem von der Pyramide ABCm die beiden gleichen Pyramiden abcm und $\alpha\beta$Cc weggenommen ſind, bleibt

ein Körper übrig, von welchem AB$\beta\alpha$ die Grundfläche und das zu derſelben parallele Dreieck abc die obere Fläche iſt. Halbirt man nun AB in γ und zieht $\alpha\gamma$, ſo wird durch das Parallelogramm cb$\gamma\alpha$ der Körper in zwei Theile zerlegt, von welchen der eine A$\gamma\alpha$abc ein dreiſeitiges Prisma iſt, welches auf A$\gamma\alpha$ ſteht, und der andere Theil, deſſen Grundfläche das Parallelogramm $\alpha\gamma$Bβ iſt, dem die Kante bc gegenüberliegt, iſt ebenfalls ein dreiſeitiges Prisma, von welchem c$\alpha\beta$ und bγB die parallelen Grundflächen ſind. Beide Prismen ſind von gleicher Größe, denn es wird der Inhalt von A$\alpha\gamma$abc gefunden, wenn man den normalen Abſtand der bc von A$\alpha\gamma$ mit der Fläche A$\alpha\gamma$ multiplicirt, und den Inhalt von $\alpha\beta$Bγbc erhält man, wenn der normale Abſtand der Kante bc von dem Parallelogramme $\alpha\beta$Bγ mit dieſem Parallelogramme multiplicirt, und von dem Producte die Hälfte genommen wird. Die als Factor vorkommende Normale iſt alſo in beiden gleich, während das Parallelogramm $\alpha\beta$Bγ zweimal ſo groß als das Dreieck A$\alpha\gamma$ iſt.

§. 49.

Von dem Kubikinhalte der Pyramiden.

1. Wenn von der dreiſeitigen Pyramide ABCm, Fig. 28., die Spitze m dieſelbe Lage gegen ABC behält, die Grundfläche aber noch um etwas erweitert wird, ſo erhält dadurch die Pyramide unbedingt einen größern Kubikinhalt, und es folgt hieraus, daß bei gleicher Höhe der Inhalt einer dreiſeitigen Pyramide größer wird, wenn die Grundfläche derſelben eine größere Ausdehnung erhält.

2. Bleibt die Grundfläche ABC unverändert, es rückt aber der Punkt m, in der Normalen von m auf die Grundfläche, höher herauf, ſo erhält der Inhalt der Pyramide auch dadurch einen Zuwachs; der Kubikinhalt einer dreiſeitigen Pyramide wird alſo auch in dem Falle größer, wenn bei unveränderter Grundfläche, die Höhe derſelben wächſt.

3. Aus den beiden vorhergehenden Sätzen zuſammengenommen folgt, daß der Inhalt einer dreiſeitigen Pyramide auf irgend eine Art von dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe derſelben abhängen muß, und man kann daher,

wenn die Grundfläche = G, die Höhe = H und der Kubikinhalt = Q geſetzt wird, annehmen, daß da ſein wird

$$Q = xGH,$$

wo es nun darauf ankommt, den Werth von x zu beſtimmen. Es iſt aber die Pyramide abcm der ganzen ähnlich, die Höhe derſelben iſt halb ſo groß, als die der ganzen, alſo $= \frac{1}{2}H$, wenn die Höhe der ganzen = H geſetzt wird, und die Grundfläche abc iſt $= \frac{1}{4}ABC = \frac{1}{4}G$ für ABC = G. Wenn alſo iſt

Pyramide $ABCm = Q = xGH$

ſo muß ſein

$$\text{Pyramide } abcm = q = x \cdot \tfrac{1}{4}G \cdot \tfrac{1}{2}H = \frac{xGH}{8}.$$

Ferner iſt das Prisma $A\alpha\gamma abc = P = \frac{1}{4}G \cdot \frac{1}{2}H = \frac{GH}{8}$ und es gilt dieſer Ausdruck auch für das zweite Prisma $\alpha\gamma B\beta bc$. Nun iſt

$$Q = 2P + 2q$$

alſo auch, wenn man für Q, P und q die Werthe ſetzt,

$$xGH = 2 \cdot \frac{GH}{8} + 2 \cdot \frac{xGH}{8}$$

oder $4x = 1 + x$

und daher $x = \frac{1}{3}$

folglich iſt $Q = \frac{1}{3}GH.$

Der Kubikinhalt einer dreiſeitigen Pyramide iſt alſo dem dritten Theile des Products gleich, welches erhalten wird, wenn man die Grundfläche derſelben mit ihrer Höhe multiplicirt.

4. Iſt nun die Grundfläche einer Pyramide ein Vieleck, ſo läßt ſich daſſelbe durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen, und die ganze Pyramide kann dadurch in eben ſoviel dreiſeitige zerlegt werden, als aus wieviel Dreiecken die Grundfläche beſteht, und es haben alle dieſe dreiſeitigen Pyramiden gleiche Höhe. Folglich iſt der Inhalt der ganzen Pyramide dem dritten Theile des Produktes gleich, welches erhalten wird, wenn man die gemeinſchaftliche Höhe mit der Summe aller der Dreiecke multiplicirt, in welche die Grundfläche zerlegt iſt. Die oben für den Inhalt der dreiſeitigen Pyramiden gefundene Regel gilt alſo allgemein für alle Pyramiden; nämlich es iſt

der Inhalt einer jeden Pyramide dem dritten Theile des Produktes gleich, welches erhalten wird, wenn man die Grundfläche derſelben mit ihrer Höhe multiplicirt.

§. 50.

Folgerungen.

1. Bezeichnet man durch Q und q den Inhalt, durch G und g die Grundflächen und durch H und h die Höhen zweier Pyramiden, ſo iſt

$$Q = \tfrac{1}{3}GH \text{ und } q = \tfrac{1}{3}gh$$

$$\text{alſo } Q : q = GH : gh.$$

Zwei verſchiedene Pyramiden verhalten ſich alſo zu einander, wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen.

2. Für $H = h$ wird

$$Q : q = G : g$$

und für $G = g$

$$Q : q = H : h.$$

Pyramiden von gleichen Höhen verhalten ſich alſo wie ihre Grundflächen, und umgekehrt, Pyramiden von gleichen Grundflächen wie ihre Höhen.

3. Wenn $Q = q$ ſein ſoll, ſo muß auch ſein

$$GH = gh$$

$$\text{alſo } G : g = h : H$$

und umgekehrt folgt aus dieſer Proportion

$$GH = gh \text{ und daher auch } Q = q.$$

Bei gleichen Pyramiden ſind alſo die Grundflächen im umgekehrten Verhältniſſe ihrer Höhen, und wenn von zwei Pyramiden die Grundflächen umgekehrt wie ihre Höhen ſich verhalten, ſo ſind ſie gleich groß.

4. Sind die Pyramiden Q und q ähnlich, und A und a gleichliegende Seiten ihrer Grundflächen, ſo iſt

$$G : g = A^2 : a^2$$

$$\text{und } H : h = A : a$$

$$\text{alſo } GH : gh = A^3 : a^3$$

$$\text{nämlich es iſt } Q : q = A^3 : a^3.$$

Aehnliche Pyramiden verhalten ſich alſo zu einander, wie die dritten Potenzen der in ihnen ähnlich liegenden Seiten.

5. Denkt man durch die Spitze m der Pyramide ABCm Fig.

Fig. 28. Parallelen zu AB und AC, die dieſen Linien gleich ſind, verbindet ihre Endpunkte mit einander und mit B und C, ſo wird die dreiſeitige Pyramide dadurch zu einem dreiſeitigen Prisma ergänzt, welches mit der Pyramide die Grundfläche und Höhe gemein hat. Da nun der Inhalt von dieſem Prisma = GH iſt, ſo folgt: die Pyramide iſt dem dritten Theile des Prisma gleich, welches mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.

6. Das nach No. 5. conſtruirte Prisma iſt die Hälfte von dem Parallelepipedon, deſſen Größe und Form durch die drei Linien AB, AC und Am und ihre Lage zu einander vollkommen beſtimmt iſt. Folglich iſt die Pyramide ABCm der 6te Theil von dem Parallelepipedon, das AB, AC und Am zu Kanten hat, und in welchem dieſe die Winkel BAC, BAm und CAm mit einander bilden.

7. Sind irgend zwei von ebenen Flächen begränzte Körper einander ähnlich, ſo kann in beiden ein ähnlich liegender Punkt angenommen werden, und zieht man von dieſem Punkte Linien nach allen Ecken der Körper, ſo werden beide dadurch in gleich viele Pyramiden zerlegt, von welchen je zwei gleichliegende einander ähnlich ſind. Bezeichnet man nun die Pyramiden des einen Körpers mit P, Q, R, S etc. und eine Seite der Grundfläche derſelben, der Reihe nach, mit A, B, C, D etc. und werden auf gleiche Weiſe die Pyramiden des andern Körpers mit p, q, r, s bezeichnet, und eine Seite der Grundfläche einer jeden mit a, b, c, d, ſo daß hierbei a der A, b der B, c der C und d der D gleichliegend iſt, ſo hat man

$$A : a = B : b = C : c = D : d$$

und daher auch

$$A^3 : a^3 = B^3 : b^3 = C^3 : c^3 = D^3 : d^3.$$

Es iſt aber

$$P : p = A^3 : a^3$$
$$Q : q = B^3 : b^3$$
$$R : r = C^3 : c^3$$
$$S : s = D^3 : d^3$$

folglich iſt auch

$$P : p = Q : q = R : r = S : s$$

und $(P+Q+R+S) : (p+q+r+s) = P : p = A^3 : a^3$. Da nun der eine Körper aus $P + Q + R + S \cdots$ und

der andere aus $p + q + r + s \cdots$ beſteht, ſo folgt, daß, ganz allgemein, ähnliche von ebenen Flächen begränzte Körper zu einander, wie die dritten Potenzen der in ihnen ähnlich liegenden Linien ſich verhalten.

§. 51.

Nähere Beſtimmungen für den Kubikinhalt der dreiſeitigen Pyramiden.

1. Bezeichnet man die drei Linien Am, AB und AC mit A, B und C und den Neigungswinkel der Kante Am gegen die Grundfläche BAC, mit m, ſo iſt für $\angle BAC = a$ nach §. 30. der Kubikinhalt des dadurch beſtimmten Parallelepipedon $= \frac{ABC \sin a \sin m}{r^2}$, folglich iſt der Inhalt Q der Pyramide ABCm durch die Formel beſtimmt

$$Q = \frac{ABC \sin a \sin m}{6r^2}.$$

2. Ferner iſt, wenn man $\angle mAB = c$ und $\angle mAC = b$ und $\frac{a + b + c}{2} = S$ ſetzt

$$\sin m = \frac{2 \sqrt{\sin S \sin (S - a) \sin (S - b) \sin (S - c)}}{\sin a}$$

es iſt alſo auch

$$Q = \frac{ABC}{3} \cdot \frac{\sqrt{\sin S \sin (S - a) \sin (S - b) \sin (S - c)}}{r^2}$$

3. In Beziehung auf die dreiſeitige Pyramide iſt nun noch die Aufgabe wichtig: es ſoll der Kubikinhalt derſelben durch die 6 Linien AB, AC, BC, Am, Bm und Cm ausgedrückt werden.

Dieſer Ausdruck läßt ſich aus dem zuletzt für Q erhaltenen auf folgende Art ableiten: Es iſt

$$Q = \frac{2ABC}{6r^2} \sqrt{\sin S \sin (S - a) \sin (S - b) \sin (S - c)}$$

$$= \frac{ABC}{6r} \sqrt{\left[\frac{2 \sin S \sin (S - a)}{r} \times \frac{2 \sin (S - b) \sin (S - c)}{r}\right]}.$$

Nun iſt ganz allgemein

$$2 \sin \left(\frac{p + q}{2}\right) \sin \left(\frac{p - q}{2}\right) = (\cos q - \cos p)\, r,$$

folglich iſt auch, weil $S = \frac{a + b + c}{2}$

$$2 \sin S \sin (S - a) = [\cos a - \cos (b + c)]\, r$$
$$2 \sin (S - b) \sin (S - c) = [\cos (b - c) - \cos a]\, r$$

und daher iſt

$$\frac{2 \sin S \sin (S - a)}{r} \times \frac{2 \sin (S - b) \sin (S - c)}{r}$$
$$= [\cos a - \cos (b + c)] \times [\cos (b - c) - \cos a]$$
$$= \left(\frac{r \cos a - \cos b \cos c + \sin b \sin c}{r}\right) \left(\frac{\cos b \cos c + \sin b \sin c - r \cos a}{r}\right)$$
$$= \frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 b \cos^2 c - r^2 \cos^2 a + 2r \cos a \cos b \cos c}{r^2}$$
$$= \frac{(r^2 - \cos^2 b)(r^2 - \cos^2 c) - \cos^2 b \cos^2 c - r^2 \cos^2 a + 2r \cos a \cos b \cos c}{r^2}$$
$$= \frac{r^4 - r^2 \cos^2 b - r^2 \cos^2 c - r^2 \cos^2 a + 2r \cos a \cos b \cos c}{r^2}$$

und es iſt daher auch, wenn dieſer Werth geſetzt wird

$$Q = \frac{ABC}{6r} \sqrt{\left[r^2 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + \frac{2 \cos a \cos b \cos c}{r}\right]}.$$

Nun iſt nach der eingeführten Benennung, Fig. 28., in dem Dreieck ABC, AB = B, AC = C und $\angle$ BAC = a; wird alſo hier BC = D geſetzt, ſo iſt

$$\cos a = \left(\frac{B^2 + C^2 - D^2}{2BC}\right) r.$$

In dem Dreieck mAB iſt mA = A, AB = B und $\angle$ mAB = c, folglich wird, wenn man die dritte Seite mB = E ſetzt

$$\cos c = \left(\frac{A^2 + B^2 - E^2}{2AB}\right) r.$$

Endlich iſt in dem Dreieck mAC, mA = A, AC = B und $\angle$ mAC = b, und daher, wenn die dritte Seite mC = F geſetzt wird

$$\cos b = \left(\frac{A^2 + C^2 - F^2}{2AC}\right) r.$$

Werden dieſe Werthe für cos a, cos b und cos c ſubſtituirt, ſo erhält man

$$Q = \frac{ABC}{6} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{B^2 + C^2 - D^2}{2BC}\right)^2 - \left(\frac{A^2 + C^2 - F^2}{2AC}\right)^2\right.}$$

10 *

$$- \left(\frac{A^2+B^2-E^2}{2AB}\right)^2 + 2\left(\frac{B^2+C^2-D^2}{2BC}\right)\left(\frac{A^2+C^2-F^2}{2AC}\right)\left(\frac{A^2+B^2-E^2}{2AB}\right)\Big]$$

eine Formel für den Kubikinhalt der dreiſeitigen Pyramide, durch die 6 Kanten derſelben ausgedrückt. Durch gehörige Reduction erhält man hieraus für den Kubikinhalt der dreiſeitigen Pyramide den ſymmetriſchen Ausdruck

$$\begin{aligned} Q = \tfrac{1}{12} \sqrt{} [& B^2 F^2 (C^2 + D^2 - B^2 + A^2 + E^2 - F^2) \\ & + C^2 E^2 (B^2 + D^2 - C^2 + A^2 + F^2 - E^2) \\ & + D^2 A^2 [B^2 + C^2 - D^2 + E^2 + F^2 - A^2] \\ & - B^2 C^2 D^2 - B^2 A^2 E^2 - C^2 A^2 F^2 - D^2 E^2 F^2]. \end{aligned}$$

§. 52.

Aufgabe.

Man kennt von einer Pyramide die Grundfläche ihrer Größe und Form nach, die eine Seitenkante und die Winkel, welche dieſelbe mit den beiden anliegenden Seiten der Grundfläche bildet; es ſollen hieraus die Winkel berechnet werden, welche die übrigen Seitenkanten mit den an ihnen anliegenden Seiten der Grundfläche machen.

Auflöſung. Da man die Grundfläche kennt, ſo iſt, Fig. 28., auch gegeben AB, AC und der Winkel BAC, und man kennt außerdem auch die Kante Am und die Winkel mAB und mAC; es ſind alſo von der körperlichen Ecke A die drei ebenen Winkel bekannt, und man kann daher die Neigungswinkel derſelben berechnen, es läßt ſich daher auch der Neigungswinkel finden, welchen mAB mit der Grundfläche bildet. Da ferner von dem Dreieck mAB die beiden Seiten mA, AB und der von denſelben eingeſchloſſene Winkel mAB gegeben ſind, ſo kann man auch den Winkel mBA deſſelben finden: der Winkel ABC aber iſt außerdem gegeben, folglich kennt man von der körperlichen Ecke B zwei ebene Winkel und den von denſelben eingeſchloſſenen Neigungswinkel, wodurch auch der dritte ebene Winkel mBC derſelben gefunden werden kann. Aus den auf dieſe Weiſe beſtimmten drei ebenen Winkeln an B laſſen ſich nun die von der nächſt folgenden Ecke eben ſo beſtimmen, wie die von B aus den von A gefunden worden ſind, und fährt man ſo fort, ſo lernt man hierdurch auch und nach die ſämmtlichen Winkel der Pyramide kennen,

wie viel Seiten die Grundfläche derſelben auch immer haben mag.

Da man übrigens auf dieſe Weiſe von jeder Ecke die drei ebenen Winkel derſelben kennen lernt, ſo läßt ſich nun auch der Neigungswinkel berechnen, welchen jede der Kanten mit der Grundfläche bildet.

Zuſatz. Wenn die Pyramide dreiſeitig iſt, und man bezeichnet die drei in A zuſammenſtoßenden Kanten Am, AB, AC mit A, B, C und die drei von denſelben gebildeten Winkel mit a, b, c, ſo daß a der Kante A gegenüber liegt ꝛc., alſo $\angle BAC = a$, $\angle CAm = b$ und $\angle BAm = c$, ſo iſt

$$(BC)^2 = D^2 = B^2 + C^2 - \frac{2BC \cos a}{r}$$

$$(Bm)^2 = E^2 = A^2 + B^2 - \frac{2AB \cos c}{r}$$

$$\text{und } (Cm)^2 = F = A^2 + C^2 - \frac{2AC \cos b}{r}$$

wodurch die drei Seiten D, E und F des Dreiecks mBC beſtimmt ſind. Setzt man nun den Winkel $mBC = x$, ſo iſt

$$\cos x = \left(\frac{D^2 + E^2 - F^2}{2DE}\right) r$$

wo nun, wenn man für D, E und F ihre Werthe ſetzt, eine Formel erhalten wird, durch welche der Winkel x aus den gegebenen Stücken unmittelbar ſich berechnen läßt.

§. 53.

Aufgabe.

Man kennt von einer Pyramide, Fig. 29., die Grundfläche ABDC ihrer Größe und Form nach, die Kante Am und die Neigung derſelben gegen die anliegenden Seiten AB und AC; es ſoll hieraus der Abſtand des Punktes n, in welchem die Normale aus der Spitze m die Grundfläche trifft, von den Seiten der Grundfläche berechnet werden.

Auflöſung. Für $\angle CAB = a$, $mAC = b$ und $mAB = c$ iſt, wenn man den Neigungswinkel der Kante) mA gegen die Grundfläche, alſo $mAn = m$ ſetzt,

$$\sin m = \frac{2 \sqrt{\sin S \sin (S - a) \sin (S - b) \sin (S - c}}{\sin a}$$

beſtimmt, und es ſind nun in der durch Am, An und AB gebildeten Ecke die beiden ebenen Winkel bekannt mAn = m und mAB = c, und man weiß überdies, daß die Ebene mAn auf nAB normal iſt; ſetzt man alſo $\angle$ nAB = α, ſo iſt nach §. 20. I. No. 1.

$$\underline{r : \cos m = \cos \alpha : \cos c}$$

$$\text{folglich iſt } \cos \alpha = \frac{r \cos c}{\cos m}.$$

Außerdem iſt für Am = A, weil mAn = m,

$$mn = h = \frac{A \sin m}{r} \text{ und } An = g = \frac{A \cos m}{r}.$$

Nun iſt aber

$$\underline{An : np = r : \sin \alpha} \text{ und } \underline{An : Ap = r : \cos \alpha}$$

$$\text{oder } \frac{A \cos m}{r} : (np) = r : \sin \alpha, \quad \frac{A \cos m}{r} : (Ap) = r : \cos \alpha$$

$$\text{folglich iſt } (np) = \frac{A \cos m \sin \alpha}{r^2}$$

$$\text{und } (Ap) = \frac{A \cos m \cos \alpha}{r^2} = \frac{A \cos c}{r}.$$

Dieſer letztere Ausdruck giebt zu erkennen, daß die Normalen von n auf AB und von m auf AB, dieſe Linien in einem und demſelben Punkte p treffen.

Zieht man alſo von der Spitze m auf zwei Seiten der Grundfläche Normalen und von den Punkten, wo dieſe Normalen die Grundlinien treffen, wiederum Normalen in der Grundfläche, ſo ſchneiden ſich beide in dem Punkte n, in welchem die Normale von der Spitze der Pyramide auf die Grundfläche, dieſe trifft.

Da übrigens $\sin \alpha = \sqrt{(r^2 - \cos^2 \alpha)}$

$$= \sqrt{\left[r^2 - \frac{r^2 \cos^2 c}{\cos^2 m}\right]} = \frac{r \sqrt{(\cos^2 m - \cos^2 c)}}{\cos m}$$

$$\text{und } (np) = \frac{A \cos m \sin \alpha}{r^2}$$

$$\text{ſo iſt auch } (np) = \frac{A \sqrt{(\cos^2 m - \cos^2 c)}}{r}.$$

Weil nun die Seite AB der Grundfläche = B gegeben iſt, und man den Werth von $Ap = \frac{A \cos c}{r}$ gefunden hat, ſo iſt auch

$$(Bp) = B - \frac{A \cos c}{r}$$

beſtimmt. Hiernach iſt der Punkt n ſeiner Lage nach durch die Abſciſſe Bp und die Ordinate pn beſtimmt, und kann man hieraus die Lage deſſelben gegen die Linie BD berechnen, laſſen ſich alſo aus dieſer Abſciſſe und Ordinate die Abſciſſe Bq und die Ordinate qn berechnen, indem der Winkel ABD der Grundfläche als bekannt angenommen wird, ſo kann aus der auf dieſe Weiſe gefundenen Lage von n gegen BD, die gegen DC gefunden werden u. ſ. f., und es läßt ſich daher alsdann, durch wiederholte Anwendung derſelben Formel, nach und nach die Lage von n gegen alle Seiten der Grundfläche ermitteln.

Man ſetze, Fig. 29[a]., Bp = p, pn = n und den Winkel pBq = β, welche bekannt, und die geſuchte Abſciſſe Bq=x und die dazu gehörige Ordinate qn = y, ſo iſt, wenn man pl zu nq und no zu Bq parallel zieht,

$$(pl) = \frac{p \sin \beta}{r} \text{ und } (Bl) = \frac{p \cos \beta}{r}$$

und weil das Dreieck pon dem Dreieck plB ähnlich iſt,

$$(no) = \frac{n \sin \beta}{r} \text{ und } (po) = \frac{n \cos \beta}{r}.$$

Nun iſt Bq = Bl + on und qn = pl − po

$$\text{folglich iſt } x = \frac{p \cos \beta}{r} + \frac{n \sin \beta}{r}$$

$$\text{und } y = \frac{p \sin \beta}{r} - \frac{n \cos \beta}{r}.$$

Es läßt ſich alſo wirklich die Lage von n gegen alle Seiten der Grundfläche, ſo viel ſie derſelben auch haben mag, aus den, in der Aufgabe als gegeben angenommenen Stücken berechnen.

§. 54.

Von dem Netze der Pyramiden.

Iſt die Grundfläche ABCDE, Fig. 30., einer Pyramide gegeben, und von den Seitenflächen derſelben, die beiden an AB und BC anliegenden Dreiecke ABa und BCb, in welchen Ba = Bb ſein muß, ſo kann man das ganze Netz des Körpers auf folgende Art conſtruiren:

Man ziehe von a die Normale $a\alpha$ auf AB, und von b die Normale $b\beta$ auf BC, und verlängere beide, bis ſie ſich in n ſchneiden, ſo iſt nach §. 53. der hierdurch gefundene Punkt n, der Punkt, in welchem die von der Spitze gefällte Normale die Grundfläche trifft. Zieht man nun von n aus auf die übrigen Seiten der Grundfläche die Normalen $n\gamma$, $n\delta$, $n\varepsilon$, ſo iſt γ der Punkt, in welchem die von der Spitze c des über CD beſchriebenen Dreiecks CDc gefällte Normale, die Grundlinie CD trifft, und es hat dieſelbe Bewandniß auch mit δ in Beziehung auf das Dreieck DEd und mit ε in Beziehung auf das Dreieck EAe. Verlängert man alſo $n\gamma$, und beſchreibt aus C, als Mittelpunkt, mit einem Radius Cb einen Bogen, der die verlängerte $n\gamma$ in c ſchneidet, ſo iſt c die Spitze des Dreiecks CDc und es iſt alſo dieſes Dreieck beſtimmt. Wird nun ferner $n\delta$ verlängert, und dieſe Linie aus D mit einem Radius = Dc geſchnitten, ſo iſt der Durchſchnittspunkt d die Spitze von dem Dreieck DEd, und eben ſo erhält man die Spitze e des Dreiecks EAe, wenn man von E aus, mit dem Radius Ed einen Bogen beſchreibt, und $n\varepsilon$ verlängert, bis ſie dieſen Bogen ſchneidet. Mit dem Dreieck EAe iſt nun die Conſtruction des ganzen Netzes beendet, und es erhält in dieſem Ae eine ſolche Länge, daß dieſe Linie der Aa gleich iſt.

Zuſatz 1. Soll das Netz möglich ſein, und ſollen überhaupt die gegebenen Stücke eine Pyramide vollkommen beſtimmen, ſo muß das Dreieck ABa eine ſolche Höhe haben, daß $a\alpha > \alpha n$ iſt, und eben ſo muß $b\beta > \beta n$. Hieraus geht zugleich hervor, daß wenn man Bn zieht, ſein muß $\angle aBA > \angle nB\alpha$, denn da $a\alpha n$ eine gerade Linie iſt, $a\alpha > \alpha n$, ſo iſt auch

$$Ba > Bn$$

$$\text{alſo } \angle Bna > \angle Ba\alpha$$

$$\text{es iſt aber } \angle Bn\alpha + \angle nB\alpha = \angle Ba\alpha + \angle aB\alpha$$

$$\text{folglich iſt } \quad nB\alpha < \angle aB\alpha.$$

Aus demſelben Grunde muß natürlich auch ſein

$$\angle \beta Bb > \angle \beta Bn.$$

Zuſatz 2. Das Netz einer Pyramide, und alſo dieſe ſelbſt, iſt vollkommen beſtimmt, wenn man die Grundfläche ABCDE, eins von den Seitendreiecken, z. B. ABa kennt und

außerdem in einer der übrigen Seiten der Grundfläche, z. B. in DE den Punkt δ, in welchem dieſe Linie von der Normale aus d getroffen wird.

Zuſatz 3. Es laſſen ſich hiernach von einer Pyramide aus den, in Zuſatz 2, angegebenen Stücken alle Kanten derſelben, ſo wie die ſämmtlichen in ihr vorkommenden ebenen Winkel durch eine geometriſche Conſtruction beſtimmen, und es können dieſe Stücke auch aus den gegebenen, mit Hülfe der bekannten trigonometriſchen Formeln, berechnet werden. Daß aber hierdurch auch die ſämmtlichen, in der Pyramide vorkommenden Neigungswinkel beſtimmt ſind, ergiebt ſich auf folgende Art:

Bei dem Zuſammenſchlagen des Netzes fallen die Punkte a, b, c, d und e in der Spitze der Pyramide zuſammen, welche normal über n liegt. Es iſt alſo Ba die Hypotenuſe eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem Bn die eine Kathete iſt und die Höhe der Pyramide die andere. Da nun Ba und Bn gegeben ſind, ſo kann man dieſes Dreieck verzeichnen, wodurch nicht nur die Höhe der Pyramide beſtimmt iſt, ſondern auch der Neigungswinkel der durch Ba und Bb gebildeten Kante gegen die Grundfläche; es iſt nämlich dieſer dem Winkel des verzeichneten Dreiecks gleich, welcher der Höhe gegenüberliegt. Eben ſo erhält man, wenn das durch Cn, Cb und die Höhe der Pyramide beſtimmte Dreieck verzeichnet wird, den Neigungswinkel der durch Cb und Cc gebildeten Kante gegen die Grundfläche. Es laſſen ſich alſo auf dieſe Weiſe die Neigungswinkel aller Kanten gegen die Grundfläche beſtimmen.

Da bei dem Zuſammenſchlagen der Pyramide a normal über n liegt, ſo bildet die Höhe der Pyramide mit den Linien aα und αn ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem der von aα und αn eingeſchloſſene Winkel der Neigungswinkel iſt, welchen das Dreieck ABa mit der Grundfläche bildet. Eben ſo iſt auch in dem mit der Höhe der Pyramide und den Linien bβ und βn beſchriebenen Dreieck der von bβ und βn eingeſchloſſene Winkel, der von dem Dreieck BCb mit der Grundfläche gebildete Neigungswinkel. Man kann alſo auf dieſe Weiſe die Neigungswinkel aller Seitenflächen gegen die

Grundfläche beſtimmen. Eben ſo iſt es auch nicht ſchwer, die Neigungswinkel zu finden, welche die Seitenflächen mit einander bilden.

Zuſatz 4. Setzt man den Neigungswinkel, welchen die Kante an B mit der Grundfläche bildet, $= B'$, den der Kante an C mit der Grundfläche $= C'$, und bezeichnet man die Höhe der Pyramide mit H, ſo iſt

$$Bn : H = r : \text{tg } B' \text{ und } Cn : H = r : \text{tg } C',$$

daher iſt $(Bn) \times \text{tg } B' = (Cn) \times \text{tg } C'$,

oder $$\frac{(Bn)}{\cot B'} = \frac{(Cn)}{\cot C'};$$

es findet alſo die Proportion ſtatt

$$(Bn) : (Cn) = \cot B' : \cot C'.$$

Die Cotangenten der Neigungswinkel der Kanten verhalten ſich alſo zu einander, wie die Abſtände der Ecken der Grundfläche, an welcher dieſe Kanten anliegen, von dem Punkte n.

Ferner iſt, wenn der Neigungswinkel des Dreiecks ABa mit der Grundfläche $= \alpha'$ und der des Dreiecks BCb mit der Grundfläche $= \beta'$ geſetzt wird,

$$(\alpha n) : H = r : \text{tg } \alpha' \text{ und } (\beta n) : H = r : \text{tg } \beta'$$

$$\text{alſo } (\alpha n) \times \text{tg } \alpha' = (\beta n) \times \text{tg } \beta'$$

und daher auch

$$\frac{(\alpha n)}{\cot \alpha'} = \frac{(\beta n)}{\cot \beta'};$$

folglich iſt $(\alpha n) : (\beta n) = \cot \alpha' : \cot \beta'$.

Die Neigungswinkel der die Seitenflächen bildenden Dreiecke gegen die Grundfläche verhalten ſich alſo zu einander, wie die Cotangenten des Abſtandes des Punktes n von den Grundlinien dieſer Dreiecke.

Berechnet man alſo nach der Anleitung §. 53. den Abſtand des Punktes n von allen Ecken und Seiten der Grundfläche, ſo wie die Höhe der Pyramide, ſo laſſen ſich alsdann die Neigungswinkel der Kanten und der Seitenflächen gegen die Grundfläche durch einfache Proportionen beſtimmen.

Anmerkung. Es iſt leicht einzuſehen, daß die in dem gegenwärtigen §. angegebene Methode zur Conſtruction des Netzes einer Pyramide auch bei der Conſtruction des, einem ſchiefen Prisma ent-

ſprechenden Netzes angewendet werden kann, und es könnten daher auch die hier mitgetheilten Regeln, ſtatt der in §. 40. angegebenen, angewendet werden.

§. 55.

Die Oberfläche einer Pyramide.

Die ganze Oberfläche einer Pyramide beſteht aus der Grundfläche derſelben und aus ſo vielen Dreiecken, als die Grundfläche Seiten hat, und es iſt daher z. B. die Oberfläche F der Pyramide, deren Netz Fig. 30. angegeben iſt, beſtimmt durch den Ausdruck, wenn man die Grundfläche mit G bezeichnet,

$$F = G + \tfrac{1}{2}\,[(AB)\cdot(a\alpha) + (BC)\cdot(b\beta) + (CD)\cdot(c\gamma) + (DE)\cdot(d\delta) + (EA)\cdot(e\varepsilon)].$$

Sind aber die Höhen der einzelnen Dreiecke nicht unmittelbar gegeben, ſo laſſen ſich dieſelben aus den etwa gegebenen Winkeln leicht berechnen.

Bei dem Zuſammenſchlagen des Netzes kommt, wie bereits in dem vorigen §. bemerkt worden iſt, a normal über n zu liegen, und es iſt nun für die Höhe der Pyramide = H

$$(a\alpha) : H = r : \sin\alpha'$$

$$\text{alſo } (a\alpha) = \frac{Hr}{\sin\alpha'},$$

und aus demſelben Grunde iſt auch

$$(b\beta) = \frac{Hr}{\sin\beta'} \text{ und } (c\gamma) = \frac{Hr}{\sin\gamma'} \text{ ꝛc.}$$

Die Formel für die Oberfläche läßt ſich daher auch durch die Neigungswinkel der Seitenfläche gegen die Grundfläche ausdrücken, es iſt nämlich, wenn man ſetzt

$AB = A,\quad Bc = B,\quad CD = C,\quad DE = D$ und $EA = E$,

$$F = G + \frac{Hr}{2}\left[\frac{A}{\sin a'} + \frac{B}{\sin\beta'} + \frac{C}{\sin\gamma'} + \frac{D}{\sin\delta'} + \frac{E}{\sin\varepsilon'}\right]$$

$$= G + \frac{H}{2r}\,[A\,\mathrm{cosec}\,a' + B\,\mathrm{cosec}\,\beta' + C\,\mathrm{cosec}\,\gamma' + D\,\mathrm{cosec}\,\delta' + E\,\mathrm{cosec}\,\varepsilon'].$$

Außerdem läßt ſich die Fläche auch durch die Abſtände des Punktes n von den Seiten der Grundfläche ausdrücken, denn es iſt für $n\alpha = \alpha$, $n\beta = \beta$ ꝛc.

$(a\alpha) = \sqrt{(H^2 - \alpha^2)}$, $(b\beta) = \sqrt{(H^2 - \beta^2)}$ ꝛc.
und daher iſt auch

$$F = G + \frac{A\sqrt{(H^2-\alpha^2)}}{2} + \frac{B\sqrt{(H^2-\beta^2)}}{2} + \frac{C\sqrt{(H^2-\gamma^2)}}{2} \text{ ꝛc.}$$

Wenn die Pyramide von der Art iſt, daß der Punkt n von allen Seiten der Grundfläche gleich weit abſteht, ſo daß alſo $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon$,

ſo wird $F = G + \frac{(A+B+C+D+E)\sqrt{(H^2-\alpha^2)}}{2}$;

die Oberfläche wird alsdann erhalten, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der Höhe $(a\alpha) = \sqrt{(H^2 - \alpha^2)}$ eines Dreiecks, die in dieſem Falle ſämmtlich gleiche Höhe haben, multiplicirt, und zu der Hälfte des Produkts die Grundfläche addirt. Uebrigens läßt ſich in dieſem Fall der Ausdruck für die Oberfläche noch auf eine einfachere Form bringen, denn nach der Vorausſetzung haben alsdann die Dreiecke AnB, BnC, CnD ꝛc. ſämmtlich gleiche Höhe; die Fläche von ABCDE wird alſo erhalten, wenn man den Umfang der Figur mit der Hälfte von $\alpha a = \alpha$ multiplicirt, folglich iſt für $a\alpha = h$, wenn der Umfang der Grundfläche = U geſetzt wird,

$$F = \frac{U\,(h + \alpha)}{2}.$$

Dieſe Formel iſt immer anwendbar, wenn die Grundfläche eine ſolche Form hat, daß ſich ein Kreis hineinzeichnen läßt, den alle Seiten berühren, und daß der Punkt n in dem Mittelpunkte dieſes Kreiſes liegt.

§. 56.

Der Kegel.

1. Ein Kegel entſteht, wenn man von einem, außerhalb eines der Größe und Lage nach gegebenen Kreiſes beſtimmten Punkte eine gerade Linie um den Kreis herum führt; es beſchreibt in dieſem Falle die gerade Linie die krumme Oberfläche und der gegebene Kreis iſt die Grundfläche des Kegels; der außerhalb des Kreiſes gegebene Punkt bildet deſſen Spitze, und die gerade Linie, welche dieſe Spitze mit dem Mittelpunkte der Grundfläche verbindet, wird die Axe

des Kegels genannt. Steht die Axe normal auf der Grundfläche, ſo wird der Kegel ſelbſt normal genannt, und wenn die Axe gegen die Grundfläche geneigt iſt, ſo nennt man ihn einen ſchiefen Kegel.

2. Aus dem Angeführten geht hervor, daß der normale Kegel auch erzeugt wird, wenn ein rechtwinkliges Dreieck ſich um die eine Kathete als um eine Axe dreht, dieſe Kathete wird alsdann ſelbſt die Axe des Kegels, die andere Kathete iſt der Radius der Grundfläche und die Hypotenuſe beſchreibt die krumme Oberfläche deſſelben. Der ſchiefe Kegel kann auf eine ähnliche Weiſe durch die Umdrehung einer Ebene um eine gerade Linie nicht erzeugt werden.

3. Legt man durch die Axe irgend eines Kegels eine Ebene, ſo ſchneidet dieſe die krumme Oberfläche deſſelben immer in einer geraden Linie, und es läßt ſich daher jeder Punkt des Umfangs der Grundfläche eines Kegels mit der Spitze deſſelben durch eine gerade Linie verbinden, die ganz in der krummen Oberfläche, oder wie man ſie auch nennt, in dem Mantel des Kegels liegt. Hieraus geht zugleich hervor, daß wenn man den Kegel durch eine Ebene in gleiche oder ungleiche Theile ſchneidet, der durch die Oberfläche des Kegels begränzte Schnitt immer ein Dreieck ſein muß, deſſen Grundlinie entweder der Durchmeſſer oder eine Sehne des Kreiſes iſt, welcher die Grundfläche des Kegels bildet. Iſt der Kegel normal, ſo iſt dieſes Dreieck immer gleichſchenklig.

4. Zwei Kegel ſind ähnlich, wenn ihre Axen gleiche Neigung gegen ihre Grundflächen haben, und die Axen zu einander wie die Radien der Grundflächen ſich verhalten.

5. Wird ein Kegel parallel zu ſeiner Grundfläche geſchnitten, ſo iſt, wie ſich leicht beweiſen läßt, der Durchſchnitt ein Kreis, und der dadurch nach der Spitze zu abgeſchnittene Theil des Kegels iſt dem ganzen ähnlich.

6. Jeder Kegel iſt der dritte Theil eines Cylinders, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat, und es läßt ſich dieſes mit Hülfe der bereits §. 41. benutzten Sätze beweiſen. Nämlich wenn K eine Kreisfläche iſt und p ein Vieleck in dem Kreiſe, ſo kann p einen ſolchen Werth erhalten, daß für

$K - p = d$ der Werth von d kleiner als a iſt für jeden noch ſo kleinen Werth von a. Eben ſo kann man ein Vieleck $= P$ um den Kreis beſchreiben von der Art, daß für $P - K = \delta$ der Werth von δ kleiner iſt als α für jeden noch ſo kleinen Werth von δ. Nun iſt, wenn man den Inhalt des Kegels $= X$, den des Cylinders, welcher mit ihm die Grundfläche $= K$ und die Höhe $= H$ gemein hat, $= C = HK$ ſetzt, entweder $3X < C$ oder $3X > C$ oder $3X = C$.

Nimmt man an, es ſei

$$3X < C, \text{ alſo } X < \tfrac{1}{3}C \text{ oder } X < \tfrac{1}{3}H \times K,$$

ſo kann man ſetzen $X + \frac{1}{3}H \times a = \frac{1}{3}H \times K$,

$$\text{alſo } X = \tfrac{1}{3}H \times (K - a).$$

Weil aber für $K - p = d$ ſein ſoll $d < a$,

ſo iſt auch $K - p < a$

folglich $K - a < p$,

und daher $X < \frac{1}{3}Hp$.

Es iſt aber $\frac{1}{3}Hp$ der Inhalt einer Pyramide, die mit dem Kegel die Höhe H gemein hat, und deren Grundfläche innerhalb der Grundfläche K des Kegels beſchrieben iſt, und es muß daher nothwendig dieſe Pyramide kleiner als der Kegel X ſein, was dem Reſultat $X < \frac{1}{3}Hp$ widerſpricht, folglich iſt $3X < C$ nicht möglich.

Nimmt man an $3X > C$, alſo auch

$$3X > HK,$$

ſo kann man ſetzen $3X = H(K + \alpha)$.

Weil aber für $P - K = \delta$ ſein kann, $\delta < \alpha$,

ſo iſt alsdann auch $P - K < \alpha$ und $P < K + \alpha$,

folglich iſt auch $PH < H(K + \alpha)$

und $PH < 3X$

oder $\frac{1}{3}HP < X$.

Da aber $\frac{1}{3}H \times P$ den Inhalt einer Pyramide ausdrückt, welche mit dem Kegel die Höhe H gemein hat, und deren Grundfläche P die des Kegels $= K$ einſchließt, ſo daß demnach der Kegel ganz innerhalb der Pyramide liegt, ſo iſt auch $\frac{1}{3}H \times P > X$, was der Folgerung $\frac{1}{3}H \times P < X$ widerſpricht. Folglich kann auch nicht ſein $3X > C$, und es iſt daher nothwendiger Weiſe $3X = C$ oder $X = \frac{1}{3}C$; nämlich

es iſt der Kegel dem dritten Theil eines Cylinders gleich, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

7. Die Formel für den Kubikinhalt eines Cylinders iſt, wenn man den Radius der Grundfläche $= R$ ſetzt,

$C = HR^2\pi$; folglich iſt die für den Kegel

$$X = \tfrac{1}{3}HR^2\pi,$$

und eben ſo wird der Inhalt x eines anderen Kegels, deſſen Höhe $= h$ iſt, und deſſen Grundfläche einen Radius $= \varrho$ hat, ausgedrückt durch

$$x = \tfrac{1}{3}h\varrho^2\pi$$

folglich iſt $X : x = HR^2 : h\varrho^2$

und hieraus folgt für $H = h$

$$X : x = R^2 : \varrho^2 = R^2\pi : \varrho^2\pi.$$

Kegel von gleicher Höhe verhalten ſich alſo wie ihre Grundflächen, und eben ſo ergiebt ſich, wenn man $R = \varrho$ ſetzt, daß Kegel von gleicher Grundfläche wie ihre Höhen ſich verhalten.

8. Aus der Proportion

$$X : x = HR^2 : h\varrho^2$$

folgt für $X = x$ auch $HR^2 = h\varrho^2$

alſo $H : h = \varrho^2 : R^2$

und $H : h = \varrho^2\pi : R^2\pi$.

Wenn alſo zwei Kegel gleich groß ſind, ſo ſtehen die Höhen derſelben im umgekehrten Verhältniſſe ihrer Grundflächen, und es gilt auch dieſer Satz umgekehrt.

9. Sind zwei Kegel einander ähnlich, ſo iſt

$$H : h = R : \varrho$$

und da $R^2 : \varrho^2 = R^2 : \varrho^2$

ſo iſt auch $HR^2 : h\varrho^2 = R^3 : \varrho^3$

da nun $X : x = HR^2 : h\varrho^2$

ſo folgt $X : x = R^3 : \varrho^3$;

ähnliche Kegel verhalten ſich alſo zu einander, wie die dritten Potenzen der Radien ihrer Grundflächen, und auf gleiche Weiſe folgt: ſie verhalten ſich auch wie die dritten Potenzen ihrer Höhen, oder ganz allgemein, wie die dritten Potenzen der in ihnen ähnlich liegenden Linien.

§. 57.
Formeln für den Kegel.

Setzt man den Kubikinhalt eines Kegels = K, ſo iſt

$$K = \frac{1}{3}HR^2\pi$$

und es iſt für einen normalen Kegel H zugleich die Axe desſelben. Der normale Kegel aber wird erzeugt, wenn ein rechtwinkliges Dreieck um die eine Kathete ſich dreht, und es beſchreibt die Hypotenuſe in dieſem Falle den Mantel des Kegels. Dieſer Mantel iſt daher einem Ausſchnitte eines Kreiſes gleich, der mit der Hypotenuſe des erzeugenden Dreiecks beſchrieben wird, und zu welchem ein Bogen dieſes Kreiſes gehört, der mit der Grundfläche des Kegels gleichen Umfang hat. Setzt man alſo dieſe Hypotenuſe, welche auch die Seite des Kegels genannt wird, = a, ſo iſt, weil der Umfang der Grundfläche $2R\pi$ beträgt, die Fläche des Mantels von einem normalen Kegel =

$$\frac{a \times 2R\pi}{2} = aR\pi$$

und die ganze Oberfläche F des Kegels wird daher ausgedrückt durch die Formel

$$F = aR\pi + R^2\pi$$

$$\text{oder } F = \left(\frac{a + R}{2}\right) \cdot 2R\pi.$$

Die ganze Oberfläche iſt alſo dem Mantel eines Kegels gleich, der dieſelbe Grundfläche hat, und deſſen Seite ſo groß iſt, als a und R zuſammengenommen.

Uebrigens verſteht es ſich von ſelbſt, daß bei dem normalen Kegel die Größen a, R und H durch die Gleichung von einander abhängen

$$a^2 = R^2 + H^2.$$

Zuſatz 1. Wenn bei einem ſchiefen Kegel die Axe gegen die Grundfläche unter einem Winkel = m geneigt iſt, ſo wird der Kubikinhalt ausgedrückt durch die Formel

$$K = \frac{1}{3}AR^2\pi \; \frac{\sin m}{r} = \frac{AR^2\pi \sin m}{3r},$$

wo A die Axe des Kegels iſt. Für den Mantel dieſes Kegels läßt ſich keine einfache Formel angeben, und es wird dieſe daher=

her erſt in der zweiten Abtheilung dieſes Werkes abgeleitet werden.

Zuſatz 2. Das Netz eines normalen Kegels beſteht aus der Grundfläche deſſelben und aus einem mit der Seite des Kegels beſchriebenen Kreisausſchnitte, deſſen Bogen die Länge des Umfangs der Grundfläche hat.

Zuſatz 3. Die drei Formeln für den normalen Kegel

$$K = \tfrac{1}{3} HR^2\pi;\quad F = aR\pi + R^2\pi$$
$$\text{und } a^2 = R^2 + H^2$$

ſind hinreichend, um in allen Fällen aus zwei gegebenen Stücken die drei übrigen zu berechnen, wobei man jedoch bei einigen Aufgaben auf eine Gleichung von einem höhern Grade kommt. Es iſt eine zweckmäßige Uebung, wenn man die ſämmtlichen hier möglichen Formeln eben ſo darſtellt, wie dies §. 42. bei den Formeln für den Cylinder geſchehen iſt, nur wird hier die Anzahl der Formeln größer, weil fünf verſchiedene Größen vorkommen, nämlich H, R, a, K und F. Je zwei dieſer Größen ſind hinreichend, um die drei übrigen zu finden; man erhält alſo für je zwei gegebene Größen drei verſchiedene Formeln, und da von fünf Größen auf zehn verſchiedene Arten immer zwei andere als gegeben angenommen werden können, ſo iſt die Anzahl aller Formeln, welche man hier erhält, $= 3 \times 10 = 30$. Die gegebenen Größen ſind hier nach und nach HR; Ha; HK; HF; Ra; RK; RF; aK; aF oder KF.

Zur Erläuterung folgt hier die Entwickelung einiger dieſer Formeln, alſo

1. Es iſt a und F gegeben; man ſoll hieraus die übrigen Größen berechnen.

$$\text{Da } R^2\pi + aR\pi = F$$
$$\text{ſo iſt } (R + \tfrac{1}{2}a)^2 = \frac{F}{\pi} + \frac{a^2}{4}$$

und wenn man den bekannten Ausdruck $\frac{F}{\alpha} + \frac{a^2}{-} = P^2$ ſetzt

$$R + \tfrac{1}{2}a = P$$
$$\text{alſo } R = -\tfrac{1}{2}a + P.$$

$$\text{Ferner iſt } R^2 = P^2 - aP + \frac{a^2}{4}$$

und weil $H^2 = a^2 - R^2$,

ſo iſt $H^2 = \frac{3a^2}{4} + aP - P^2$ und $H = \sqrt{\left[\frac{3a^2}{4} + aP - P^2\right]}$

und weil endlich

$$K = \tfrac{1}{3}\, HR^2\pi$$

ſo iſt $K = \frac{1}{3} \sqrt{\left[\frac{3a^2}{4} + aP - P^2\right] \times \left[P^2 - aP + \frac{a^2}{4}\right]}\, \pi$,

Ausdrücke, die durch Reduction ſich noch vereinfachen laſſen.

2. Es iſt R und K gegeben; man ſoll die übrigen Größen berechnen.

Da $K = \frac{1}{3}HR^2\pi$,

ſo iſt $H = \frac{3K}{R^2\pi}$,

und da $a^2 = R^2 + H^2$,

ſo iſt auch $a^2 = R^2 + \frac{9K^2}{R^4\pi^2}$;

alſo $a = \frac{\sqrt{(R^6\pi^2 + 9K^2)}}{R^2\pi}$.

Endlich iſt $F = R^2\pi + aR\pi$,

es iſt alſo auch, wenn für a der Werth geſetzt wird,

$$F = R^2\pi + \frac{\sqrt{(R^6\pi^2 + 9K^2)}}{R\pi}.$$

3. Kennt man a und H, ſo iſt

$$R^2 = a^2 - H^2$$

und weil $K = \frac{1}{3}HR^2\pi$,

ſo iſt $K = \frac{1}{3}H\,(a^2 - H^2)\,\pi = \frac{1}{3}Ha^2\pi - \frac{1}{3}H^3\pi$.

Zieht man alſo von einem Kegel, der mit dem gegebenen gleiche Höhe hat, und deſſen Radius der Grundfläche der Seite des gegebenen gleich iſt, einen andern ab, der dieſelbe Höhe hat, und deſſen Radius der Grundfläche ſeiner Höhe gleich iſt, ſo giebt der Reſt den Inhalt des gegebenen Kegels.

Da übrigens $F = R^2\pi + aR\pi$,

ſo iſt auch durch a und H ausgedrückt

$$F = (a^2 - H^2)\,\pi + a\pi\sqrt{(a^2 - H^2)}.$$

§. 58.

Allgemeine Bemerkungen über die Pyramiden.

1. Die Entſtehung einer Pyramide kann in der Art erklärt werden, daß außerhalb einer, der Größe, Form und Lage nach gegebenen, ebenen Figur, ein Punkt der Lage nach gegeben iſt, und daß eine von dieſem Punkt ausgehende gerade Linie um den Umfang der gegebenen Figur herumgeführt wird. Die Linie beſchreibt hierbei die Seitenflächen der Pyramide, und die gegebene Figur iſt ihre Grundfläche, welche jede beliebige Form haben kann.

2. Iſt die Grundfläche geradlinig, ſo erhält man eine Pyramide im engern Sinne, deren Mantel aus ſo vielen geradlinigen Dreiecken beſteht, als die Grundfläche Seiten hat, und es ſind dieſe Seiten der Grundfläche ſelbſt die Grundlinien der Dreiecke, deren Spitzen gemeinſchaftlich in der Spitze der Pyramide zuſammenſtoßen.

Iſt die Grundfläche ein Kreis, ſo wird die Pyramide ein Kegel, deren Mantel, wenn der Kegel normal iſt, aus einem Kreisausſchnitte beſteht, in jedem anderen Falle aber läßt ſich derſelbe nur mit Hülfe der höhern Geometrie conſtruiren. — Die Grundfläche einer Pyramide kann aber auch irgend eine andere krumm- oder gemiſchtlinige Figur ſein, der Körper gehört immer zu der Gattung der Pyramiden, wenn derſelbe nach der in No. 1. angegebenen Art entſtanden gedacht werden kann.

3. Die gemeinſchaftliche Eigenthümlichkeit aller Pyramiden beſteht darin, daß wenn man von der Spitze derſelben eine Normale auf ihre Grundfläche fällt, und von dem Punkt aus, in welchem die Normale die Grundfläche trifft, eine gerade Linie nach irgend einem Punkte des Umfanges der Grundfläche zieht, die durch dieſe Linie und die gefällte Normale ihrer Lage nach beſtimmte Fläche die Seitenfläche des Körpers in einer geraden Linie ſchneidet. Ueberhaupt muß ſich bei einer jeden Pyramide jeder Punkt des Umfangs der Grundfläche mit der Spitze durch eine gerade Linie verbinden laſſen, die ganz in der Oberfläche des Mantels der Pyramide liegt.

4. Hieraus folgt unmittelbar: Wenn eine Pyramide von einer Fläche geſchnitten wird, welche durch die Spitze derſelben geht, ſo iſt der Umfang des Schnittes immer ein Dreieck, und es wird die Pyramide dadurch in zwei andere zerlegt. Wird die Pyramide aber von einer Fläche geſchnitten, die parallel zur Grundfläche derſelben läuft, ſo iſt der Durchſchnitt der Grundfläche ähnlich, und es iſt alsdann der nach der Spitze zu abgeſchnittene Theil der ganzen Pyramide ähnlich, während der untere Theil von zwei parallelen ähnlichen Grundflächen begränzt iſt, und eine abgeſtumpfte Pyramide genannt wird. Iſt die Grundfläche der ganzen Pyramide geradlinig, ſo ſind die Seitenflächen der abgeſtumpften, Paralleltrapeze.

5. Die allgemeine Formel für den Kubikinhalt aller Pyramiden iſt

$$K = \tfrac{1}{3}GH,$$

und wenn der Punkt, in welchem die Grundfläche von der Normalen aus der Spitze getroffen wird, von einer Seite = A der geradlinigen Grundfläche einen Abſtand = α hat, ſo iſt der Flächeninhalt des Dreiecks der Seitenfläche, welches A zur Grundlinie hat, $= \frac{A\sqrt{(H^2 + \alpha^2)}}{2}$, und die ganze Oberfläche einer ſolchen Pyramide läßt ſich daher durch die Formel ausdrücken

$$F = G + \frac{A\sqrt{(H^2+\alpha^2)}}{2} + \frac{B\sqrt{(H^2+\beta^2)}}{2} + \frac{C\sqrt{(H^2+\gamma^2)}}{2} \text{ ꝛc.}$$

Eine einfachere Formel für die Oberfläche giebt es nur in dem Falle, wenn die Grundfläche regelmäßig iſt, und die Normale von der Spitze den Mittelpunkt der Grundfläche trifft. In dieſem Falle iſt

$$A = B = C \text{ ꝛc. und } \alpha = \beta = \gamma \text{ ꝛc.}$$

und es iſt daher, wenn die Grundfläche n Seiten hat,

$$F = G + \frac{nA\sqrt{(H^2 + \alpha^2)}}{2},$$

$$\text{wo } G = \frac{nA\alpha}{2} \text{ ſein muß, und es iſt daher}$$

$$F = \frac{nA}{2}[\alpha + \sqrt{(H^2 + \alpha^2)}].$$

Für den normalen Kegel erhält man hieraus

$$F = R^2\pi + R\pi\sqrt{(H^2 + R^2)}$$
$$= R\pi\,[R + \sqrt{(H^2 + R^2)}].$$

6. Jede Pyramide, deren Grundfläche geradlinig iſt, wird, wenn die Grundfläche n Seiten hat, im Ganzen von n Dreiecken und einem nEck begränzt, und es hat dieſelbe n dreikantige und eine nkantige Ecke; die letztere bildet die Spitze der Pyramide. Dieſe Ecken werden zuſammengenommen von 4n ebenen Winkeln gebildet, und die Anzahl aller Kanten dieſer Pyramide iſt = 2n. Die dreiſeitige Pyramide wird von vier Dreiecken eingeſchloſſen, und hat daher das Eigenthümliche, daß jede Ecke derſelben ihre Spitze bilden kann. Setzt man bei einer ſolchen Pyramide die Fläche eines Dreiecks = A, ihren Abſtand von der gegenüberliegenden Spitze = a, und wird eines andern Dreiecks Fläche = B und der Abſtand derſelben von der gegenüberliegenden Fläche = b geſetzt, ſo findet immer die Proportion ſtatt

$$A : B = b : a.$$

§. 59.
Beiſpiel.

Es iſt Fig. 31. abcde die Grundfläche einer Pyramide, die ihrer Größe und Form nach dadurch beſtimmt iſt, daß man kennt $\angle a = 82^\circ\ 47'$; $\angle b = 158^\circ\ 34'$; $\angle c = 102^\circ\ 35'$; $\angle d = 117^\circ\ 12'$; ferner ab = 46,7; bc = 85,3 und cd = 54,6. Die Höhe der Pyramide iſt H = 36,6 und die Lage des Punktes n iſt beſtimmt durch die Abſciſſe cm = 28,2 und die Ordinate mn = 41,2. Es ſollen hieraus die einzelnen Theile der Pyramide berechnet werden.

1. Berechnung der Lage des Punktes n gegen alle Seiten der Grundfläche.

Nach §. 53. iſt, wenn von dem Scheitel eines Winkels β an, die Abſciſſe des Punktes n auf dem einen Schenkel = p, die dazu gehörige Ordinate = n, die Abſciſſe auf dem andern Schenkel = x und die Ordinate = y geſetzt wird,

$$x = \frac{p\ \cos\ \beta}{r} + \frac{n\ \sin\ \beta}{r} \text{ und } y = \frac{p\ \sin\ \beta}{r} - \frac{n\ \cos\ \beta}{r}$$

Nun iſt in der gegenwärtigen Aufgabe die Lage von n beſtimmt durch die Abſciſſe cm = 28,2 und die Ordinate mn = 41,2, und hieraus findet man, weil $\angle c = 102^0\ 35'$, mittelſt der ſo eben angegebenen Formel

(cg) = 34,0668 und (gn) = 36,4984.

Da aber cb = 85,3 gegeben iſt, ſo iſt auch bg = 51,2332 beſtimmt.

Aus bg und gn findet man nun ferner, da $\angle b = 158^0\ 34'$, mit Hülfe derſelben Formel

(bp) = — 34,3529 und (pn) = 52,6959.

Da der für bp gefundene Werth negativ iſt, ſo folgt, daß p auf der Verlängerung von ab liegt. Da aber ab = 46,7, ſo iſt ap = 81,0529.

Da man auch den Winkel a = $82^0\ 47'$ kennt, ſo läßt ſich nun aus ap und pn mittelſt der obigen Formel der Werth von aq und qn berechnen, und man findet

(aq) = 62, 4605 und (qn) = 73, 7910.

Weil cd und cm gegeben ſind, ſo kennt man auch dm = 26,4; und es iſt außerdem auch mn = 41,2 und $\angle d = 117^0\ 12'$ gegeben, und hieraus wird gefunden

(dr) = 24,5766 und rn = 42,3130.

Endlich kennt man nun von dem Viereck nreq die beiden Seiten nr, nq; die Winkel bei r und bei q, von welchen jeder = 90^0 iſt, und $\angle e = 78^0\ 52'$, der dadurch beſtimmt iſt, daß von abcde die übrigen vier Winkel gegeben ſind, und es laſſen ſich hieraus leicht die Werthe von er und eq berechnen. Man findet

(er) = 83,5335 und (eq) = 57,6464,

wodurch nun auch die beiden noch fehlenden Seiten de und ea der Grundfläche beſtimmt ſind.

Nämlich es iſt

(de) = 108,1101 und (ea) = 120,1069.

2. Berechnung des Kubikinhalts der Pyramide.

Setzt man die Grundfläche abcde = G, ſo iſt

$$G = \tfrac{1}{2}\,[ab \cdot np + bc \cdot ng + cd \cdot nm + de \cdot nr + ea \cdot nq].$$

Da nun nach No. 1. die Werthe aller hier vorkommenden

Linien bekannt ſind, ſo iſt dadurch auch die Grundfläche beſtimmt, und man findet:

$$\frac{ab \cdot np}{2} = 1230,35$$

$$\frac{bc \cdot ng}{2} = 1556,66$$

$$\frac{cd \cdot mn}{2} = 1124,76$$

$$\frac{de \cdot nr}{2} = 2287,23$$

$$\frac{ea \cdot nq}{2} = 4431,40$$

folglich iſt $G = 10630,50.$

Die Höhe der Pyramide aber iſt, vermöge der Bedingungen der Aufgabe, $= 36,6 = H$, folglich iſt der Kubikinhalt P derſelben

$$P = \frac{GH}{3} = \frac{10630,50 \times 36,6}{3} = 10630,50 \times 12,2$$
$$= 129692,100.$$

3. Berechnung der Oberfläche der Pyramide.

Nach §. 55. iſt, wenn man $cd = C$, die Höhe des an cd anliegenden Dreiecks $= c$, und die Normale $mn = \gamma$ ſetzt,

$$c = \sqrt{(H^2 + \gamma^2)}$$

und die Fläche des Dreiecks $= \frac{Cc}{2} = \frac{C\sqrt{(H^2 + \gamma^2)}}{2}$;

da nun $(cd) = C = 54,6$; $(mn) = \gamma = 41,2$ und $H = 36,6$,

ſo iſt $c = \sqrt{[36,6^2 + 41,2^2]} = 55,11$

und daher $\frac{Cc}{2} = \frac{54,6 \times 55,11}{2}$.

Nämlich es iſt, wenn man die Spitze der Pyramide mit N bezeichnet,

$$\triangle\, cdN = 1504,5$$

für $(bc) = B$; $(ng) = \beta$ und $Ng = b$, iſt

$b = \sqrt{(H^2 + \beta^2)}$ und $\triangle\, bcN = \frac{Bb}{2} = \frac{B\sqrt{(H^2 + \beta^2)}}{2}$.

Es iſt aber bc = B = 85,3 und (gn) = β = 36,4984, woraus gefunden wird

$$b = \sqrt{[36,6^2 + 36,5^2]} = 51,69;$$

folglich iſt $\frac{Bb}{2} = \frac{85,3 \times 51,69}{2}$,

alſo Δ bcN = 4409,2.

Für ab = A; np = α und Np = a, iſt

$$a = \sqrt{(H^2 + \alpha^2)} \text{ und } \Delta abN = \frac{Aa}{2};$$

es iſt aber (ab) = A = 46,7 und (np) = α = 52,6959; folglich iſt $a = \sqrt{[36,6^2 + 52,7^2]} = 64,16$

und daher $\frac{Aa}{2} = \frac{46,7 \times 64,16}{2} = 46,7 \times 32,08$,

alſo iſt Δ abN = 1498,1.

Für ac = E; nq = ε und Nq = e, iſt

$$e = \sqrt{(H^2 + \varepsilon^2)} \text{ und } \Delta aeN = \frac{Ee}{2}$$

es iſt aber ae = E = 120,1069 und nq = ε = 73,7910,
alſo iſt $e = \sqrt{[36,6^2 + 73,8^2]} = 82,38$

und daher $\Delta aeN = \frac{Ee}{2} = 4946,9.$

Für (ed) = D; rn = δ und Nr = d, iſt

$$d = \sqrt{(H^2 + \delta^2)} \text{ und } \Delta deN = \frac{Dd}{2};$$

es iſt aber (ed) = D = 108,1101 und (rn) = δ = 42,3130;
folglich iſt $d = \sqrt{[36,6^2 + 42,3^2]} = 55,93$,

und daher $\frac{Dd}{2} = \frac{108,1101 \times 55,93}{2}$;

alſo Δ deN = 3023,3.

Es iſt ſonach G = 10630,5
Δ cdN = 1504,5
Δ bcN = 4409,2
Δ abN = 1498,1
Δ aeN = 4946,9
Δ edN = 3023,3

folglich iſt F = 26012,5

die Oberfläche der ganzen Pyramide.

4. Berechnung der Neigungswinkel der Seitendreiecke gegen die Grundfläche.

Wenn man den Neigungswinkel des an cd = C anliegenden Dreiecks mit der Grundfläche = γ' ſetzt, ſo iſt

$$\gamma : \mathrm{H} = \mathrm{r} : \operatorname{tg} \gamma'$$

$$\text{alſo } \operatorname{tg} \gamma' = \frac{\mathrm{Hr}}{\gamma} = \frac{36{,}6 \cdot \mathrm{r}}{41{,}2}$$

woraus man erhält $\gamma' = 41^0\ 37'$.

Eben ſo iſt, wenn der Neigungswinkel des an bc = B anliegenden Dreiecks mit der Grundfläche = β' geſetzt wird,

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{\mathrm{Hr}}{\beta} = \frac{36{,}6 \cdot \mathrm{r}}{36{,}4984}$$

und daher iſt $\beta' = 45^0\ 4'$.

Wird auf gleiche Weiſe der Neigungswinkel des Dreiecks an ab = A mit der Grundfläche = α' geſetzt, ſo iſt

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\mathrm{Hr}}{\alpha} = \frac{36{,}6 \cdot \mathrm{r}}{52{,}6959}$$

und es iſt daher $\alpha' = 34^0\ 47'$.

Eben ſo iſt der Neigungswinkel ε' an ae = E durch die Formel beſtimmt

$$\operatorname{tg} \varepsilon' = \frac{\mathrm{Hr}}{\varepsilon} = \frac{36{,}6 \cdot \mathrm{r}}{73{,}791}$$

alſo $\varepsilon' = 26^0\ 23'$.

Endlich wird der Neigungswinkel δ' an ed = D ausgedrückt durch

$$\operatorname{tg} \delta' = \frac{\mathrm{Hr}}{\delta} = \frac{36{,}6 \cdot \mathrm{r}}{42{,}3130}$$

und daher $\delta' = 40^0\ 52'$;

wodurch alſo die ſämmtlichen Neigungswinkel, welche die Seitenflächen mit der Grundfläche bilden, beſtimmt ſind.

5. Die Neigungswinkel der Kanten gegen die Grundfläche.

Bezeichnet man den Neigungswinkel der Kante an c mit der Grundfläche durch c′, den der Kante an b mit der Grundfläche durch b′ ꝛc., ſo iſt

$$(cn) : H = r : tg\ c' \text{ alſo } tg\ c' = \frac{Hr}{(cn)}$$

$$(bn) : H = r : tg\ b' \ „ \ tg\ b' = \frac{Hr}{(bn)}$$

$$(an) : H = r : tg\ a' \ „ \ tg\ a' = \frac{Hr}{(an)}$$

$$(en) : H = r : tg\ e' \ „ \ tg\ e' = \frac{Hr}{(en)}$$

$$\text{und } (dn) : H = r : tg\ d' \ „ \ tg\ d' = \frac{Hr}{(dn)}$$

hiernach iſt

$$tg\ c' = \frac{Hr}{\sqrt{[(cm)^2+(mn)^2]}} = \frac{36,6 \cdot r}{\sqrt{[28,2^2+42,2^2]}} = \frac{36,6 \cdot r}{50,755}$$

und daher $c' = 35^0\ 48'$.

$$tg\ b' = \frac{Hr}{\sqrt{[(bp)^2+(pn)^2]}} = \frac{36,6 \cdot r}{\sqrt{[34,4^2+52,7^2]}} = \frac{36,6 \cdot r}{62,933}$$

alſo $b' = 30^0\ 11'$.

$$tg\ a' = \frac{Hr}{\sqrt{[(aq)^2+(qn)^2]}} = \frac{36,6 \cdot r}{\sqrt{[62,5^2+73,8^2]}} = \frac{36,6 \cdot r}{96,709}$$

alſo $a' = 20^0\ 44'$.

$$tg\ e' = \frac{Hr}{\sqrt{[(er)^2+(rn)^2]}} = \frac{36,6 \cdot r}{\sqrt{[83,5^2+42,3^2]}} = \frac{36,6 \cdot r}{93,603}$$

daher iſt $e' = 21^0\ 21'$.

$$tg\ d' = \frac{Hr}{\sqrt{[(dr)^2+(rn)^2]}} = \frac{36,6 \cdot r}{\sqrt{[24,6^2+42,3^2]}} = \frac{36,6 \cdot r}{48,933}$$

und alſo $d' = 36^0\ 48'$.

Die Neigungswinkel, welche die Seitenflächen mit einander bilden, laſſen ſich ebenfalls leicht berechnen, und es mag dieſe Berechnung der eigenen Uebung überlaſſen bleiben.

§. 60.

Einige Aufgaben.

1. Die Grundfläche einer Pyramide iſt ein gleichſeitiges Dreieck, deſſen Seite = a man kennt, und die Pyramide iſt regulair, ſo daß die Normale von der Spitze m, Fig. 28., die Grundfläche in dem Punkte n trifft, der von den drei Seiten der Grundfläche gleich weit abſteht; auch iſt der Kubikinhalt

der Pyramide = P gegeben; man ſoll hieraus die Oberfläche derſelben berechnen.

Aufloſung. Setzt man die Normale von der Spitze m auf die Grundfläche = X, die Normale $n\beta = x$ und die Linie, welche β mit m verbindet, = z, ſo iſt dieſe die Höhe des Seitendreiecks BCm, und es haben die beiden übrigen Seitendreiecke dieſelbe Höhe; auch ihre Grundlinie iſt der von BCm gleich, da nach den Bedingungen der Aufgabe ſein ſoll AB = AC = BC = a. Wird alſo einſtweilen zur Abkürzung die Grundfläche = G geſetzt, und bezeichnet man die ganze Oberfläche der Pyramide mit F, ſo iſt

$$F = G + 3 \times \Delta\, BCm = G + \frac{3az}{2}$$

oder weil $z^2 = X^2 + x^2$, ſo iſt

$$F = G + \frac{3a \sqrt{[X^2 + x^2]}}{2}.$$

$$\text{Es iſt aber } \frac{GX}{3} = P, \text{ alſo } X = \frac{3P}{G}$$

$$\text{und } \frac{ax}{2} = \frac{G}{3}, \text{ folglich } x = \frac{2G}{3a};$$

ſetzt man alſo dieſe Werthe, ſo wird

$$F = G + \frac{3a}{2} \sqrt{\left[\frac{9P^2}{G^2} + \frac{4G^2}{9a^2}\right]}.$$

$$\text{Es iſt aber } G = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}, \text{ alſo } G^2 = \frac{3a^4}{16};$$

folglich iſt auch

$$F = G + \frac{3a}{2} \sqrt{\left[\frac{9P^2}{\frac{3a^4}{16}} + \frac{\frac{3a^4}{4}}{9a^2}\right]}$$

$$= G + \frac{3a}{2} \sqrt{\left[\frac{48\,P^2}{a^4} + \frac{a^2}{12}\right]}$$

$$= G + \frac{3 \sqrt{[1728\, P^2 + 3\, a^6]}}{12a};$$

nämlich es iſt

$$F = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} + \frac{\sqrt{(1728\, P^2 + 3\, a^6)}}{4a}.$$

2. Von einem normalen Kegel kennt man den Winkel an der Spitze, welchen die Axe des Kegels mit der Seite deſ-

ſelben bildet = α und die ganze Oberfläche = F; es ſoll hieraus der Radius der Grundfläche berechnet werden.

Auflöſung. Wird die Seite des Kegels = a und der Radius der Grundfläche = R geſetzt, ſo iſt

$$a : R = r : \sin \alpha$$

$$\text{alſo } a = \frac{Rr}{\sin \alpha},$$

$$\text{nun iſt allgemein } F = (a + R) R\pi$$

$$\text{folglich iſt auch } F = \left(\frac{Rr}{\sin \alpha} + R\right) R\pi$$

nämlich es iſt

$$\left(\frac{r + \sin \alpha}{\sin \alpha}\right) R^2\pi = F$$

und hieraus erhält man unmittelbar

$$R = \sqrt{\left[\frac{F \sin \alpha}{(r + \sin \alpha)\, \pi}\right]}.$$

Zuſatz. Wenn ſtatt der Oberfläche der Kubikinhalt K des Kegels gegeben iſt, und man ſetzt die Axe desſelben = H, ſo iſt

$$H : R = r : \operatorname{tg} \alpha$$

$$\text{alſo } H = \frac{Rr}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$\text{Da nun } \frac{HR^2\pi}{3} = K$$

$$\text{ſo iſt auch } \frac{R^3 r \pi}{3 \operatorname{tg} \alpha} = K$$

$$\text{und daher } R = \sqrt[3]{\left(\frac{3 K \operatorname{tg} \alpha}{r\pi}\right)}.$$

3. Es iſt die Seite a eines gleichſeitigen Kegels gegeben, nämlich eines ſolchen Kegels, deſſen Durchmeſſer der Grundfläche ſeiner Seite gleich iſt; man ſoll die Formeln für den Kubikinhalt und für die Oberfläche desſelben beſtimmen.

Auflöſung. Da die Seite = a und der Radius $=\frac{1}{2}a$ iſt, ſo wird die Höhe H des Kegels ausgedrückt durch

$$H = \sqrt{\left[a^2 - \frac{a^2}{4}\right]} = \frac{a}{2} \sqrt{3}.$$

$$\text{Da nun } K = \tfrac{1}{3}H \cdot \frac{a^2}{4}\pi, \text{ ſo iſt auch}$$

$$K = \frac{a^2}{4}\pi \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^3\pi}{24}\sqrt{3}.$$

Ferner iſt $F = (a + R)\,R\pi$

und daher $F = \left(a + \frac{a}{2}\right)\frac{a}{2} \cdot \pi = \frac{3a^2}{4}\pi.$

4. Ein gleichſeitiger Cylinder und ein gleichſeitiger Kegel, ſo daß alſo in beiden die Seite dem Durchmeſſer der Grundfläche gleich iſt, haben gleich große Oberflächen; wie verhalten ſich ihre Grundflächen zu einander und wie ihr Kubikinhalt?

Auflöſung. Setzt man die Seite des Cylinders $= 2a$, ſo iſt der Radius der Grundfläche $= a$ und weil die ganze Oberfläche ausgedrückt wird durch

$2a \times 2R\pi + 2R^2\pi$, ſo iſt dieſelbe $= 6a^2\pi$.

Wird ferner die Seite des Kegels $= 2x$ geſetzt, alſo der Radius deſſelben $= x$, ſo iſt die Oberfläche

$$= (2x + R)\,R\pi = (2x + x)\,x\pi = 3x^2\pi.$$

Da nun beide Körper gleiche Oberflächen haben ſollen, ſo iſt

$$6a^2\pi = 3x^2\pi$$

und daher $2a^2\pi = x^2\pi$;

die Grundfläche des Kegels iſt alſo zwei mal ſo groß als die des Cylinders.

Ferner iſt der Kubikinhalt des Cylinders

$$C = R^2\pi \times H = a^2\pi \times 2a = 2a^3\pi$$

und der des Kegels iſt

$$K = \tfrac{1}{3}h \cdot \varrho^2\pi = \tfrac{1}{3} \cdot \sqrt{[(2x)^2 - x^2]} \cdot x^2\pi$$

$$= \frac{x^2\pi}{3}\sqrt{3\,x^2} = \frac{2a^2\pi}{3}\sqrt{6a^2} = \frac{2a^3\pi}{3}\sqrt{6}$$

folglich iſt $C : K = 2a^3\pi : \frac{2a^3\pi}{3}\sqrt{6}$

$$= 3 : \sqrt{6}$$

und daher $C^2 : K^2 = 3 : 2.$

Die Quadrate des Kubikinhalts von dem Cylinder und dem Kegel verhalten ſich alſo zu einander wie 3 zu 2.

Zuſatz. Sollen die beiden Körper, der gleichſeitige Cylinder und der gleichſeitige Kegel, gleichen Kubikinhalt haben, ſo iſt, weil

$$C = 2a^3\pi \text{ und } K = \frac{x^3\pi}{3}\sqrt{3}$$

$$2a^3\pi = \frac{x^3\pi}{3}\sqrt{3}, \text{ alſo } 6a^3 = x^3\sqrt{3}$$

und daher $12a^6 = x^6$.

Sollen nun beide Körper gleiche Oberflächen haben, ſo iſt, wenn die des Cylinders $= F$ und die des Kegels $= f$ geſetzt wird,

$$F = 6a^2\pi \text{ und } f = 3x^2\pi$$

alſo $F : f = 2a^2 : x^2$

und daher $F^3 : f^3 = 8a^6 : x^6$

nämlich es iſt, weil $x^6 = 12a^6$

$$F^3 : f^3 = 2 : 3.$$

Die dritten Potenzen der Oberflächen des Cylinders und des Kegels verhalten ſich alſo wie $2 : 3$.

5. Das gleichſchenklige Dreieck abm, Fig. 32., iſt der Querſchnitt eines normalen Kegels, ſo daß ab der Durchmeſſer der Grundfläche, am die Seite und die Normale mn die Axe deſſelben iſt; und aus dieſem Kegel iſt ein Cylinder herausgeſchnitten, von welchem $\gamma\delta$fe der Querſchnitt iſt. Die Höhe dieſes Cylinders $\gamma\delta = cn = h$, und der normale Abſtand des durch $c\gamma$ beſchriebenen oberen Randes dieſes Cylinders von dem Mantel des Kegels $= \gamma g = d$ iſt gegeben; man ſoll den Kubikinhalt und die ganze Oberfläche des ausgehöhlten Kegels angeben.

Aufloſung. Man ſetze den Radius der Grundfläche des Kegels $na = R$, die Höhe deſſelben $nm = H$ und die durch beide beſtimmten Seiten deſſelben $am = a$, $a\alpha = x$ und $\alpha\delta = z$, alſo $n\delta = R - x - y$, und ziehe die Normale αd auf am, ſo iſt

$$\frac{a\alpha : \alpha d = am : mn}{x : d = a : H}$$

oder

alſo $x = \dfrac{ad}{H}$.

Ferner iſt $\alpha\delta : \delta\gamma = an : mn$

oder $y : h = R : H$

und daher $y = \dfrac{hR}{H}$.

Nun iſt, wenn der Kubikinhalt des ausgehöhlten Kegels $= X$

geſetzt wird, der des ganzen Kegels = K und der des fehlenden Cylinders = C

$$X = K - C$$

es iſt alſo auch für $n\delta = \varrho = R - x - y$

$$X = \frac{HR^2\pi}{3} - h\varrho^2\pi$$

$$\text{oder } X = \frac{HR^2\pi}{3} - h\,(R - x - y)^2\,\pi$$

und wenn hier für x und y die Werthe geſetzt werden

$$X = \frac{HR^2\pi}{3} - h\left[R - \frac{ad}{H} - \frac{hR}{H}\right]^2\pi$$

$$= \frac{HR^2\pi}{3} - \frac{h\,[R\,(H-h) - ad]^2\,\pi}{H^2}$$

wodurch der Kubikinhalt beſtimmt iſt.

Der Mantel des Kegels iſt $= aR\pi$

die Grundfläche $= R^2\pi - \varrho^2\pi$

die durch $c\gamma$ erzeugte obere Fläche des Cylinders $= \varrho^2\pi$

und die krumme Oberfläche deſſelben $= h \times 2\varrho\pi$

folglich iſt die ganze Oberfläche Z des ausgehöhlten Kegels, die innere Fläche mitgerechnet,

$$Z = aR\pi + R^2\pi + 2h\varrho\pi$$

$$= aR\pi + R^2\pi + 2h\,(R - x - y)\,\pi$$

$$= aR\pi + R^2\pi + 2h\left[R - \frac{ad}{H} - \frac{hR}{H}\right]\pi$$

$$= R\,[a + R + 2h]\,\pi - \frac{h\,(ad + hR)}{H}\,\pi.$$

§. 61.

Uebungen.

1. So wie in der Geometrie das Dreieck und das Parallelogramm die Elementarfiguren ſind, ſo ſind es in der Stereometrie die dreiſeitige Pyramide und das Parallelepipedon. Das Parallelogramm dient als Grundlage zu dem Berechnen des Flächeninhaltes der Figuren, und auf gleiche Weiſe wird das Parallelepipedon als Grundlage zur Berechnung des Kubikinhalts der Körper benutzt. Jede geradlinige Figur kann in Dreiecke, und eben ſo kann jeder, von ebenen Flächen begränzte Körper in

dreiſeitige Pyramiden zerlegt werden. Dieſe Analogie läßt ſich noch weiter ausführen, doch mag hiervon nur noch die Bemerkung berührt werden, daß eine dreiſeitige Pyramide ABCm, Fig. 28., wenn die an A zuſammenſtoßenden ebenen Winkel alle drei rechte Winkel ſind, der Körper in der Stereometrie das iſt, was das rechtwinklige Dreieck in der Geometrie iſt, und es findet bei dieſer Pyramide die dem pythagoräiſchen Lehrſatze ähnliche Relation ſtatt, daß die Summe der Quadrate der drei an A anliegenden Dreiecke, dem Quadrate des Dreiecks gleich iſt, welches A gegenüber liegt. Nämlich es iſt

$$(\Delta mAB)^2 + (\Delta mAC)^2 + (\Delta ABC)^2 = (\Delta mBC)^2$$

und außerdem iſt

$$2[(Am)^2 + (AB)^2 + (AC)^2] = (mB)^2 + (mC)^2 + (BC)^2;$$

Sätze, für welche bei einigem Nachdenken der Beweis leicht gefunden wird.

2. Wenn ein Dreieck cab, Fig. 33., ſich um die eine Seite c, als um eine Axe dreht, ſo wird dadurch ein einfacher normaler Kegel erzeugt, wenn $\angle$ a $= 90°$; iſt a kleiner als 90°, ſo wird der erzeugte Körper ein Doppelkegel; beide haben die Grundfläche gemein, und ihre Spitzen c und a liegen mit dem Mittelpunkte der gemeinſchaftlichen Grundfläche in gerader Linie. Iſt aber $\angle$a größer als 90°, ſo iſt der Körper ein Kegel, an welchem ein anderer fehlt, der mit ihm die Grundfläche gemein hat, und es fallen auch in dieſem Falle die Axen beider zuſammen. Halbirt man ca in β, ab in γ, und zieht die Linien bβ und cγ, welche ſich in x ſchneiden, und von x die Normale xd auf ca, ſo beſchreibt dx, während das Dreieck um ca ſich dreht, einen Kreis, und man erhält in jedem der drei angegebenen Fälle, wenn man den Umfang dieſes Kreiſes, von welchem dx der Radius iſt, mit der Fläche des Dreiecks cab multiplicirt, den Kubikinhalt des, durch die Umdrehung von cab um ca erzeugten Körpers.

3. Wenn bei einer dreiſeitigen Pyramide die drei Seiten der Grundfläche einander gleich ſind, und man ſetzt jede =a, und es ſind auch die drei Kanten einander gleich, von welchen jede = b ſein ſoll, ſo wird der Kubikinhalt dieſer Pyramide

mide P ausgedrückt durch die Formel $P = \frac{a^2}{12} \sqrt{(3b^2 - a^2)}$ und man erhält hieraus für a = b den Ausdruck $P = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.

4. Die ganze Oberfläche der in No. 3. angegebenen Pyramide iſt in dem erſten Falle $F = \frac{3 a \sqrt{(4b^2 - a^2)} + a^2 \sqrt{3}}{4}$ und in dem andern Falle iſt dieſelbe $F = a^2 \sqrt{3}$.

5. Wenn ein Kegel von einer Ebene geſchnitten wird, die durch die Spitze deſſelben geht, ſo wird er in zwei Körper zerlegt, die beide zu der Gattung der Pyramiden gehören; es läßt ſich alſo von jedem dieſer Theile der Kubikinhalt dadurch berechnen, daß man den dritten Theil der Höhe mit der Grundfläche multiplicirt. Es ſollen daher die Formeln angegeben werden für die Theile des Kegels, von welchen die Grundfläche ein Kreisausſchnitt, oder ein Kreisabſchnitt iſt.

6. Es iſt das gleichſchenklige Dreieck abm, Fig. 34., der Axentriangel eines normalen Kegels, nämlich die durch die Axe deſſelben gelegte Ebene, und es iſt ab = 2R der Durchmeſſer, und ma = a die Seite des Kegels bekannt. Die Linie mc bildet mit ma einen Winkel = α, und es ſchneidet eine Ebene den Kegel ſo, daß dieſelbe den Axentriangel normal in der Linie mc ſchneidet; es ſoll angegeben werden, wie die beiden Theile, in welche der Kegel hierdurch zerlegt wird, zu einander ſich verhalten.

7. Die Grundfläche einer Pyramide iſt ein regelmäßiges nEck, deſſen Seite = a iſt, die Kanten derſelben ſind ſämmtlich von gleicher Größe, und es iſt jede derſelben = k; man ſoll hieraus die Formeln für den Kubikinhalt und für die Oberfläche der Pyramide angeben, und es ſoll ermittelt werden, wie die Kante k und der Kubikinhalt P gefunden werden können, wenn a, n und die ganze Oberfläche = F gegeben ſind.

8. Man kennt von einer Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges nEck iſt, und deren Seitenkanten ſämmtlich gleich groß ſind, die Summe aller Kanten = S, die von der

Grundfläche mitgerechnet, und den Kubikinhalt; es ſoll hieraus die Länge der Kanten und die Oberfläche der Pyramide berechnet werden.

Sechster Abſchnitt.

Von den abgeſtumpften Körpern.

§. 62.

Die abgeſtumpfte Pyramide.

Wenn man eine Pyramide ABCm, Fig. 35., durch eine Ebene parallel zu ihrer Grundfläche ſchneidet, ſo iſt der untere abgeſchnittene Theil ABCabc derſelben eine gerade abgeſtumpfte Pyramide; läuft die obere Fläche abc aber nicht parallel zu der untern Fläche ABC, ſo iſt die Pyramide ſchief abgeſtumpft. Gewöhnlich aber verſteht man unter einer abgeſtumpften Pyramide überhaupt, wenn nicht ausdrücklich bemerkt wird, daß ſie ſchief abgeſtumpft ſein ſoll, eine gerade abgeſtumpfte.

Der Kubikinhalt der abgeſtumpften Pyramide ABCabc, Fig. 35., läßt ſich auf folgende Art beſtimmen: Man ſetze die Grundfläche ABC = G, abc = g, den ſenkrechten Abſtand beider von einander = h und den Abſtand der Spitze m von abc = x, ſo daß der Abſtand der Spitze m von ABC = h + x iſt; die Seite BC der Grundfläche = A und die derſelben homologe Seite bc der obern Fläche = a.

Nun iſt $mB : mb = h + x : x$

und auch $mB : mb = (BC) : (bc) = A : a$

folglich iſt auch $A : a = h + x : x$

alſo $A - a : a = h : x$

und daher $x = \frac{ah}{A - a}$

und $h + x = h + \frac{ah}{A - a} = \frac{Ah}{A - a}$.

Iſt die ganze Pyramide ABCm = P und der obere Theil abcm derſelben = p, ſo wird die abgeſtumpfte Pyramide = P − p, und es iſt

$$P = \tfrac{1}{3}G\,(h + x) = \tfrac{1}{3}G \cdot \left(\frac{Ah}{A - a}\right)$$

$$p = \tfrac{1}{3}gh \qquad = \tfrac{1}{3}\,g \cdot \left(\frac{ah}{A - a}\right)$$

und hieraus folgt

$$P - p = \frac{h}{3}\left[\frac{GA}{A - a} - \frac{ga}{A - a}\right].$$

Weil aber $\Delta ABC : \Delta abc = (BC)^2 : (bc)^2$

ſo iſt $G : g = A^2 : a^2$

und $\sqrt{G} : \sqrt{g} = A : a$

oder $G^{\frac{1}{2}} : g^{\frac{1}{2}} = A : a$

und hieraus folgt

$$G^{\frac{1}{2}} - g^{\frac{1}{2}} : g^{\frac{1}{2}} = A - a : a$$

$$\text{und } G^{\frac{1}{2}} - g^{\frac{1}{2}} : G^{\frac{1}{2}} = A - a : A$$

es iſt folglich $\dfrac{A}{A - a} = \dfrac{G^{\frac{1}{2}}}{G^{\frac{1}{2}} - g^{\frac{1}{2}}}$ und $\dfrac{a}{A - a} = \dfrac{g^{\frac{1}{2}}}{G^{\frac{1}{2}} - g^{\frac{1}{2}}}$.

Werden dieſe Werthe in dem obigen für P − p erhaltenen Ausdrucke geſetzt, ſo erhält man

$$P - p = \frac{h}{3}\left[\frac{G^{\frac{3}{2}} - g^{\frac{3}{2}}}{G^{\frac{1}{2}} - g^{\frac{1}{2}}}\right]$$

es iſt aber der Nenner $G^{\frac{1}{2}} - g^{\frac{1}{2}}$ ein Factor von $G^{\frac{3}{2}} - g^{\frac{3}{2}}$ und man erhält, wenn wirklich getheilt wird, den Quotienten

$G^{\frac{2}{2}} + G^{\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{2}} + g^{\frac{2}{2}} = G + \sqrt{Gg} + g.$

Folglich iſt endlich $P - p = h\left[\dfrac{G + \sqrt{Gg} + g}{3}\right]$.

Hieraus geht hervor, daß die abgeſtumpfte Pyramide einem Prisma gleich iſt, das mit ihr gleiche Höhe hat, und deſſen Grundfläche man erhält, wenn man von der abgeſtumpften Pyramide die untere Fläche G, die obere g und die mittlere geometriſche Proportionale zwiſchen beiden = $\sqrt{Gg}$ addirt und von der Summe den dritten Theil nimmt.

Iſt z. B. die untere Fläche G = 576 □′, die Seite

$BC = A = 20$ und die homologe Seite $bc = a = 9$ und die Höhe $h = 25$, ſo wird, weil

$$\frac{A^2 : a^2 = G : g}{\text{hier } 20^2 : 9^2 = 576 : g}$$

$$\text{und es iſt daher } g = \frac{576 \cdot 9^2}{20^2} = 116{,}64$$

$$\text{und man findet nun } \sqrt{Gg} = \sqrt{576 \cdot 116{,}64} = 259{,}20$$

$$\text{da nun } G = 576{,}00$$

$$\text{ſo iſt } G + \sqrt{Gg} + g = 951{,}84$$

$$\text{alſo } \frac{G + \sqrt{Gg} + g}{3} = 317{,}28$$

und endlich der Inhalt der abgeſtumpften Pyramide

$$P - p = 317{,}28 \times 25 = 7932.$$

Zuſatz 1. Da bei der Ableitung der Formel für $P-p$ keine beſtimmte Form der Grundfläche vorausgeſetzt worden iſt, indem das ganze auf die Proportion beruhet

$$G : g = A^2 : a^2$$

und auf die Annahme, daß G und g parallel laufen; die Proportion aber immer richtig iſt, wenn G und g ähnlich ſind, ſo folgt, daß die Formel

$$P - p = h\left[\frac{G + \sqrt{Gg} + g}{3}\right]$$

für alle zu der Gattung der Pyramiden gehörige Körper Gültigkeit hat, und es gilt dieſelbe daher auch für den abgeſtumpften Kegel. Bei dieſem aber iſt $G = R^2\pi$ und $g = \varrho^2\pi$, wenn der Radius der unteren Fläche $= R$ und der oberen $= \varrho$ geſetzt wird; alſo iſt, wenn man den abgeſtumpften Kegel mit $K - k$ bezeichnet

$$K - k = \frac{h\,(R^2 + R\varrho + \varrho^2)\,\pi}{3}.$$

Wird eine Pyramide oder ein Kegel durch eine Fläche geſchnitten, die durch die Spitze des Körpers geht, und wird der eine von den beiden auf dieſe Weiſe erhaltenen Theilen abgeſtumpft, ſo behält die obige Formel auch in dieſem Falle Gültigkeit.

Zuſatz 2. Iſt die Grundfläche G ein regelmäßiges nEck und die Seite deſſelben $= A$, ſo wird

$$G = \frac{nA^2 \operatorname{tg} \varphi}{4r} \text{ und } g = \frac{na^2 \operatorname{tg} \varphi}{4r}$$

$$\text{alſo } \sqrt{Gg} = \frac{nAa \operatorname{tg} \varphi}{4r}$$

$$\text{für } \varphi = \left(\frac{n-2}{n}\right) \cdot 90^\circ;$$

folglich iſt in dieſem Falle

$$P - p = \frac{hn\,(A^2 + Aa + a^2)}{12} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r}.$$

§. 63.

Aufgabe.

Es ſoll eine Pyramide ABCm, Fig. 35., durch eine zur Grundfläche parallele Ebene abc, ſo getheilt werden, daß beide Theile ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.

Auflöſung. Man ſetze die Grundfläche ABC $= G$, die Höhe der Pyramide, alſo den Abſtand der Spitze m von der Grundfläche $= H$ und den bekannten Inhalt derſelben $= P$ ſo iſt, weil das Verhältniß des obern Theils zu dem untern gegeben iſt, auch: die Größe des abzuſchneidenden Theiles abcm $= p$ ebenfalls beſtimmt. Wird nun der Abſtand der Spitze m von abc $= x$ geſetzt und die Fläche abc $= Z$, ſo iſt

$$G : Z = (BC)^2 : (bc)^2$$

und weil $BC : bc = Bm : bm = H : x$

ſo iſt auch $G : Z = H^2 : x^2$

$$\text{alſo } Z = \frac{Gx^2}{H^2}$$

und da $\frac{Zx}{3} = p$, ſo iſt auch

$$\frac{Gx^3}{3H^2} = p$$

und hieraus erhält man unmittelbar

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{3\,pH^2}{G}\right)}$$

als die Höhe des abzuſchneidenden Theils. Da übrigens

$$H : x = mB : mb$$

ſo läßt ſich, da mB bekannt iſt, mittelſt x nun auch der Werth von mb berechnen, wodurch man den Punkt b der einen Kante kennen lernt, durch welchen der Schnitt geführt

werden muß, wenn die Pyramide nach einem gegebenen Verhältniſſe getheilt werden ſoll.

Zuſatz. Theilt man die Grundfläche einer Pyramide mittelſt einer geraden Linie nach einem gegebenen Verhältniſſe, und legt durch dieſe Linie und die Spitze der Pyramide eine Ebene, ſo wird dieſelbe dadurch in zwei Pyramiden zerlegt, die ſich zu einander verhalten wie ihre Grundflächen, und da dieſe ein gegebenes Verhältniß zu einander haben, ſo ſtehen auch die Theile der Pyramide in demſelben Verhältniß; man kann daher auch von der Spitze aus eine Pyramide nach einem beſtimmten Verhältniſſe theilen.

§. 64.

Formeln für die abgeſtumpfte Pyramide.

Es iſt ganz allgemein

$$P - p = \frac{h\,(G + \sqrt{Gg} + g)}{3}$$

und alſo, wenn man zur Abkürzung $P - p = Q$ ſetzt,

$$3Q = h\,(G + Gg + g),$$

eine Gleichung, welche vier verſchiedene Größen enthält, von welchen jede durch die drei übrigen ſich berechnen läßt.

So iſt

$$h = \frac{3Q}{G + \sqrt{Gg} + g}$$

und man erhält nur, wenn außer h und Q die eine Grundfläche gegeben iſt, und es ſoll die andere gefunden werden, eine quadratiſche Gleichung, nämlich es iſt

$$G + \sqrt{Gg} + g = \frac{3Q}{h};$$

alſo wenn man $G = Z^2$ und $g = z^2$ ſetzt,

$$Z^2 + Zz + z^2 = \frac{3Q}{h}$$

$$\text{und } Z^2 + zZ + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = \frac{3Q}{h} - \frac{3z^2}{4};$$

$$\text{alſo } \left(Z + \frac{z}{2}\right)^2 = \frac{3\,(4Q - hg)}{4h};$$

folglich iſt $Z + \frac{z}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{3(4Q - hg)}{h}\right]}$;

$$\text{alſo } Z = \tfrac{1}{2}\left(-z + \sqrt{\left[\frac{3(4Q - hg)}{h}\right]}\right)$$

$$\text{oder } \sqrt{G} = \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{g} + \sqrt{\left[\frac{3(4Q - hg)}{h}\right]}\right)$$

und hieraus erhält man endlich

$$G = \frac{6Q - hg}{2h} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3g(4Q - hg)}{h}\right)}.$$

Zuſatz. Wenn der Kubikinhalt einer abgeſtumpften Pyramide = Q, die Höhe derſelben = h und die Summe beider Grundflächen = S gegeben iſt, ſo kann jede der beiden Grundflächen auf folgende Art gefunden werden: Es iſt

$$G + \sqrt{Gg} + g = \frac{3Q}{h};$$

$$\text{alſo auch } S + \sqrt{Gg} = \frac{3Q}{h}$$

$$\text{und daher } Gg = \left(\frac{3Q}{h} - S\right)^2;$$

wofür man zur Abkürzung einſtweilen ſetzen kann

$$Gg = M^2.$$

$$\begin{array}{rll} \text{Nun iſt} & G^2 + 2Gg + g^2 & = S^2 \\ & \text{und } 4Gg & = 4M^2 \\ \hline \text{alſo} & (G - g)^2 & = S^2 - 4M^2 \end{array}$$

und es iſt daher

$$G - g = \sqrt{[S^2 - 4M^2]}$$

$$\begin{array}{rl} \text{und da} & G + g = S \\ \hline \text{ſo folgt} & G = \dfrac{S + \sqrt{(S^2 - 4M^2)}}{2} \\ \text{und} & g = \dfrac{S - \sqrt{(S^2 - 4M^2)}}{2}; \end{array}$$

wofür man auch ſetzen kann

$$G = \frac{S + \sqrt{(S + 2M)(S - 2M)}}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[S + \sqrt{\left(\frac{6Q}{h} - S\right)\left(3S - \frac{6Q}{h}\right)}\right]$$

und einen ähnlichen Werth erhält man auch für g.

§. 65.

Lehrſatz.

Jeder Körper ABCabc, Fig. 35., der von zwei ebenen Dreiecken ABC und abc als Grundflächen und von drei ebenen Vierecken eingeſchloſſen wird, iſt entweder eine gerade oder ſchief abgeſtumpfte Pyramide; es müſſen nämlich die Linien Aa, Bb und Cc in einem und demſelben Punkte m zuſammentreffen; oder es iſt derſelbe ein abgeſtumpftes oder vollſtändiges Prisma.

Beweis. Wenn in dem Viereck ACca die Seiten Aa und Cc nicht parallel laufen, ſo treffen ſie, genugſam verlängert, in einem Punkte m zuſammen, und es kann alsdann Bb weder zu Aa noch Cc parallel laufen, weil dieſe Linie mit jeder von den letzten beiden in einer und derſelben Ebene liegen ſoll; es muß alſo in dieſem Falle Bb ſowohl mit Aa als mit Cc zuſammentreffen: dieſe Linien liegen aber beide in einer Ebene, alſo muß Bb dieſe Ebene ſchneiden. Da aber eine Ebene von einer geraden Linie nur in einem Punkte geſchnitten werden kann, ſo kann Bb die Ebene in keinem andern Punkte treffen, als in dem Punkt m, in welchem Aa und Cc ſich ſchneiden. Alle drei Linien verlängert, treffen ſich alſo in einem Punkte, und es wird der Körper durch dieſe Verlängerung zu einer Pyramide ergänzt, iſt alſo eine abgeſtumpfte Pyramide.

Laufen die Linien Aa und Cc parallel, ſo kann Bb mit keiner dieſer Linien zuſammentreffen, weil ſie alsdann mit der andern nicht in einer Ebene liegen würde, und es iſt ſonach auch Bb parallel ſowohl zu Aa als zu Cc. Sind nun die Linien alle drei von gleicher Größe, ſo iſt der Körper ein vollſtändiges Prisma; iſt ihre Größe aber verſchieden, ſo iſt das Prisma abgeſtumpft.

Zuſatz 1. Wenn die Kante Aa ſowohl mit Bb als mit Cc in einer Ebene liegt, und es liegen auch Bb und Cc unter ſich in einer Ebene, ohne daß dieſe Linien parallel laufen, ſo iſt nach dem oben Bewieſenen ABCabc eine abgeſtumpfte Pyramide. Kommt nun eine vierte Kante Dd hinzu, und es liegt dieſelbe ſowohl mit Aa als mit Bb in einer

Ebene, ſo müſſen, weil nach der Vorausſetzung auch Aa und Bb in einer und derſelben Ebene liegen, die Kanten Aa, Bb und Dd in einem Punkte zuſammentreffen, und dieſes kann kein anderer Punkt ſein als m; folglich iſt auch der Körper ACBDacbd eine abgeſtumpfte Pyramide, und es gilt daſſelbe unter gleichen Bedingungen, wenn auch die Grundflächen mehr als vier Seiten haben. Hieraus läßt ſich nun leicht ableiten, wodurch überhaupt ſich erkennen läßt, ob ein Körper eine abgeſtumpfte Pyramide iſt oder nicht. Wird nämlich ein Körper von zwei nEcken als Grundflächen und von n ebenen Vierecken als Seitenflächen begränzt, und liegt irgend eine der Seitenkanten mit jeder der übrigen in einer und derſelben Ebene, ſo iſt, wenn die Kanten nicht parallel laufen, der Körper eine abgeſtumpfte Pyramide, und laufen ſie parallel, ſo iſt er ein abgeſtumpftes oder vollſtändiges Prisma. Wenn aber eine Kante auch nur mit einer der übrigen nicht in derſelben Ebene liegt, ſo läßt ſich der Körper weder zu einem Prisma noch zu einer Pyramide ergänzen.

Zuſatz 2. Damit der Körper ACBDacbd, Fig. 35., eine abgeſtumpfte Pyramide ſei, iſt keinesweges erforderlich, daß die beiden Grundflächen einander ähnlich ſind, weil die Pyramide auch eine ſchief abgeſtumpfte ſein kann; die Grundflächen ſind aber ähnlich, wenn die Pyramide gerade abgeſtumpft iſt, und umgekehrt iſt der Körper immer eine abgeſtumpfte Pyramide oder ein Prisma, wenn die Grundflächen parallel laufen, ähnlich ſind und eine ähnliche Lage haben.

§. 66.

Aufgabe.

Zwei Ebenen ſchneiden ſich in l, Fig. 36., unter dem Winkel φ, und von einem außerhalb derſelben gegebenen Punkt m iſt die Lage gegen die eine dieſer Ebenen bekannt; man ſoll hieraus die Lage deſſelben gegen die andere Ebene beſtimmen.

Auflöſung. Zieht man von m die Normalen mn und mp auf beide Ebenen, und legt durch nmp eine Ebene, ſo ſteht dieſe normal auf beiden gegebenen, und wenn dieſelben von der durch nmp gelegten Ebene in lr und lq geſchnitten werden, ſo iſt $qlr = \varphi$ der Winkel, unter welchem die gegebenen Ebenen

ſich ſchneiden, und es iſt zugleich auch $\angle m = \varphi$. Da nun die Lage von m gegen eine von den beiden ſich ſchneidenden Ebenen bekannt ſein ſoll, ſo kann man die Abſciſſe $ln = a$ und die auf derſelben ſenkrechte Ordinate $nm = b$ als bekannt annehmen, und es kommt alsdann blos darauf an, aus dieſen beiden Größen und dem gegebenen Winkel φ den Werth der Abſciſſe $lp = \alpha$ und der Ordinate $pm = \beta$ zu beſtimmen, was auf folgende Art geſchehen kann: Es iſt

$$ln : no = r : \operatorname{tg}\varphi \text{ und } lo : ln = r : \cos\varphi$$

$$\text{oder } a : (no) = r : \operatorname{tg}\varphi \text{ und } (lo) : a = r : \cos\varphi;$$

$$\text{folglich iſt } (no) = \frac{a \operatorname{tg}\varphi}{r} \text{ und } (lo) = \frac{ar}{\cos\varphi}.$$

Ferner iſt nun, weil $\angle m = \angle\varphi$

$$mo : mp = r : \cos\varphi$$

$$\text{oder } (mn - on) : mp = r : \cos\varphi$$

$$\text{nämlich } \left(b - \frac{a \operatorname{tg}\varphi}{r}\right) : \beta = r : \cos\varphi$$

$$\text{folglich iſt } \beta = \left(\frac{br - a \operatorname{tg}\varphi}{r^2}\right) \cos\varphi;$$

$$\text{nämlich es iſt I. } \beta = \frac{b\cos\varphi - a\sin\varphi}{r}.$$

Da übrigens auch

$$mo : op = r : \sin\varphi,$$

$$\text{alſo } \left(\frac{br - a \operatorname{tg}\varphi}{r}\right) : (op) = r : \sin\varphi,$$

$$\text{ſo iſt } (op) = \left(\frac{br - a \operatorname{tg}\varphi}{r^2}\right) \sin\varphi;$$

$$\text{nun iſt } (ol) = \frac{ar}{\cos\varphi}; \text{ folglich}$$

$$op + ol = (lp) = \left(\frac{br - a \operatorname{tg}\varphi}{r^2}\right) \sin\varphi + \frac{ar}{\cos\varphi};$$

nämlich es iſt

$$\alpha = \frac{b\sin\varphi}{r} - a\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi \sin\varphi}{r^2} - \frac{r}{\cos\varphi}\right)$$

$$= \frac{b\sin\varphi}{r} - a\left(\frac{\sin^2\varphi}{r\cos\varphi} - \frac{r}{\cos\varphi}\right)$$

$$= \frac{b\sin\varphi}{r} + a\left(\frac{r^2 - \sin^2\varphi}{r\cos\varphi}\right)$$

und dieſes giebt endlich

$$\text{II. } \alpha = \frac{b \sin \varphi + a \cos \varphi}{r},$$

wodurch alſo die Lage von m gegen die zweite Ebene vollkommen beſtimmt iſt.

Zuſatz. Aus den beiden Gleichungen

$$\alpha = \frac{b \sin \varphi + a \cos \varphi}{r} \text{ und } \beta = \frac{b \cos \varphi - a \sin \varphi}{r}$$

kann man auch umgekehrt, wenn α und β gegeben ſind, die Werthe von a und b finden, und man erhält durch Reduction

$$a = \frac{\alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi}{r} \text{ und } b = \frac{\beta \cos \varphi + \alpha \sin \varphi}{r}.$$

§. 67.

Von der ſchief abgeſtumpften Pyramide.

Iſt ABCabγ, Fig. 37., eine ſchief abgeſtumpfte Pyramide von der Art, daß die eine Linie ab zu AB parallel läuft, ſo kann man durch ab eine Ebene abc parallel zu ABC legen, und es iſt alsdann ABCabc eine gerade abgeſtumpfte Pyramide, von welcher ſich nach §. 62. nicht nur der Kubikinhalt berechnen läßt, ſondern auch der normale Abſtand der Spitze m von abc; der Punkt aber, in welchem die Normale die Fläche abc trifft, läßt ſich nach §. 53. berechnen: folglich iſt die Lage des Punktes m gegen abc beſtimmt, und hieraus kann man den Abſtand deſſelben von der Fläche abγ mittelſt der Formel No. I. §. 66. finden, wenn der Winkel φ, unter welchem die beiden Flächen abc und abγ ſich ſchneiden, als bekannt vorausgeſetzt wird. Nun iſt der Körper ABCabγ und alſo auch die Fläche abγ gegeben, folglich kennt man von der Pyramide abγm die Grundfläche und die Höhe, und daher auch den Kubikinhalt; wird nun dieſer von dem Kubikinhalte der ganzen Pyramide abgezogen, ſo bleibt der der ſchief abgeſtumpften Pyramide ABCabγ übrig, und es läßt ſich alſo dieſer wirklich berechnen.

Wird die Pyramide abγm von abcm abgezogen, ſo bleibt der Körper abcγ übrig, und es läßt ſich ſonach auch der Inhalt dieſes Stückes finden. Auf gleiche Weiſe kann man aber

auch, wenn die Neigung von $\alpha b\gamma$ gegen $ab\gamma$ gegeben iſt, den Inhalt von $ab\gamma\alpha$ finden, und wird dieſer zu $ABCab\gamma$ addirt, ſo erhält man den Kubikinhalt der abgeſtumpften Pyramide $ABC\alpha b\gamma$, von welcher keine Seite der obern Flächen mit irgend einer der Grundfläche parallel läuft.

Dieſe Betrachtung führt zu dem Reſultate, daß es möglich iſt, jedes Stück einer Pyramide zu berechnen, das durch eine ſchneidende Ebene von derſelben getrennt wird, welche Lage die ſchneidende Ebene auch immer haben mag.

Zuſatz. Für eine dreiſeitige Pyramide iſt $\alpha\gamma cab$ eine vierſeitige Pyramide, deren Spitze in b liegt, und die das Viereck $ac\gamma\alpha$ zur Grundfläche hat. Man kann alſo auch den Inhalt der ſchief abgeſtumpften Pyramide $ABC\alpha b\gamma$ dadurch berechnen, daß man zu der gerade abgeſtumpften Pyramide ABCabc die vierſeitige $\alpha\gamma cab$ addirt, und wenn der Inhalt von $ABCab\gamma$ gefunden werden ſoll, ſo braucht man nur die dreiſeitige $abc\gamma$ zu addiren. Uebrigens beſteht auch die vierſeitige Pyramide $\alpha\gamma cab$ aus den beiden dreiſeitigen $abc\gamma$ und $ab\gamma\alpha$, und man erhält, wenn hierauf Rückſicht genommen wird, bequemere Formeln für die ſchief abgeſtumpfte, dreiſeitige Pyramide, als wenn man bei Ableitung derſelben den §. 67. angegebenen Weg verfolgt.

§. 68.

Nähere Erläuterungen für die dreiſeitige abgeſtumpfte Pyramide.

1. Soll der Kubikinhalt einer dreiſeitigen, ſchief abgeſtumpften Pyramide $ABCab\gamma$, Fig. 37., berechnet werden, von welcher die eine Seite ab der oberen Fläche zu einer Seite AB der unteren Fläche parallel läuft, ſo erhält man auf folgende Art eine bequeme Formel: Man ſetze den ſenkrechten Abſtand des Punktes a und alſo auch den des Punktes b von ABC = h, und den Abſtand des Punktes γ von dieſer Fläche = h′, ſo iſt der Abſtand des Punktes γ von abc = h′ — h, und es iſt daher

für ABC = G und abc = g, der Inhalt

$$\text{von } ABCabc = \frac{h}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)$$

und von abcγ $= \left(\frac{h' - h}{3}\right) g.$

Wird alſo der Inhalt der ſchief abgeſtumpften Pyramide ABCabγ = Q geſetzt, ſo iſt

$$Q = \frac{h\,(G + \sqrt{Gg}) + h'g}{3}.$$

In dieſem Ausdrucke kommt g vor, deſſen Größe nicht unmittelbar in dem gegebenen Körper gemeſſen werden kann; ſetzt man aber die gegebenen Linien AB = C und ab = c, ſo iſt

$$G : g = C^2 : c^2, \text{ alſo } g = \frac{Gc^2}{C^2}$$

und es iſt daher auch, wenn man dieſen Werth für g ſetzt,

$$Q = \frac{h}{3}\left(G + \frac{Gc}{C}\right) + \frac{h'Gc^2}{3C^2}$$
$$= Gh\left(\frac{C + c}{3C}\right) + \frac{h'Gc^2}{3C^2}.$$

2. Will man den Kubikinhalt der dreiſeitigen abgeſtumpften Pyramide ABCαbγ berechnen, von welcher keine Seite der oberen Fläche mit irgend einer Seite der unteren parallel läuft, ſo kann dieſes dadurch geſchehen, daß man den Inhalt der ganzen Pyramide ABCm für die Grundfläche ACm beſtimmt, ſo daß alſo hierbei B als die Spitze der Pyramide angenommen wird, und eben ſo den Inhalt der Pyramide $\alpha\gamma$mb, wobei $\alpha\gamma$m die Grundfläche und b die Spitze iſt. Werden beide von einander abgezogen, ſo erhält man den Inhalt der abgeſtumpften Pyramide. Man ziehe durch b die Linien ba und bc parallel zu BA und BC, und durch a die ac parallel zu cC', ſetze AC = D, Cc = d, alſo Ac = D — d, Aa = m, Aα = m', Cc = ac = n und Cγ = n'; ferner die Normale von B auf AC$\gamma\alpha$ = H und die Normale von b auf dieſe Fläche = h. Da nun

$$Ac : Aa = AC : Am$$
$$\text{und } Ac : ca = AC : Cm,$$

ſo iſt auch

$$D - d : m = D : (Am)$$
$$\text{und } D - d : n = D : (Cm);$$

es iſt alſo $(Am) = \frac{Dm}{D - d}$ und $(Cm) = \frac{Dn}{D - d}$.

Wird aber der Winkel $Aae = \angle m = \varphi$ geſetzt, ſo iſt

$$\Delta\ AmC = \tfrac{1}{2}\,(Am)\,(Cm)\,\frac{\sin\varphi}{r},$$

es iſt alſo auch

$$\Delta\ AmC = \tfrac{1}{2}\left(\frac{Dm}{D-d}\right)\left(\frac{Dn}{D-d}\right)\frac{\sin\varphi}{r} = \frac{D^2 mn \sin\varphi}{2\,(D-d)^2\,r}$$

und daher die ganze Pyramide ACmB =

$$P = \frac{HD^2 mn \sin\varphi}{6\,(D-d)^2\,r}.$$

Ferner iſt nun $(m\alpha) = \frac{Dm}{D-d} - m' = \frac{dm' - (m'-m)\,D}{D-d}$

und $(m\gamma) = \frac{Dn}{D-d} - n' = \frac{dn' - (n'-n)\,D}{D-d}$

nämlich es iſt für

$(a\alpha) = m' - m = \mu$ und $(c\gamma) = n' - n = \nu$

$$(m\alpha) = \frac{dm' - D\mu}{D-d} \text{ und } (m\gamma) = \frac{dn' - D\nu}{D-d}.$$

Nun iſt $\Delta\ m\alpha\gamma = \tfrac{1}{2}\,(m\alpha)\,(m\gamma)\,\frac{\sin\varphi}{r}$;

alſo iſt auch $\Delta\ m\alpha\gamma =$

$$\frac{(dm' - D\mu)\,(dn' - D\nu)\sin\varphi}{2\,(D-d)^2\,r}$$

und es iſt daher der Inhalt der Pyramide $m\alpha\gamma b = p =$

$$\frac{h\,(dm' - D\mu)\,(dn' - D\nu)\sin\varphi}{6\,(D-d)^2\,r}.$$

Wird nun die zu berechnende abgeſtumpfte Pyramide $ABC\alpha b\gamma$ = Q geſetzt, ſo iſt

$$Q = P - p$$

und daher auch, wenn man für P und p die gefundenen Werthe ſetzt,

$$Q = \frac{HD^2 mn - h\,(dm' - D\mu)\,(dn' - D\nu)}{6\,(D-d)^2}\cdot\frac{\sin\varphi}{r},$$

ein Ausdruck, der blos ſolche Größen enthält, die unmittelbar an dem abgeſtumpften Körper gemeſſen werden können.

3. Fällt α mit a zuſammen, ſo wird $m' = m$ und $\mu = 0$, es iſt alſo in dieſem Falle

$$Q = \frac{HD^2mn - hdm\,(dn' - D\nu)}{6\,(D-d)^2} \cdot \frac{\sin\varphi}{r};$$

eine Formel, die ſtatt der in No. 1. gegebenen ebenfalls benutzt werden kann, um die abgeſtumpfte dreiſeitige Pyramide ABCabγ, in welcher ab zu AB parallel iſt, zu berechnen.

4. Fällt zu gleicher Zeit α mit a und γ mit c zuſammen, ſo wird der Körper eine gerade abgeſtumpfte Pyramide, und es iſt nun in der obigen Formel $m' = m$ und $n' = n$, alſo $\mu = o$ und auch $\nu = o$; daher wird für dieſen Fall

$$Q = \frac{HD^2mn - hd^2mn}{6\,(D-d)^2} \cdot \frac{\sin\varphi}{r}$$
$$= \frac{mn\,(HD^2 - hd^2)}{6\,(D-d)^2} \cdot \frac{\sin\varphi}{r},$$

und dieſer Ausdruck kann ſtatt der in §. 62. abgeleiteten Formel benutzt werden, um den Inhalt einer gerade abgeſtumpften dreiſeitigen Pyramide zu berechnen. Uebrigens läßt ſich dieſer Ausdruck noch auf folgende Art umformen:

Es iſt Δ Aac $= \frac{1}{2}\,(Aa)\,(ea)\,\frac{\sin\varphi}{r} = \frac{mn\sin\varphi}{2r}$,

ſetzt man alſo die Fläche des Dreiecks Aac $= g$,

ſo wird $Q = \frac{(HD^2 - hd^2)\,g}{3\,(D-d)^2}$.

Es iſt aber

$$H : h = (mB) : (mb) = (mA) : (ma) = (AC) : (ac)$$
$$= (AC) : (eC) = D : d;$$

alſo iſt $h = \frac{Hd}{D}$, und daher

$$HD^2 - hd^2 = \frac{HD^3 - Hd^3}{D};$$

folglich iſt auch

$$Q = \frac{H\,(D^3 - d^3)\,g}{3\,(D-d)^2\,D}$$
$$= \frac{Hg}{3} \cdot \left(\frac{D^2 + Dd + d^2}{D\,(D-d)}\right) = \frac{(D-d)^2 + 3Dd}{D\,(D-d)} \cdot \frac{Hg}{3}$$

oder es iſt

$$Q = \left(\frac{D-d}{D} + \frac{3d}{D-d}\right) \cdot \frac{Hg}{3}$$

$$= \left(1 - \frac{d}{D}\right)\frac{HG}{3} + \left(\frac{d}{D-d}\right) Hg,$$

welches ebenfalls ein bequemer Ausdruck iſt, um den Inhalt einer gerade abgeſtumpften dreiſeitigen Pyramide zu berechnen.

5. Es iſt in No. 4. gefunden worden

$$Q = \frac{Hg}{3}\left(\frac{D^2 + Dd + d^2}{D\ (D - d)}\right)$$

Da nun $\frac{Hg}{3}$ den Inhalt der vollſtändigen Pyramide ausdrückt, deren Grundfläche Aae und deren Spitze in B iſt, ſo wird auch, wenn man dieſe Pyramide mit q bezeichnet

$$Q = q\left(\frac{D^2 + Dd + d^2}{D\ (D - d)}\right)$$

und hieraus erhält man die Proportion

$$Q : q = D^2 + Dd + d^2 : D^2 - Dd.$$

Iſt nun $D = 2d$, alſo AC in e halbirt, in welchem Falle auch Am in a halbirt ſein muß ꝛc., ſo wird

$$Q : q = 7d^2 : 2d^2 = 7 : 2$$

wie es ſein muß, denn es iſt in dieſem Falle die Grundfläche Aae der Pyramide $q = \frac{1}{4}ACm$, während ſie mit der ganzen Pyramide P gleiche Höhe hat, alſo $q = \frac{1}{4}P$, dagegen iſt die Pyramide abem in dieſem Falle $= \frac{1}{8}P$, alſo $Q = \frac{7}{8}P$ und daher

$$Q : q = \tfrac{7}{8}P : \tfrac{1}{4}P = 7 : 2.$$

§. 69.

Nähere Erläuterungen von der ſchief abgeſtumpften Pyramide überhaupt.

Zwar läßt ſich der Inhalt einer jeden ſchief abgeſtumpften Pyramide durch wiederholte Anwendung der Formel, §. 68. No. 2. berechnen, weil man jede Pyramide von irgend einer Seitenkante aus in dreiſeitige zerlegen kann; es läßt ſich aber auch unabhängig hiervon eine Formel für den Kubikinhalt einer ſchief abgeſtumpften Pyramide überhaupt, auf folgende Art ableiten:

Zieht man Fig. 37. die Linie ae parallel zu mC, und fällt von a aus eine Normale auf Ae, ſo wird Ae durch dieſe

dieſe Normale nach demſelben Verhältniſſe getheilt, nach welchem AC von der Normale aus m auf dieſe Linie getheilt wird, und es iſt ſonach immer möglich, den Punkt in AC zu finden, in welchem dieſe Linie von der Normale aus m getroffen wird, wenn auch nur der Theil AC$\gamma\alpha$ des Dreiecks ACm gegeben iſt. Auf gleiche Weiſe kann man auch den Punkt in BC finden, in welchem dieſe Linie von der Normale aus m getroffen wird, wenn auch nur der Theil BCγb des Dreiecks BCm gegeben iſt. Wenn aber dieſer Punkt ſowohl in AC als in BC gefunden iſt, und man errichtet Normalen an dieſen Punkten auf AC und BC, die in der Ebene des Dreiecks ABC liegen, ſo ſchneiden ſich dieſe nach §. 53. in dem Punkte N, in welchem die Normale aus m die Grundfläche ABC trifft; man kann alſo in einer abgeſtumpften Pyramide den Punkt N der Grundfläche finden, in welchem dieſelbe von der Normale aus m getroffen wird. Auf ähnliche Weiſe läßt ſich auch der Punkt p beſtimmen, in welchem die obere Fläche αbγ von der Normale aus m getroffen wird; denn zieht man durch A die Linie Aγ' parallel zu $\alpha\gamma$, und fällt aus a auf Aγ' eine Normale, ſo wird von derſelben Aγ' nach eben dem Verhältniſſe getheilt, nach welchem $\alpha\gamma$ von der Normale aus m getheilt wird, und es iſt daher der Punkt in $\alpha\gamma$ beſtimmt, in welchem dieſe Linie von der Normale aus m auf $\alpha\gamma$ getroffen wird. Eben ſo läßt ſich auch der Punkt beſtimmen, in welchem die Normale aus m auf bγ dieſe Linie trifft. Errichtet man aber in der Ebene von αbγ an den auf dieſe Weiſe beſtimmten Punkten Normalen auf $\alpha\gamma$ und bγ, ſo ſchneiden ſich dieſe in p, nämlich in dem Punkte, in welchem die Normale aus m auf αbγ dieſe Ebene trifft.

Legt man nun durch b eine Ebene abc parallel zu ABC, ſetzt den normalen Abſtand beider Ebenen von einander = h und den normalen Abſtand der Spitze m von abc = b, alſo den Abſtand der Spitze m von ABC = h + b; AC = D; ac = eC = d, ſo iſt

$$h + b : b = (Bm) : (bm) = (BA) : (ba) = (AC) : (ac)$$
$$= D : d$$

alſo $h : b = D - d : d$

folglich iſt $b = \frac{hd}{D - d}$ und $h + b = \frac{hD}{D - d}$;
ferner iſt auch, wenn die Normale von m auf ABC dieſe Ebene in N und abc in n trifft, und man ſetzt BN = A und bn = a,

$$A : a = (Bm) : (bm) = D : d$$

$$\text{und es iſt daher } a = \frac{Ad}{D}.$$

Die Lage des Punktes m gegen abc iſt alſo beſtimmt durch die Abſciſſe $(bn) = a = \frac{Ad}{D}$

und durch die Ordinate $(nm) = b = \frac{hd}{D - d}$

und dabei iſt, wenn man (bm) = z ſetzt,

$$z^2 = a^2 + b^2.$$

Wird die obere Fläche $\alpha b \gamma$ der abgeſtumpften Pyramide von der Normale aus m auf dieſe Ebene in p getroffen, und iſt $(bp) = \alpha$ und $(pm) = \beta$, ſo läßt ſich der Werth von α, nach dem bereits angeführten, unmittelbar finden, und es iſt auch

$$z^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\text{alſo } \beta^2 + \alpha^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{und daher } \beta = \sqrt{(a^2 + b^2 - \alpha^2)}$$

oder wenn man für a und b ihre Werthe ſetzt

$$\beta = \sqrt{\left[\frac{A^2d^2}{D^2} + \frac{h^2d^2}{(D - d)^2} - \alpha^2\right]};$$

der Werth von β iſt alſo durch Größen beſtimmt, die ſämmtlich unmittelbar gegeben ſind.

Wird nun die ganze Pyramide ABCm = P, ihre Grundfläche ABC = G, der obere Theil der Pyramide, nämlich $\alpha b \gamma m = p$, die Grundfläche $\alpha b \gamma$ derſelben = g und die ſchief abgeſtumpfte Pyramide $ABC\alpha b \gamma = Q$ geſetzt, ſo iſt

$$P = \tfrac{1}{3}G\,(h + b)$$

$$\text{und } p = \tfrac{1}{3}\,g\beta$$

$$\text{alſo } Q = \tfrac{1}{3}G\,(h + b) - \tfrac{1}{3}g\beta$$

und daher, wenn für (h + b) und β ihre Werthe geſetzt werden,

$$Q = \tfrac{1}{3}G \cdot \frac{hD}{D - d} - \tfrac{1}{3}g \sqrt{\left[\frac{A^2d^2}{D^2} + \frac{h^2d^2}{(D - d)^2} - \alpha^2\right]}$$

ein Ausdruck für die ſchief abgeſtumpfte Pyramide, der nur ſolche Größen enthält, welche unmittelbar gemeſſen werden können, und es behält derſelbe ſeine Gültigkeit, welche Formen die Grundflächen G und g auch immer haben mögen.

Zuſatz 1. Es iſt

$$(Bm) : (bm) = D : d$$

alſo für $(Bm) = k$ und $(bm) = z$

$$k : z = D : d$$

folglich iſt $z = \frac{kd}{D}$

nun iſt $z^2 = a^2 + b^2$

folglich iſt auch $a^2 + b^2 = \frac{k^2d^2}{D^2}$;

man hat aber gefunden $\beta = \sqrt{(a^2 + b^2 - \alpha^2)}$

und daher iſt auch $\beta = \sqrt{\left[\frac{k^2d^2}{D^2} - \alpha^2\right]}$

$$= \frac{\sqrt{(kd + D\alpha)(kd - D\alpha)}}{D}.$$

Da nun $Q = \tfrac{1}{3}G \frac{hD}{D - d} - \tfrac{1}{3}g\beta$

ſo iſt auch

$$Q = \frac{GhD}{3(D - d)} - \frac{g\sqrt{(kd + D\alpha)(kd - D\alpha)}}{3D}$$

ebenfalls eine bequeme Formel für den Inhalt der ſchief abgeſtumpften Pyramide, und es iſt hier G die untere und g die obere Fläche, k die Kante (Bm); h der normale Abſtand des Punktes b von B; D irgend eine Seite der unteren Fläche und d die gleichliegende in der durch b gelegten zur Grundfläche parallelen Ebene, ſo daß, wenn man $AC = D$ nimmt, $ac = d$ wird; nimmt man $BA = D$, ſo wird $ba = d$ ꝛc. Außerdem kommt nur noch $\alpha = (bp)$ vor, welches eine Linie iſt, deren Größe ebenfalls unmittelbar gefunden werden kann.

Zuſatz 2. Es ſind, §. 66., die beiden Gleichungen gefunden worden

$\alpha = \frac{b \sin \varphi + a \cos \varphi}{r}$ und $\beta = \frac{b \cos \varphi - a \sin \varphi}{r}$

aus welchen φ auf folgende Art weggeſchafft werden kann, wodurch man eine Gleichung erhält, in welcher die 4 Größen a, b, α und β vorkommen.

Multiplicirt man nämlich den Werth von α mit a und den von β mit b, ſo erhält man

$$\begin{aligned} a\alpha r &= ab \sin \varphi + a^2 \cos \varphi \\ b\beta r &= - ab \sin \varphi + b^2 \cos \varphi \end{aligned}$$

alſo iſt $(a\alpha + b\beta)\, r = (a^2 + b^2) \cos \varphi$.

Multiplicirt man aber umgekehrt den Werth von α mit b und den von β mit a, ſo wird

$$\begin{aligned} b\alpha r &= b^2 \sin \varphi + ab \cos \varphi \\ a\beta r &= - a^2 \sin \varphi + ab \cos \varphi \end{aligned}$$

alſo $(b\alpha - a\beta)\, r = (b^2 + a^2) \sin \varphi$.

Hiernach iſt

$$\sin^2 \varphi = \frac{(b\alpha - a\beta)^2\, r^2}{(a^2 + b^2)^2}$$

$$\text{und } \cos^2 \varphi = \frac{(a\alpha + b\beta)^2\, r^2}{(a^2 + b^2)^2}$$

folglich iſt $r^2 = \frac{(b\alpha - a\beta)^2\, r^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{(a\alpha + b\beta)^2\, r^2}{(a^2 + b^2)^2}$

und es iſt daher

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)^2 &= (b\alpha - a\beta)^2 + (a\alpha + b\beta)^2 \\ &= b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 + a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 \\ &= (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2) \end{aligned}$$

hiernach iſt $a^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2$

ein Ausdruck, der mit dem in dieſem §. erhaltenen vollkommen übereinſtimmt.

Zuſatz 3. Soll der Inhalt des Abſchnitts $bac\alpha\gamma$ berechnet werden, ſo ſind hierzu die obigen Formeln nicht brauchbar, denn man müßte für dieſen Fall annehmen $D = d$, alſo $D - d = o$ und es iſt auch $h = o$ und $k = o$, wodurch die Formeln unbeſtimmt werden, weil ſie alsdann den Ausdruck $\frac{o}{o}$ enthalten. Uebrigens iſt es doch immer möglich, einen ſolchen Abſchnitt zu berechnen, wie in dem folgenden §. gezeigt wird.

§. 70.

Von den Pyramiden-Abſchnitten.

Wird der normale Abſtand des Punktes n, Fig. 37., von der gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinie der beiden Ebenen abc und $\alpha b\gamma = a$, der Abſtand des Punktes p von dieſer Linie $= \alpha$, $(mn) = b$ und $(mp) = \beta$ geſetzt, ſo iſt nach §. 66.

$$\alpha = \frac{b \sin\varphi + a \cos\varphi}{r} \text{ und } \beta = \frac{b \cos\varphi - a \sin\varphi}{r}$$

wo φ den Neigungswinkel beider Ebenen bedeutet.

Aus der erſten dieſer beiden Gleichungen aber folgt

$$b = \frac{\alpha r - a \cos\varphi}{\sin\varphi}$$

und es iſt daher auch, wenn man dieſen Ausdruck für b in dem Werthe von β ſetzt,

$$\beta r = \frac{\alpha r - a \cos\varphi}{\sin\varphi} \cdot \cos\varphi - a \sin\varphi$$

alſo $\beta r \sin\varphi = \alpha r \cos\varphi - a(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \alpha r \cos\varphi - ar^2$ und man erhält hieraus

$$1.\ \beta = \frac{\alpha \cot\varphi}{r} - \frac{ar}{\sin\varphi}.$$

Da übrigens $\beta r = \dfrac{\alpha r \cos\varphi - ar^2}{\sin\varphi}$

und auch $\beta r = b \cos\varphi - a \sin\varphi$

ſo iſt auch

$$b \cos\varphi - a \sin\varphi = \frac{\alpha r \cos\varphi - ar^2}{\sin\varphi}$$

und daher $b \sin\varphi \cos\varphi = \alpha r \cos\varphi - a(r^2 - \sin^2\varphi)$
$= \alpha r \cos\varphi - a \cos^2\varphi$; folglich iſt

$$2.\ b = \frac{\alpha r}{\sin\varphi} - \frac{a \cot\varphi}{r}.$$

Durch a, α und φ ſind alſo die Werthe von b und β vollkommen beſtimmt.

Setzt man nun die Fläche $abc = G$ und $\alpha b\gamma = g$, den Inhalt der Pyramide $abcm = P$, $\alpha b\gamma m = p$ und die Differenz beider, alſo den Pyramiden-Abſchnitt $= Q$, ſo iſt

$$P = \tfrac{1}{3}Gb$$
$$\text{und } p = \tfrac{1}{3}g\beta$$
$$\text{alſo } Q = \tfrac{1}{3}Gb - \tfrac{1}{3}g\beta$$

nämlich es iſt, wenn hier für b und β die Werthe geſetzt werden,

$$Q = \tfrac{1}{3}G\left(\frac{\alpha r}{\sin\varphi} - \frac{a\cot\varphi}{r}\right) - \tfrac{1}{3}g\left(\frac{\alpha\cot\varphi}{r} - \frac{ar}{\sin\varphi}\right)$$

und hieraus erhält man durch gehörige Reduction

$$Q = \frac{(G\alpha + ga)\,r}{3\sin\varphi} - \frac{(Ga + g\alpha)\cot\varphi}{3r}$$

eine Formel, durch welche der Inhalt eines jeden Abſchnitts irgend einer Pyramide ſich berechnen läßt, und es enthält dieſe Formel nur ſolche Größen, die unmittelbar gemeſſen werden können.

Zuſatz 1. Wird von einer Pyramide ABCm, Fig. 38., ein Stück durch die Ebene bc$\gamma\beta$ abgeſchnitten, ſo daß der Schnitt nicht durch die ſämmtlichen Seitenflächen der Pyramide geht, ſondern die Grundfläche trifft, ſo läßt ſich auch von einem ſolchen Abſchnitte bc$\gamma\beta$BC der Inhalt mittelſt der obigen Formeln berechnen; denn zieht man von β und γ Linien nach m, ſo iſt auch BC$\gamma\beta$m eine vollſtändige Pyramide, von welcher der zu berechnende Körper ein Abſchnitt iſt.

Zuſatz 2. In dem Körper bc$\gamma\beta$BC, Fig. 38., läßt ſich die Lage von n, nämlich des Punktes, in welchem die Grundfläche BC$\gamma\beta$ von der Normale aus m getroffen wird, auf folgende Art beſtimmen: Man ziehe durch c eine Parallele ce zu bB, und auch von c eine Senkrechte auf Ce, ſo ſchneidet dieſe Senkrechte die ce nach demſelben Verhältniſſe, nach welchem CB von der Senkrechten aus m auf dieſelbe, geſchnitten wird. Es iſt alſo dieſer Punkt der Linie BC beſtimmt, und wenn man an dieſem Punkt in der Ebene BC$\gamma\beta$ eine Normale auf BC errichtet, ſo muß, wie bekannt, n in dieſer Normale liegen. Wird nun ferner durch c eine Parallele cf zu Bγ gezogen, und von c eine Normale auf Cf, ſo ſchneidet dieſe die Cf nach eben dem Verhältniſſe, nach welchem Cγ von der Normale aus m geſchnitten wird, und es iſt alſo auch dieſer Punkt in Cγ beſtimmt. Errichtet man nun an dieſem Punkte in der Ebene BC$\gamma\beta$ eine Normale auf

$C\gamma$, ſo muß auch in dieſer der geſuchte Punkt n liegen, und es iſt daher die Lage deſſelben vollkommen beſtimmt. Nicht weſentlich verſchieden hiervon iſt das Verfahren, durch welches die Lage von p in der obern Fläche $bc\gamma\beta$ gefunden wird.

§. 71.

Formeln für die verſchiedenen Theile eines Kegels.

Die in den beiden vorhergehenden §§. abgeleiteten Formeln gelten für alle zu der Gattung der Pyramiden gehörigen Körper, ohne Ausnahme, es mag die Grundfläche derſelben eine von geraden oder von krummen Linien begränzte Figur ſein, und es haben dieſelben daher auch für den Kegel Gültigkeit; man kann daher mittelſt jener Formeln den Inhalt ſowohl eines jeden gerade oder ſchief abgeſtumpften Kegels, als auch den eines Kegelabſchnitts, oder wie man dieſe Art von Körpern zu nennen pflegt, eines Kegelhufes berechnen, wobei es nur darauf ankommt, die richtigen Werthe der einzelnen, in den Formeln vorkommenden Größen zu beſtimmen. Es iſt aber

1. die Formel für die gerade abgeſtumpfte Pyramide

$$Q = \frac{h}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)$$

und es iſt daher, wenn von einem gerade abgeſtumpften Kegel der Radius der untern Fläche = R und der der oberen = ϱ geſetzt wird, die Formel für den Inhalt deſſelben

$$K - k = \frac{h}{3}(R^2\pi + R\varrho\pi + \varrho^2\pi) = \frac{h}{3}(R^2 + R\varrho + \varrho^2)\,\pi$$

wie auch bereits, §. 62. Zuſatz 1., angegeben worden iſt. Weil aber

$$R^2 + R\varrho + \varrho^2 = (R + \varrho)^2 - R\varrho$$

ſo iſt auch

$$K - k = \frac{h}{3}[(R + \varrho)^2 - R\varrho]\,\pi.$$

2. Der Inhalt einer ſchief abgeſtumpften Pyramide wird nach §. 69. durch die Formel ausgedrückt

$$Q = \tfrac{1}{3}G \cdot \frac{hD}{D - d} - \tfrac{1}{3}g\sqrt{\left[\frac{A^2d^2}{D^2} + \frac{h^2d^2}{(D - d)^2} - \alpha^2\right]}.$$

Nun ſei $ABb\alpha$, Fig. 39., der Querſchnitt eines abgeſtumpf=

ten Kegels, der entweder durch die Axe des Kegels ſelbſt geht, oder parallel zu derſelben läuft, ſo iſt, wenn man durch b eine Parallele be zu αA zieht und von demſelben Punkte b eine Normale auf Be fällt, dieſe Normale = h, und es theilt dieſelbe Be nach demſelben Verhältniſſe, nach welchem BA von der Normale aus der Spitze m getheilt wird. Dieſer Punkt in AB iſt alſo beſtimmt, und man kann auf ähnliche Weiſe in einem anderen Querſchnitt den Punkt der Grundlinie deſſelben finden, in welchem dieſelbe von der Normale aus m getroffen wird. Auf dieſe Weiſe ſind alſo in der Grundfläche G zwei Linien beſtimmt, und man kennt in jeder derſelben den Punkt, in welchem ſie von der Normale aus m getroffen wird. Errichtet man nun an dieſen Punkten in der Ebene der Grundfläche Normalen auf jene Linien, ſo ſchneiden ſich dieſe in dem Punkte, in welchem die Normale aus m die Grundfläche trifft, und der Abſtand dieſes Punktes von B iſt = A.

Wird durch B die Linie Bα' parallel zu bα gezogen, und man fällt aus b die Normale auf Bα', ſo wird dieſe hierdurch nach eben dem Verhältniſſe getheilt, nach welchem bα von der Normale aus m getheilt wird, und es läßt ſich ſonach der Punkt, in welchem die Normale aus m die obere Fläche g trifft, ebenfalls leicht beſtimmen; der Abſtand dieſes Punktes von b aber iſt = α. Außerdem iſt, wenn man (AB) = D annimmt, ab = Ac = d, und es ſind hiernach die ſämmtlichen in der allgemeinen Formel vorkommenden Größen beſtimmt, welche zur Berechnung des Inhalts eines jeden abgeſtumpften Kegels erforderlich ſind, es mag übrigens der Kegel ſelbſt, zu welchem der zu berechnende Theil gehört, normal oder ſchief ſein. Uebrigens iſt leicht einzuſehen, daß man hier in jedem Falle (AB) = D = 2R annehmen kann, und es iſt alsdann (ab) = d = 2ϱ.

Iſt der Kegel ſelbſt normal, ſo daß die Axe mn deſſelben ſenkrecht auf der Grundfläche ſteht, ſo liegt n in dem Mittelpunkte der Grundfläche, und es iſt in dieſem Falle A = (Bn) = R. Für D = 2R und d = 2ϱ wird die obige Formel alsdann

$$Q = \tfrac{1}{3}G \cdot \frac{hR}{R-\varrho} - \tfrac{1}{3}g \sqrt{\left[\varrho^2 + \frac{h^2\varrho^2}{(R-\varrho)^2} - \alpha^2\right]}$$

$$= \frac{GhR}{3(R-\varrho)} - \frac{g\sqrt{[\varrho^2(R-\varrho)^2+h^2\varrho^2-\alpha^2(R^2-\varrho^2)]}}{3(R-\varrho)}$$

Es iſt aber für (Bb) = k

$$k^2 = h^2 + (R-\varrho)^2, \text{ alſo iſt auch}$$

$$Q = \frac{GhR - g\sqrt{[\varrho^2 k^2 - \alpha^2 (R-\varrho)^2]}}{3(R-\varrho)}.$$

Zugleich iſt in allen Fällen G die untere und g die obere Fläche, und es können hier beide Flächen Kreiſe ſein, oder es iſt eine derſelben eine Elypſe, oder es ſind beide Elypſen. Setzt man nun die beiden Halbaxen der unteren Fläche P und Q, wo P = Q wird, wenn die Fläche ein Kreis iſt, und die Halbaxen der oberen Fläche p und q, ſo iſt $G = PQ\pi$ und $g = pq\pi$.

Wird in der zuletzt gefundenen Formel für das ſchief abgeſchnittene Stück eines normalen Kegels $\alpha = \varrho$ geſetzt, ſo erhält man den Ausdruck für den Fall, wenn bα mit ba zuſammenfällt; man bekommt alſo einen Ausdruck für den gerade abgeſtumpften Kegel. Die Formel wird alsdann

$$Q = \frac{GhR - g\sqrt{[\varrho^2 k^2 - \varrho^2(R-\varrho)^2]}}{3(R-\varrho)}$$

oder, weil $k^2 - (R-\varrho)^2 = h^2$,

$$Q = \frac{GhR - g\sqrt{\varrho^2 h^2}}{3(R-\varrho)} = \frac{h}{3}\cdot\frac{GR - g\varrho}{R-\varrho}.$$

Es iſt aber alsdann $G = R^2\pi$ und $g = \varrho^2\pi$, alſo wird

$$Q = \frac{h}{3}\cdot\left(\frac{R^3-\varrho^3}{R-\varrho}\right)\pi = \frac{h}{3}(R^2 + R\varrho + \varrho^2)$$

wie es ſein muß.

3. Für einen Pyramiden-Abſchnitt erhielt man §. 70. die Formel

$$Q = \frac{(G\alpha + ga)\,r}{3\sin\varphi} - \frac{(Ga + g\alpha)\cot\varphi}{3r}$$

und es gilt dieſelbe daher auch für einen jeden Kegelhuf, alſo für einen Körper, deſſen Querſchnitt z. B. Bbk iſt, wenn ABm der Querſchnitt des Kegels ſelbſt iſt. G und g ſind hier elyptiſche Segmente, oder es kann auch G ein Kreisabſchnitt ſein; den Werth von a und α findet man eben ſo, wie in No. 2., und wenn Bbk den Huf in zwei ſymmetriſche und gleiche Hälften theilt, wenn alſo dieſe

Fläche normal auf der Grundfläche iſt und durch die Axe des Kegels geht, ſo iſt $\angle Bkb = \varphi$. Uebrigens iſt bei dieſer Lage des Querſchnitts a ein Theil von kB und α von kb, und es liegt der Anfangspunkt dieſer Linien in k.

§. 72.

Formeln für die beſonderen Formen der Kegelhufe.

Es iſt für alle Kegelhufe ohne Ausnahme, wenn der Inhalt eines ſolchen = H geſetzt wird,

$$H = \frac{(G\alpha + ga)\,r}{3 \sin \varphi} - \frac{(Ga + g\alpha) \cot \varphi}{3r}$$

wo G der Inhalt der untern Fläche iſt, in welcher Bk, Fig. 39., liegt; g der Inhalt der oberen Fläche, in welcher die Linie bk iſt; φ der Neigungswinkel beider Flächen; a der Abſtand des Punktes, in welchem die untere Fläche von der Normale aus m getroffen wird, von der gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinie beider Grundflächen des Hufes, und α der Abſtand des Punktes, in welchem die Normale aus m die obere Fläche des Hufes trifft, von der gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinie.

Man nehme nun an, es ſei der Huf in ſofern regelmäßig, als der auf der Grundfläche normale Querſchnitt bBk ihn in zwei gleiche und ſymmetriſche Hälften theilt, ſo iſt, wie bereits im vorigen §. bemerkt wurde, $\varphi = \angle bkB$; und der ganze Kegel ſei normal, ſo daß ABm ein gleichſchenkliges Dreieck iſt, ſo wird kn = a. Iſt nun

1. Bk=Bn, fällt alſo k mit n zuſammen, ſo wird a=o und $G = \frac{1}{2}R^2\pi$ für Bn = R, es iſt alſo

$$H = \frac{\alpha R^2\pi\ r}{6 \sin \varphi} - \frac{g\alpha \cot \varphi}{3r}.$$ Iſt aber

2. außerdem $\varphi = 90^0$, ſo wird mnB der Durchſchnitt des Hufes, und es iſt nun cot φ = o und sin φ = r, alſo

$$H = \frac{\alpha R^2\pi}{6}.$$

Zugleich iſt alsdann α = (mn) die Höhe des Kegels und H wird die Hälfte des ganzen Kegels.

3. Fällt k nicht mit n zuſammen, und iſt $\varphi = 90^0$, ſo wird a negativ, denn es iſt in dieſem Falle, wenn man

$k\alpha$ parallel zu mn zieht, $Ak\alpha$ der Durchſchnitt des Hufs, und kn = a liegt nicht in der Grundfläche, ſondern auf der entgegengeſetzten Seite des gemeinſchaftlichen Durchſchnitts. Dagegen iſt α in dieſem Falle = (mn), und weil $\cot \varphi = o$, ſo wird alsdann

$$H = \tfrac{1}{3}(G\alpha - ga) = \tfrac{1}{3}g\alpha - \tfrac{1}{3}ga.$$

Hier iſt G ein Kreisabſchnitt von der Höhe Ak, und g iſt ein hyperboliſcher Abſchnitt, zu welchem αk als Axe gehört. Der Huf iſt alſo in dieſem Falle der Differenz zweier Pyramiden gleich, von welchen die eine den zu Ak gehörigen Kreisabſchnitt zur Grundfläche und die Axe mn des Kegels zur Höhe und deren andere die zu αk gehörige hyperboliſche Fläche zur Grundfläche und kn zur Höhe hat.

4. Will man für $\varphi = 90^0$ den Kegelabſchnitt berechnen, von welchem $kBm\alpha$ der Durchſchnitt iſt, ſo wird kn = a poſitiv, und es iſt, wenn dieſer Kegelabſchnitt mit H′ und die zu Bk gehörige Fläche mit G′ bezeichnet wird,

$$H' = \tfrac{1}{3}G'\alpha + \tfrac{1}{3}ga$$

$$\text{nach No. 3 iſt } H = \tfrac{1}{3}G\alpha - \tfrac{1}{3}ga$$

$$\text{daher } H' + H = \frac{\alpha}{3}(G' + G).$$

Es iſt aber in dieſem Falle G + G′ der ganzen Grundfläche des Kegels gleich, und H + H′ der Kegel ſelbſt, alſo

$$K = H' + H = \frac{\alpha}{3} R^2\pi$$

wie es ſein muß.

5. Wenn in einem beſonderen Falle G = g, ſo wird die allgemeine Formel für H verwandelt in

$$H = \frac{G(a+\alpha)r}{3\sin\varphi} - \frac{G(a+\alpha)\cot\varphi}{3r}$$

$$= \frac{G(a+\alpha)}{3}\left(\frac{r}{\sin\varphi} - \frac{\cot\varphi}{r}\right)$$

$$= \frac{G(a+\alpha)}{3}\left(\frac{r - \cos\varphi}{\sin\varphi}\right).$$

Nun iſt aber $\frac{r - \cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{r}$; folglich iſt in dieſem Falle auch

$$H = \frac{G(a + \alpha)\,tg\,\tfrac{1}{2}\varphi}{3r}.$$

6. Iſt kb normal auf Bm und man ſetzt $kB = A$, $kb = B$ und $Bb = C$, ſo iſt $\alpha = (kB) = B$ und

$(kB) : (Bb) = r : \sin\varphi$, alſo $\frac{r}{\sin\varphi} = \frac{(kB)}{(Bb)} = \frac{A}{C}$

$(Bb) : (bk) = r : \cot\varphi$, alſo $\frac{\cot\varphi}{r} = \frac{(bk)}{(Bb)} = \frac{B}{C}$.

Es wird daher für dieſen Fall

$$H = \frac{GB + ga}{3} \cdot \frac{A}{C} - \frac{Ga + gB}{3} \cdot \frac{B}{C}$$

$$= \frac{GAB + gaA - GaB - gB^2}{3C}$$

$$= \frac{GB(A - a) - g(B^2 - aA)}{3C};$$

fällt nun k mit n zuſammen, ſo wird $a = 0$ und

$$H' = \frac{GAB - gB^2}{3C} = \frac{B(GA - gB)}{3C};$$

wenn aber k mit A zuſammenfällt, ſo wird $a = (kn) = (An) = \frac{1}{2}(AB) = \frac{1}{2}A$, und es iſt alsdann

$$H'' = \frac{GB(A - \frac{1}{2}A) - g(B^2 - \frac{1}{2}A^2)}{3C}$$

$$= \frac{ABG}{6C} - \frac{g(2B^2 - A^2)}{6C}$$

oder weil $B^2 = A^2 - C^2$, alſo $2B^2 = 2A^2 - 2C^2$, ſo iſt auch in dieſem Falle

$$H'' = \frac{ABG}{6C} - \frac{g(A^2 - 2C^2)}{6C}$$

ein Reſultat, das auch unmittelbar auf folgende Art hätte gefunden werden können:

Wenn Ab, Fig. 40., normal iſt auf Bm, ſo ſind die Dreiecke ABb und mBn ähnlich, und es iſt daher

$AB : Bb = mB : Bn$

alſo $A : C = (mB) : \frac{1}{2}A$

und es iſt daher $(mB) = \frac{A^2}{2C}$

folglich iſt $(bm) = \frac{A^2}{2C} - C = \frac{A^2 - 2C^2}{2C}$.

Ferner iſt Bb : bA = Bn : mn

oder C : B = $\frac{1}{2}$A : (mn)

und es iſt ſonach (mn) = $\frac{AB}{2C}$.

Nun iſt aber der Huf, von welchem ABb den Durchſchnitt darſtellt, der Differenz der beiden Kegel gleich, zu welchen ABm und Abm als Durchſchnitte gehören, und es iſt von dem erſteren dieſer beiden Kegel G die Grundfläche und (mn) = $\frac{AB}{2C}$ die Höhe, und von dem anderen, deſſen Grundfläche = g, iſt mb = $\frac{A^2 - 2C^2}{2C}$ die Höhe; folglich iſt, wenn dieſe Kegel mit K und k bezeichnet werden

$$K = \tfrac{1}{3}G \cdot \frac{AB}{2C} = \frac{ABG}{6C}$$

$$\text{und } k = \tfrac{1}{3}g\left(\frac{A^2 - 2C^2}{2C}\right) = \frac{(A^2 - 2C^2)\,g}{6C}$$

und die Differenz beider giebt den Huf

$$H'' = \frac{ABG}{6C} - \frac{(A^2 - 2C^2)\,g}{6C}$$

eine Formel, die mit der oben aus der allgemeinen abgeleiteten vollkommen übereinſtimmt.

7. Wenn der Axentriangel des Kegels, alſo ABm gleichſeitig iſt, und es ſoll der Inhalt des Hufes ABb unter der Vorausſetzung berechnet werden, daß $\angle AbB = 90^0$, ſo iſt (Bb) = C = $\frac{1}{2}$A, und die zuletzt erhaltene Formel wird für dieſen Werth von C

$$H'' = \frac{BG}{3} - \frac{Ag}{6}.$$

8. Wenn von dem Durchſchnitte Bkb, Fig. 39., des Hufes, die Linie bk parallel zu mA iſt, ſo wird die obere Fläche deſſelben, in welcher bk liegt, eine Parabel, von welcher bk die Axe iſt, und die Kante, in welcher die beiden Ebenen ſich ſchneiden, iſt die Grundlinie des paraboliſchen Segmentes. Setzt man dieſe Kante = k, ſo iſt, weil bk mit B bezeichnet wird, die paraboliſche Fläche = $\frac{2}{3}$B. k = g, und man kann dieſen Werth in der allgemeinen Formel für die Hufe ſubſtituiren. Uebrigens laſſen ſich in dieſem Falle auch

leicht für a und α die Werthe durch unmittelbar gegebene Größen ausdrücken. Fällt in dieſem beſondern Falle noch k mit n zuſammen, ſo daß alſo a = o wird, und die allgemeine Formel alsdann

$$H = \frac{G\alpha r}{3 \sin \varphi} - \frac{g\alpha \cot \varphi}{3r}$$

ſo iſt $G = \frac{1}{2}A^2\pi$ und $g = \frac{4}{3}AB$, und es wird daher

$$H = \frac{A^2\pi\alpha r}{6 \sin \varphi} - \frac{4AB\alpha \cot \varphi}{9r}$$
$$= \frac{A\alpha}{3}\left[\frac{Ar\pi}{2 \sin \varphi} - \frac{4B \cos \varphi}{3 \sin \varphi}\right]$$
$$= \frac{A\alpha}{3}\left[\frac{3Ar\pi - 8B \cos \varphi}{6 \sin \varphi}\right].$$

Iſt nun überdies der Axentriangel gleichſeitig, ſo wird B = A, und es iſt alsdann

$$H' = \frac{A^2\alpha}{3}\left[\frac{3r\pi - 8 \cos \varphi}{6 \sin \varphi}\right].$$

Zuſatz. Die in der allgemeinen Formel für die Kegelhufe

$$H = \frac{(G\alpha + ga)\, r}{3 \sin \varphi} - \frac{(Ga + g\alpha) \cot \varphi}{3\, r}$$

vorkommenden verſchiedenen Größen laſſen ſich aus unmittelbar gegebenen auf folgende Art beſtimmen, wobei vorausgeſetzt wird, daß die Baſis des Kegels ein Kreis ſei, alſo die Grundfläche des Hufes ein Kreisabſchnitt. Man ſetze von dem Durchſchnitte bkB, Fig. 41., des Hufes, Bk = A; kb = B; Bb = C und die Kante, in welcher beide ebene Flächen des Hufes ſich ſchneiden, = k; ſo iſt $\varphi = \angle bkB$ durch die Seiten des Dreiecks bkB beſtimmt, und es iſt alſo

$$1.\quad \cos \varphi = \left(\frac{A^2 + B^2 - C^2}{2AB}\right) r$$

und man findet eben ſo, wenn kbB = ψ geſetzt wird,

$$\cos \psi = \left(\frac{B^2 + C^2 - A^2}{2BC}\right) r.$$

Da ferner (Bk) : $\frac{1}{2}$k = $\frac{1}{2}$k : (kA)
oder A : $\frac{1}{2}$k = $\frac{1}{2}$k : (kA)

ſo iſt $(kA) = \frac{k^2}{4A}$;

alſo $(BA) = A + \frac{k^2}{4A} = \frac{4A^2 + k^2}{4A}$,

und es iſt alſo, weil der Kegel normal ſein ſoll, und alſo das Dreieck ABm gleichſchenklig,

$$(Bn) = \tfrac{1}{2}(AB) = \frac{4A^2 + k^2}{8A}.$$

Daher iſt nun

$$2.\ a = (kn) = (kB - Bn) = A - \frac{4A^2 + k^2}{8A} = \frac{4A^2 - k^2}{8A}.$$

Fällt man die Normale (bd) auf (Bk), ſo läßt ſich, wie bekannt, der Werth von (Bd) = d und von (bd) = h aus den drei Seiten des Dreiecks berechnen, und es iſt

$$d = \frac{A^2 + C^2 - B^2}{2A} \text{ und } h = \sqrt{(C^2 - d^2)}.$$

Weil übrigens, wenn Be normal auf kb gezogen wird,

$$(kB) : (Be) = r : \sin\varphi \text{ und } (kB) : (ke) = r : \cos\varphi,$$

$$\text{ſo iſt } (Be) = \frac{A \sin\varphi}{r} \text{ und } (ke) = \frac{A \cos\varphi}{r}$$

$$\text{und daher } (eb) = B - \frac{A \cos\varphi}{r}.$$

Außerdem iſt auch

$$(Bd) : (Bb) = (nB - Bd) : (bm)$$

$$\text{oder } d : C = \left(\frac{4A^2 + k^2}{8A} - d\right) : (bm),$$

$$\text{alſo } (bm) = \frac{C}{d}\left[\frac{4A^2 + k^2}{8A} - d\right]$$

$$= \frac{C(4A^2 + k^2)}{8Ad} - C.$$

Da nun $2Ad = A^2 + C^2 - B^2$, ſo iſt

$$(bm) = \frac{C(4A^2 + k^2)}{4(A^2 + C^2 - B^2)} - C$$

$$= \frac{C(k^2 - 4C^2 + 4B^2)}{4(A^2 + C^2 - B^2)}.$$

Nun iſt, wenn man (mf) normal zieht auf (kb),

$$(Bb) : (be) = (mb) : (bf),$$

$$\text{oder } C : \left(B - \frac{A\cos\varphi}{r}\right) = \frac{C^2(k^2 - 4C^2 + 4B^2)}{4(A^2 + C^2 - B^2)} : (bf);$$

folglich iſt (bf) =

$$\left(B - \frac{A\cos\varphi}{r}\right)\left(\frac{k^2 - 4C^2 + 4B^2}{4(A^2 + C^2 - B^2)}\right).$$

Es iſt aber $\alpha = (kb) + (bf)$, alſo iſt

$$3. \quad \alpha = B + \left(B - \frac{A\cos\varphi}{r}\right)\left(\frac{k^2 - 4C^2 + 4B^2}{4(A^2 + C^2 - B^2)}\right).$$

Iſt nun Fig. 41 a. die Grundfläche des Kegels, ſo iſt pBq die Grundfläche des Hufes, und es iſt nun

$$(np) : (pk) = r : \sin\gamma$$

$$\text{oder } \frac{4A^2 + k^2}{8A} : \frac{k}{2} = r : \sin\gamma;$$

$$\text{folglich iſt } \sin\gamma = \frac{4Akr}{4A^2 + k^2}$$

und der Kreisausſchnitt pnqA iſt nun

$$= \frac{2\gamma}{360} \cdot R^2\pi = \frac{\gamma}{180} \cdot \left(\frac{4A^2 + k^2}{8A}\right)^2 \pi;$$

folglich iſt der Ausſchnitt pBq =

$$R^2\pi - \frac{\gamma}{180}\left(\frac{4A^2 + k^2}{8A}\right)^2 \pi = \left(\frac{4A^2 + k^2}{8A}\right)^2 \left(\frac{180^0 - \gamma}{180}\right)$$

und wird hierzu das Dreieck pnq addirt, ſo erhält man den Werth von G. Da nun

$$\Delta\, pnq = (kp)\,(kn) = \tfrac{1}{2}\,k \cdot a = \tfrac{1}{2}k \cdot \frac{4A^2 - k^2}{8A}; \text{ ſo iſt}$$

$$4. \quad G = \left(\frac{4A^2 + k^2}{8A}\right)^2 \left(\frac{180^0 - \gamma}{180}\right) + \frac{k(4A^2 - k^2)}{16A}.$$

Die Veränderung, welche dieſe Formel erleidet, wenn (kn) = a einen negativen Werth hat, wenn alſo der Abſchnitt kleiner als ein Halbkreis iſt, läßt ſich leicht angeben. — Endlich iſt

5. g immer ein Abſchnitt von einem Kegelſchnitte, und zwar von einer Parabel, wenn bk parallel zu mA iſt; von einer Elypſe, wenn bk verlängert die mA ſchneidet, und wenn keines von dieſen beiden der Fall iſt, ſo iſt g der Abſchnitt einer Hyperbel.

§. 73

§. 73.

Das ſchief abgeſtumpfte dreiſeitige Prisma.

Wenn in dem dreiſeitigen Prisma ABCabc, Fig. 42., die Fläche abc nicht parallel iſt zu ABC, und alſo die Seitenflächen ABba, ACca und BCcb Paralleltrapeze ſind, ſo wird das Prisma ſchief abgeſtumpft genannt, weil dieſer Körper aus einem vollſtändigen Prisma erhalten wird, wenn man von demſelben durch eine Ebene, die nicht parallel zu ABC und die durch alle Seitenkanten des Prisma geht, ein Stück abſchneidet. Der Inhalt eines ſolchen Körpers läßt ſich auf folgende Art ermitteln: Man lege durch den Endpunkt der kürzeſten Seitenkante Aa eine Ebene $a\beta\gamma$ parallel zu ABC, ſo wird das abgeſtumpfte Prisma dadurch in ein vollſtändiges Prisma $ABCa\beta\gamma$ und in eine vierſeitige Pyramide $abc\beta\gamma$ zerlegt. Setzt man nun $Aa = a$, $Bb = b$, $Cc = c$, den normalen Abſtand mn der Kanten Cc und Bb von einander $= d$ und den normalen Abſtand der Kante Aa von der gegenüberliegenden Fläche $BCcb = h$, ſo iſt, weil

$B\beta = C\gamma = Aa$, die Fläche des Parallelogramms $BC\gamma\beta = a \cdot d$, und der Inhalt des Prisma

$$BC\gamma\beta aA \text{ iſt } = \frac{a \cdot d \cdot h}{2} = P.$$

Ferner iſt $b\beta = b - a$ und $c\gamma = c - a$,

alſo das Trapez $\beta\gamma cb = \left(\frac{b-a+c-a}{2}\right) \cdot d = \frac{(b+c-2a)d}{2}$

und daher der Inhalt der Pyramide $\beta\gamma cba$

$$= p = \frac{(b+c-2a)\,d}{2} \cdot \frac{h}{3}.$$

Wird nun dies abgeſtumpfte Prisma $= Q$ geſetzt,

ſo iſt $Q = P + p$,

aber $P = \frac{adh}{2}$

und $p = \frac{(b+c-2a)\,dh}{6}$;

alſo $Q = \frac{adh}{2} + \frac{(b+c-2a)\,dh}{6}$

$$= \frac{3adh + (b + c - 2a)\,dh}{6} = \frac{(a + b + c)\,dh}{6}$$

$$= \left(\frac{a + b + c}{3}\right) \cdot \frac{dh}{2}.$$

Es iſt aber $\frac{dh}{2}$ die Fläche des Dreiecks, welches den normalen Querſchnitt des Prisma bildet, folglich iſt das abgeſtumpfte dreiſeitige Prisma einem vollſtändigen Prisma gleich, das den normalen Querſchnitt zur Grundfläche und das arithmetiſche Mittel von den drei Kanten zur Höhe hat. Wird alſo der normale Querſchnitt des abgeſtumpften Prisma = g geſetzt, ſo iſt

$$Q = \left(\frac{a + b + c}{3}\right) g.$$

Zuſatz 1. Für a = b = c erhält man Q = ag, welches der bekannte Ausdruck für das vollſtändige Prisma iſt. Es iſt der Inhalt eines ſolchen aber auch = GH, wenn G die Grundfläche und H den Abſtand beider Grundflächen von einander bedeutet, und iſt die Kante a unter einem Winkel = φ gegen die Grundfläche geneigt, ſo iſt

$$a : H = r : \sin\varphi$$

$$\text{alſo } H = \frac{a \sin\varphi}{r},$$

$$\text{und daher } Q = \frac{aG \sin\varphi}{r};$$

$$\text{da nun auch } Q = ag, \text{ ſo iſt}$$

$$g = G\,\frac{\sin\varphi}{r}.$$

Der normale Querſchnitt eines ſchiefen Prisma wird alſo gefunden, wenn man die Grundfläche deſſelben mit dem Sinus des Neigungswinkels der Kante gegen die Grundfläche multiplicirt. Da nun die Formel für das ſchief abgeſtumpfte Prisma iſt

$$Q = \frac{a + b + c}{3} \cdot g,$$

ſo iſt auch, wenn für g der Werth geſetzt wird,

$$Q = \left(\frac{a + b + c}{3}\right) G \cdot \frac{\sin\varphi}{r},$$

wo G die Grundfläche ABC bedeutet, und φ der Neigungswinkel iſt, unter welchem die Seitenkanten gegen dieſe Fläche geneigt ſind.

Zuſatz 2. Setzt man Δ abc $= G'$, und den Winkel, welchen die Seitenkanten mit dieſer Fläche bilden, $= \varphi'$, ſo iſt auch

$$Q = \left(\frac{a + b + c}{3}\right) G' \frac{\sin \varphi'}{r};$$

wird dieſe Formel mit der obigen verglichen, ſo erhält man

$$G \sin \varphi = G' \sin \varphi',$$

und es iſt daher

$$G : G' = \sin \varphi' : \sin \varphi.$$

Die Flächen von irgend zwei Querſchnitten eines Prisma verhalten ſich alſo zu einander umgekehrt, wie die Sinus der Winkel, unter welchen die Seitenkanten gegen dieſe Flächen geneigt ſind.

§. 74.

Von dem ſchief abgeſtumpften vielſeitigen Prisma.

1. Iſt abcde, Fig. 43., die Grundfläche eines normalen ſchief abgeſtumpften Prisma, ſo läßt ſich daſſelbe, wenn man in der Grundfläche die Diagonalen ac und ad zieht, und durch jede Diagonale und die an den Endpunkten derſelben anliegenden Kanten Ebenen legt, in (n — 2) dreiſeitige Prismen zerlegen, wenn die Grundfläche nſeitig iſt, und man kann daher den Inhalt eines ſolchen Prisma mittelſt der Formeln §. 73. berechnen. Es ſei die Länge der Kante an a = a, der Kante an b = b, an c = c ꝛc.; die Fläche des Dreiecks abc = P, acd = Q, ade = R; ſo iſt der Inhalt des dreiſeitigen Prisma

$$\text{über abc} = \left(\frac{a + b + c}{3}\right) \cdot P,$$

$$\text{„ acd} = \left(\frac{a + c + d}{3}\right) \cdot Q,$$

$$\text{„ ade} = \left(\frac{a + d + e}{3}\right) \cdot R,$$

und es iſt daher der Inhalt des ganzen vielſeitigen Prisma =

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right) P + \left(\frac{a+c+d}{3}\right) Q + \left(\frac{a+d+e}{3}\right) R.$$

2. Iſt das Prisma nicht normal, ſondern ſind die Kanten unter einem Winkel $= \varphi$ gegen die Grundfläche geneigt, ſo iſt bekanntlich das dem Dreieck P entſprechende Dreieck des normalen Querſchnittes $= P \frac{\sin \varphi}{r}$; eben ſo iſt das Dreieck des normalen Querſchnittes, welches dem Dreieck Q entſpricht, $= Q \frac{\sin \varphi}{r}$ ꝛc. und es iſt daher allgemein die Formel für den Kubikinhalt =

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \cdot P \frac{\sin \varphi}{r} + \left(\frac{a+c+d}{3}\right) \cdot Q \frac{\sin \varphi}{r} + \left(\frac{a+d+e}{3}\right) \cdot R \frac{\sin \varphi}{r},$$

und dieſe Formel gilt auch für das normale Prisma, weil für $\varphi = 90^0$ der Factor $\frac{\sin \varphi}{r} = \frac{r}{r} = 1$ wegfällt.

3. Nimmt man innerhalb der Grundfläche einen Punkt n an, Fig. 44., und zieht von dieſem Punkte an alle Ecken der Figur die Linien na, nb ꝛc., ſo läßt ſich auf dieſe Weiſe das nſeitige Prisma in n dreiſeitige zerlegen, und es iſt nun, wenn man die durch n parallel zu den Kanten gezogene Linie, in ſofern ſie von beiden Grundflächen begränzt wird, = h ſetzt, der Inhalt des ganzen Prisma K =

$$\left(\frac{a+b+h}{3}\right) \cdot A \frac{\sin \varphi}{r} + \left(\frac{b+c+h}{3}\right) \cdot B \frac{\sin \varphi}{r} + \left(\frac{c+d+h}{3}\right) \cdot C \frac{\sin \varphi}{r}$$
$$+ \left(\frac{d+e+h}{3}\right) \cdot D \frac{\sin \varphi}{r} + \left(\frac{e+a+h}{3}\right) \cdot E \frac{\sin \varphi}{r} =$$
$$\left[\left(\frac{a+b}{3}\right) A + \left(\frac{b+c}{3}\right) B + \left(\frac{c+d}{3}\right) C + \left(\frac{d+e}{3}\right) D + \left(\frac{e+a}{3}\right) E\right] \frac{\sin \varphi}{r}$$
$$+ \frac{h}{3} [A + B + C + D + E] \frac{\sin \varphi}{r},$$

eine Formel, durch welche ebenfalls der Inhalt des vielſeitigen Prisma leicht gefunden wird, wenn man den Werth von h kennt.

4. Iſt die Grundfläche abcde, Fig. 44., eines vielſeitigen Prisma ein regelmäßiges nEck und n der Mittelpunkt deſſelben, ſo wird A = B = C ꝛc. und es iſt alſo der Inhalt der ſchief abgeſtumpften regelmäßigen Säule

$$S = \tfrac{1}{3}[a + b + b + c + c + d + d + e + e + a] A \frac{\sin\varphi}{r} +$$

$$\frac{h}{3} \cdot nA \frac{\sin\varphi}{r} =$$

$$\tfrac{2}{3}(a + b + c + d + e) A \frac{\sin\varphi}{r} + \frac{h}{3} \cdot nA \frac{\sin\varphi}{r} =$$

$$\left[\tfrac{2}{3}\left(\frac{a + b + c + d + e}{n}\right) + \tfrac{1}{3}h\right] nA \frac{\sin\varphi}{r}.$$

Nun iſt, es mag n eine gerade oder eine ungerade Zahl ſein, in dieſem Falle immer

$$\frac{a + b + c + d + e}{n} = h;$$

$$\text{folglich iſt } S = (\tfrac{2}{3}h + \tfrac{1}{3}h)\, nA \frac{\sin\varphi}{r};$$

$$\text{nämlich es iſt } S = hnA \frac{\sin\varphi}{r},$$

oder es iſt, weil nA die Grundfläche der Säule ausdrückt, wenn man dieſe Grundfläche mit G bezeichnet,

$$S = hG \frac{\sin\varphi}{r}.$$

5. Da die zuletzt gefundene Formel immer Gültigkeit behält, wie groß auch der Werth von n ſein mag, ſo gilt ſie auch für den Cylinder, und es iſt daher der Inhalt eines ſchief abgeſtumpften Cylinders ebenfalls $= hG \frac{\sin\varphi}{r}$, und wenn derſelbe normal iſt, ſo wird die Formel

$$S = hG$$

wo G die Grundfläche iſt und h die Linie, welche von dem Mittelpunkte der Grundfläche parallel zu der Kante bis an die obere Fläche gezogen gedacht werden kann. Da man übrigens h nicht unmittelbar meſſen kann, ſo läßt ſich dafür ein anderer Ausdruck auf folgende Art ſubſtituiren: Es ſei abcd, Fig. 45., der Querſchnitt des ſchief abgeſtumpften Cylinders, ſo iſt für nm = h die Linie ab in n halbirt, und es iſt eben ſo auch ce in o und cd in m halbirt, und daher iſt de = 2 (mo) und folglich, wenn ce parallel zu ba iſt,

$$ad + bc = 2\,(nm) = 2h,$$

ſetzt man alſo ad = a und bc = b, ſo iſt h = $\frac{a+b}{2}$ und der Inhalt des ſchief abgeſtumpften Cylinders iſt daher auch

$$S = G\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

6. Auch der Inhalt des Hufes H, von welchem cde der Durchſchnitt iſt, läßt ſich nun leicht beſtimmen, denn ſetzt man den Kubikinhalt des vollſtändigen Cylinders, von welchem abce der Durchſchnitt iſt, = P, ſo iſt

$$H = S - P;$$

es iſt aber $S = G\left(\frac{a+b}{2}\right)$ und $P = Gb$;

alſo

$$K = G\left(\frac{a+b}{2}\right) - G \cdot \frac{2b}{2} = G\left(\frac{a-b}{2}\right);$$

es iſt aber a − b = (da) − (cb) = (de). Wird alſo die Höhe (de) des Hufes mit α bezeichnet, ſo iſt

$$H = G \cdot \frac{\alpha}{2}.$$

§. 75.

Noch einige, die abgeſtumpften Körper betreffenden Aufgaben und Formeln.

1. Von einem dreikantigen Prisma abcdef, Fig. 46., wird ein Stück durch die Fläche $\alpha\beta\gamma\delta$ abgeſchnitten; man ſoll den Inhalt des zwiſchen abcd und $\alpha\beta\gamma\delta$ liegenden Körpers berechnen.

Aufl̈ösung. Setzt man die ganze Grundfläche abe = G; die Neigung der Kanten ad, bc und ef gegen dieſe Grundfläche = φ und die Länge der Kanten = k, ſo iſt der Inhalt des ganzen Prisma

$$P = Gk\,\frac{\sin\varphi}{r}.$$

Iſt nun ferner $\Delta\ \alpha\beta e = g'$ und $\gamma\delta f = g''$, ſo iſt in allen Fällen g′ und g″ ähnlich, und der abgeſchnittene Körper $\alpha\beta e\gamma\delta f$ iſt, wenn nicht g′ = g″, eine abgeſtumpfte Pyramide, weil die Ebene $\alpha\beta\gamma\delta$, genugſam verlängert, die verlängerte

Kante ef ſchneiden muß; folglich iſt, wenn man dieſen abgeſchnittenen Körper mit R bezeichnet, da die Höhe dieſes Körpers = $k\frac{\sin\varphi}{r}$ iſt,

$$R = \frac{k}{3}\,[g' + \sqrt{g'g''} + g'']\,\frac{\sin\varphi}{r},$$

und es iſt dieſer Ausdruck auch alsdann richtig, wenn g' und g'' gleich groß ſind, denn er wird für dieſen Fall

$$= kg'\frac{\sin\varphi}{r}, \text{ folglich iſt}$$

$$abcd\alpha\beta\gamma\delta = Q = P - R$$

$$= \left[G - \left(\frac{g' + \sqrt{g'g''} + g''}{3}\right)\right] k\,\frac{\sin\varphi}{r}.$$

2. Aus dieſer allgemeinen Formel laſſen ſich nun leicht die beſonderen für die verſchiedenen hier möglichen Fälle ableiten. Es ſei

I. $g'' = o$, ſo daß alſo γ und δ mit f zuſammenfallen, ſo wird

$$Q = [G - \tfrac{1}{3}g']\,k\,\frac{\sin\varphi}{r}.$$

II. Wenn $g' = G$ iſt, alſo $\alpha\beta$ mit ab zuſammenfällt, ſo wird die allgemeine Formel

$$Q = \left[\tfrac{2}{3}G - \frac{\sqrt{Gg''} + g''}{3}\right] k\,\frac{\sin\varphi}{r}.$$

III. Iſt zu gleicher Zeit $g' = G$ und $g'' = o$, ſo wird

$$Q = \tfrac{2}{3}G\cdot k\,\frac{\sin\varphi}{r},$$

wie ſich von ſelbſt verſteht, weil in dieſem Falle der Schnitt von f durch ab geht, und alſo von dem Prisma eine Pyramide wegfällt, die mit dem Prisma gleiche Grundfläche und Höhe hat.

IV. Trifft der durch $\alpha\beta$ gelegte Schnitt die Kante ef in ε, ſo iſt der abgeſchnittene Theil $\alpha\beta e\varepsilon$ eine vollſtändige Pyramide, und es iſt nun für $e\varepsilon = k'$

$$R = \tfrac{1}{3}g'k'\,\frac{\sin\varphi}{r};$$

$$\text{alſo } Q = P - R = Gk\,\frac{\sin\varphi}{r} - \tfrac{1}{3}\,g'k'\,\frac{\sin\varphi}{r},$$

und fällt nun hier überdies $\alpha\beta$ mit ab zuſammen, ſo daß $g' = G$ wird, ſo iſt

$$Q = (k - \tfrac{1}{3}k')\,G\,\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$= \left(\tfrac{2}{3}\,k + \frac{k - k'}{3}\right)\,G\,\frac{\sin\varphi}{r};$$

es iſt aber $k - k' = f\varepsilon$; ſetzt man alſo dieſe Linie $= c$, ſo wird

$$Q = \left(\frac{2k + c}{3}\right)\,G\,\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$= \left(\frac{(ad) + (bc) + (\varepsilon f)}{3}\right)\,G\,\frac{\sin\varphi}{r},$$

eine Formel, die mit der §. 73. gefundenen übereinſtimmt.

3. Der Körper ABCDabcd, Fig. 46a. wird in der Art begränzt, daß die beiden Grundflächen ABCD und abcd parallel laufen, und jede derſelben ein Paralleltrapez iſt; es ſind daher die vier Seitenflächen ebenfalls Paralleltrapeze, weil zwei parallele Ebenen von jeder dieſelben ſchneidenden Ebene in parallele Linien geſchnitten werden; man ſoll die Formel für den Kubikinhalt dieſes Körpers angeben.

Auflöſung. Es ſind die vier Kanten ab, cd, AB und CD parallel, und man kann daher den Körper als ein vierſeitiges abgeſtumpftes Prisma betrachten. Man ſetze den normalen Abſtand der parallelen Linien ab und cd von einander, alſo $mn = b$, den normalen Abſtand der Linien AB und CD, alſo $MN = B$, und den Abſtand der beiden parallelen Ebenen abcd und ABCD von einander $= h$, ſo wird der normale Querſchnitt, nämlich die ſchneidende Ebene, auf welcher die parallelen Kanten normal ſtehen, wenn man mN zieht, in zwei Dreiecke zerlegt, die beide eine Höhe $= h$ haben, und von welchen das eine b und das andere B zur Grundlinie hat. Dieſe beiden Dreiecke ſind die Grundflächen der beiden dreiſeitigen abgeſtumpften Prismen, aus welchen der zu berechnende Körper beſteht, und es iſt daher, wenn man den Inhalt dieſes Körpers $= X$ ſetzt,

$$X = \left(\frac{(ab)+(cd)+(AB)}{3}\right) \cdot \Delta mnN + \left(\frac{(AB)+(CD)+(cd)}{3}\right) \cdot \Delta MNm$$

$$= \left(\frac{(ab)+(cd)+(AB)}{3}\right) \cdot \frac{bh}{2} + \left(\frac{(AB)+(CD)+(cd)}{3}\right) \cdot \frac{Bh}{2}.$$

Setzt man nun (cd) = m, (ab) = n, (CD) = M und (AB) = N, ſo wird

$$X = \left(\frac{n+m+N}{3}\right) \frac{bh}{2} + \left(\frac{N+M+m}{3}\right) \frac{Bh}{2}$$

$$= \frac{h}{6} \left[(n+m)\, b + (N+M)\, B + Nb + mB\right],$$

und dieſes iſt der Ausdruck für den Inhalt dieſes Körpers.

4. Wenn in dem Körper, Fig. 46a., ab = cd und AB = CD, die beiden Grundflächen alſo Parallelogramme ſind, ſo wird derſelbe ein Obelisk genannt, und der Inhalt wird aus der obigen Formel gefunden, wenn man n = m und N = M ſetzt; es iſt alſo in dieſem Falle

$$X = \frac{h}{6} (2mb + 2MB + Mb + mB).$$

Nimmt man nun überdies noch m = M, ſo iſt der Körper ein vollſtändiges Prisma, deſſen Querſchnitt ein Paralleltrapez iſt, und es iſt

$$X = \frac{h}{6} (3mb + 3mB) = \frac{hm\,(b+B)}{2},$$

und für b = B wird dieſe Formel

$$X = hmb.$$

5. Aus einem Cylinder, deſſen Höhe = H iſt, und deſſen Grundfläche einen Radius = R hat, iſt ein abgeſtumpfter Kegel herausgenommen, der mit dem Cylinder die Höhe und die untere Grundfläche gemein hat, und den mten Theil des ganzen Cylinders beträgt; es ſoll der Radius der obern Fläche deſſelben beſtimmt werden.

Auflöſung. Setzt man den Radius der oberen Fläche des abgeſtumpften Kegels = x, ſo iſt der Inhalt deſſelben =

$$H \left(\frac{R^2 + Rx + x^2}{3}\right) \pi,$$

der Inhalt des ganzen Cylinders iſt $= HR^2\pi$, daher iſt die Gleichung

$$mH\left(\frac{R^2 + Rx + x^2}{3}\right)\pi = HR^2\pi$$

$$\text{alſo } R^2 + Rx + x^2 = \frac{3R^2}{m}$$

$$\text{und } x^2 + Rx + (\tfrac{1}{2}R)^2 = \frac{3R^2}{m} - \frac{3R^2}{4}$$

$$\text{daher } (x + \tfrac{1}{2}R)^2 = 3R^2 \cdot \frac{4-m}{4m};$$

folglich iſt $x = -\tfrac{1}{2}R + R\sqrt{3\left(\frac{4-m}{4m}\right)}$.

Uebrigens verſteht es ſich von ſelbſt, daß $m > 3$ nicht ſein kann, denn es wird bereits für $m = 3$ der Werth von $x = o$, weil ſchon ein Kegel von der Höhe H den dritten Theil des Cylinders beträgt. Setzt man $m = 2$, ſo wird

$$x = -\tfrac{1}{2}R + R\sqrt{\tfrac{3}{4}} = \frac{R}{2}(-1 + \sqrt{3}).$$

Soll x einen rationalen Werth erhalten, ſo muß man ſetzen

$$\frac{4-m}{4m} = 3z^2; \text{ alſo } m = \frac{4}{1 + 12z^2},$$

und es iſt alsdann

$$x = -\tfrac{1}{2}R + 3zR,$$

wo für $z = \tfrac{1}{4}$, $m = 1$ und $x = R$ wird ꝛc.

6. Es ſoll die Oberfläche eines normalen abgeſtumpf-ten Kegels berechnet werden.

Auflöſung. Setzt man, Fig. 39., die krumme Oberfläche des ganzen Kegels, von welchem ABm der Durchſchnitt iſt, $= F$, und die von dem oberen Theile, von welchem abm den Durchſchnitt bildet, $= f$, die des abgeſtumpften Kegels aber $= M$, ſo iſt

$$M = F - f.$$

Setzt man aber $An = R$; $ad = cn = \varrho$: alſo

$$Ac = R - \varrho \text{ und } Aa = a; \text{ ſo iſt}$$

$$An : Am = Ac : Aa$$

$$\text{oder } R : (Am) = R - \varrho : a$$

$$\text{alſo iſt } (Am) = \frac{Ra}{R-\varrho},$$

und eben ſo findet man $(am) = \frac{\varrho a}{R - \varrho}$.

Nun iſt $F = \frac{2R\pi \times (Am)}{2}$ und $f = \frac{2\varrho\pi \times (am)}{2}$

folglich iſt auch

$$F = \frac{2aR^2\pi}{2(R-\varrho)}$$

$$\text{und } f = \frac{2a\varrho^2\pi}{2(R-\varrho)}$$

$$\text{und daher } M = F - f = \frac{2a(R^2 - \varrho^2)\pi}{2(R-\varrho)};$$

nämlich es iſt

$$M = 2a\left(\frac{R+\varrho}{2}\right)\pi = 2\left(\frac{R+\varrho}{2}\right)a\pi.$$

Die krumme Oberfläche eines abgeſtumpften Kegels iſt alſo der krummen Oberfläche eines Cylinders gleich, der die Seite (Aa) des abgeſtumpften Kegels zur Höhe hat, und von welchem der Radius der Grundfläche, der halben Summe der Radien der beiden Grundflächen des abgeſtumpften Kegels gleich iſt.

7. Man kennt von einem abgeſtumpften Kegel die krumme Oberfläche = M, die Summe der beiden Grundflächen = Γ und die Seite Aa deſſelben = a; es ſoll hieraus der Kubikinhalt P berechnet werden.

Aufloſung. Es iſt nach No. 6.

$$a\left(\frac{R+\varrho}{2}\right)\pi = M$$

$$\text{alſo } R + \varrho = \frac{2M}{a\pi}$$

$$\text{folglich iſt } \varrho = \frac{2M}{a\pi} - R.$$

Nun iſt aber $(R^2 + \varrho^2)\pi = \Gamma$

$$\text{alſo } R^2 + \varrho^2 = \frac{\Gamma}{\pi}$$

folglich iſt auch, wenn man hier für ϱ den Werth ſetzt,

$$R^2 + \left(\frac{2M}{a\pi} - R\right)^2 = \frac{\Gamma}{\pi}$$

und $2R^2 - \frac{4M}{a\pi}R + \frac{4M^2}{a^2\pi^2} = \frac{\Gamma}{\pi}$;

hieraus aber erhält man

$$R^2 - \frac{2M}{a\pi}R + \frac{M^2}{a^2\pi^2} = \frac{\Gamma}{\pi} - \frac{M^2}{a^2\pi^2}$$

und es iſt daher $R - \frac{M}{a\pi} = \frac{\sqrt{[a^2\Gamma\pi - M^2]}}{a\pi}$,

folglich iſt $R = \frac{M + \sqrt{(a^2\Gamma\pi - M^2)}}{a\pi}$

und hieraus findet man

$$\varrho = \frac{M - \sqrt{(a^2\Gamma\pi - M^2)}}{a\pi}.$$

Hiernach iſt nun

$$R\varrho = \frac{M^2 - (a^2\Gamma\pi - M^2)}{a^2\pi^2},$$

nämlich es iſt

$$R\varrho = \frac{2M^2}{a^2\pi^2} - \frac{\Gamma}{\pi}.$$

Da nun $R^2 + \varrho^2 = \frac{\Gamma}{\pi}$

ſo iſt $R^2 + R\varrho + \varrho^2 = \frac{2M^2}{a^2\pi^2}$

alſo $(R^2 + R\varrho + \varrho^2)\,\pi = \frac{2M^2}{a^2\pi}$.

Ferner iſt $R - \varrho = \frac{2\sqrt{(a^2\Gamma\pi - M^2)}}{a\pi}$,

alſo $(R - \varrho)^2 = \frac{4\,(a^2\Gamma\pi - M^2)}{a^2\pi^2}$.

und da, Fig. 39., $(ac)^2 = (Aa)^2 - (Ac)^2$

alſo $h^2 = a^2 - (R - \varrho)^2$,

ſo iſt $h^2 = a^2 - \frac{4\,(a^2\Gamma\pi - M^2)}{a^2\pi^2}$

$$= \frac{a^4\pi^2 - 4a^2\Gamma\pi + M^2}{a^2\pi^2}$$

und daher $h = \frac{\sqrt{[a^4\pi^2 - 4a^2\Gamma\pi + M^2]}}{a\pi}$.

Da nun der Kubikinhalt des abgeſtumpften Kegels ausgedrückt wird durch die Formel

$$P = \frac{h(R^2 + R\varrho + \varrho^2)\pi}{3}$$

ſo iſt auch

$$P = \frac{2M^2 \sqrt{[\alpha^4\pi^2 - 4a^2\Gamma\pi + M^2]}}{3a^3\pi^2}$$

die geſuchte Formel.

8. Es iſt ABm, Fig. 39., der Axendurchſchnitt eines normalen Kegels; man ſoll ein Rechteck, deſſen Seiten ba und ac ſind, hineinzeichnen, das der Durchſchnitt eines normalen Cylinders iſt, deſſen Kubikinhalt dem mten Theil des Kegels gleich iſt.

Auflöſung. Man ſetze (An) = R, nm = H und (cn) = x, alſo (Ac) = R − x.

Da nun (An) : (nm) = (Ac) : (ca)

ſo iſt R : H = R − x : (ca)

$$\text{alſo } (ca) = \frac{H(R-x)}{R}.$$

Nun iſt aber der Inhalt des Kegels $= \frac{HR^2\pi}{3}$

und der des Cylinders $= (cn)^2 (ca) \pi$

$$= \frac{x^2 H (R-x)}{R}\pi;$$

folglich iſt die Gleichung, von welcher x abhängt,

$$\frac{x^2 H (R-x)\pi}{R} = \frac{HR^2\pi}{3m}$$

$$\text{oder es iſt } Rx^2 - x^3 = \frac{R^3}{3m}$$

eine kubiſche Gleichung, aus welcher der Werth von x berechnet werden muß.

9. Soll die Oberfläche des Cylinders der mte Theil ſein von der Oberfläche des Kegels, ſo ergiebt ſich die Gleichung auf folgende Art:

Es iſt für (mA) = A, die ganze Oberfläche des Kegels $= AR\pi + R^2\pi = R(A + R)\pi$

und die des Cylinders iſt =

$$2(cn)^2\pi + 2(cn)(ca)\pi$$

$$= 2x^2\pi + 2x\left(\frac{H(R-x)}{R}\right)\pi$$

und es iſt daher nach den Bedingungen der Aufgabe

$$2x^2 + 2x\left(\frac{H(R-x)}{R}\right) = \frac{R(A+R)}{m}$$

nämlich es iſt

$$(R-H)x^2 + HRx = \frac{R^2(A+R)}{2m}$$

also $x^2 + \left(\frac{HR}{R-H}\right)x + \left(\frac{HR}{2(R-H)}\right)^2 = \frac{H^2R^2}{4(R-H)^2} + \frac{R^2(A+R)}{2m(R-H)}$

und $\left(x + \frac{HR}{2(R-H)}\right)^2 = \frac{mH^2R^2 + 2(R-H)R^2(A+R)}{4m(R-H)^2}$

folglich iſt

$$x + \frac{HR}{2(R-H)} = \frac{R}{2(R-H)}\sqrt{\left[\frac{mH^2 + 2(R-H)(A+R)}{m}\right]}$$

und daher

$$x = \frac{R}{2(R-H)}\left[-H + \sqrt{\left(\frac{mH^2 + 2(R-H)(A+R)}{m}\right)}\right].$$

10. Von einer parallel zur Grundfläche abgeſtumpften Pyramide kennt man den Kubikinhalt = P, die Höhe = h und das Verhältniß der beiden Grundflächen g : G = 1 : m; es ſollen dieſe hieraus berechnet werden.

Aufloſung. Es iſt ganz allgemein

$$\left(\frac{G + \sqrt{Gg} + g}{3}\right) h = P$$

und daher auch, weil G = mg,

$$mg + g\sqrt{m} + g = \frac{3P}{h},$$

und daher iſt $g = \dfrac{3P}{h(m + \sqrt{m} + 1)}$

und $G = \dfrac{3mP}{h(m + \sqrt{m} + 1)}$.

11. Man kennt von einem parallel zur Grundfläche abgeſtumpften Kegel die Radien der beiden Grundflächen und die Höhe; es ſoll die Höhe eines vollſtändigen Kegels angegeben werden, der mit dem abgeſtumpften Kegel die eine Grundfläche gemein und mit demſelben gleichen Inhalt hat.

Aufloſung. Wird die geſuchte Höhe = x geſetzt, ſo findet, wenn die bekannte Bezeichnung beibehalten wird, die Gleichung ſtatt

$$xR^2\pi = \left(\frac{R^2 + R\varrho + \varrho^2}{3}\right) h\pi$$

und hieraus erhält man unmittelbar

$$x = \frac{(R^2 + R\varrho + \varrho^2)\, h}{3R^2}.$$

12. Man ſoll einen parallel abgeſtumpften Kegel durch eine zu der Grundfläche parallele Ebene in zwei Theile theilen, die ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.

Auflöſung. Es ſei ABba, Fig. 47., ein Axendurchſchnitt des abgeſtumpften Kegels, $AC = R$, $ac = \varrho$, $Cc = k$ und $\angle cCB = \varphi$, ſo iſt der Inhalt

$$\left(\frac{R^2 + R\varrho + \varrho^2}{3}\right) \pi \cdot k\ \frac{\sin\varphi}{r} = Q$$

bekannt, und wenn $\alpha\beta$ der Durchſchnitt der Theilungsfläche iſt, ſo kennt man, weil das Verhältniß der beiden Theile gegeben iſt, auch den Inhalt des Theils, von welchem $ab\beta\alpha$ der Durchſchnitt iſt $= q$ und es iſt der untere Theil $= Q - q$. Man ſetze den ganzen Kegel, deſſen Durchſchnitt ABm iſt, $= P$ und die fehlende Spitze, welche zu abm gehört, $= p$; der Radius $\gamma\alpha = \gamma\beta$ der theilenden Fläche ſei $= x$, ſo iſt, weil die zu ABm, $\alpha\beta$m und abm gehörigen Kegel einander ähnlich ſind,

$$p : p + q = (ca)^3 : (\gamma\alpha)^3 = \varrho^3 : x^3$$

$$\text{und } p : P = (ca)^3 : (CA)^3 := \varrho^3 : R^3$$

und es iſt daher auch

$$p : q = \varrho^3 : x^3 - \varrho^3$$

$$\text{und } p : P - p = \varrho^3 : R^3 - \varrho^3.$$

Aus dieſen beiden Proportionen aber folgt

$$q : P - p = x^3 - \varrho^3 : R^3 - \varrho^3$$

oder, weil $P - p = Q$,

$$q : Q = x^3 - \varrho^3 : R^3 - \varrho^3;$$

folglich iſt auch $q : Q - q = x^3 - \varrho^3 : R^3 - x^3$ und aus dieſer Proportion läßt ſich der Werth von x unmittelbar berechnen, wenn man die bekannten Werthe von q und Q benutzt, aber auch ohne dieſe Werthe vorher berechnen zu müſſen, läßt ſich der Werth von x finden: denn da das Verhältniß der beiden Theile, in welche der abgeſtumpfte Kegel

getheilt werden ſoll, gegeben ſind, ſo iſt, wenn der obere Theil zu dem untern wie m : n ſich verhalten ſoll,

$$q : Q - q = m : n$$

und es iſt daher auch

$$\frac{m : n = x^3 - \varrho^3 : R^3 - x^3}{}$$

$$\text{alſo } mR^3 - mx^3 = nx^3 - n\varrho^3$$

$$\text{und } mR^3 + n\varrho^3 = (m + n)\,x^3;$$

$$\text{folglich iſt } x^3 = \frac{mR^3 + n\varrho^3}{m + n}$$

$$\text{und } x = \sqrt[3]{\left(\frac{mR^3 + n\varrho^3}{m + n}\right)}.$$

Iſt aber einmal der Werth von x gefunden, ſo läßt ſich auch der von $c\gamma = y$ leicht berechnen:

$$\text{denn da } (c\gamma) : (\gamma\alpha - ca) = (cC) : (CA - ca)$$

$$\text{ſo iſt auch } y : x - \varrho = k : R - \varrho,$$

$$\text{alſo iſt } y = \frac{k\,(x - \varrho)}{R - \varrho}.$$

Anmerkung. Es iſt leicht einzuſehen, daß jede parallel zur Grundfläche abgeſtumpfte Pyramide auf eine ähnliche Art nach einem gegebenen Verhältniſſe getheilt werden kann, und es iſt die hierbei allgemein gültige Formel

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{mA^3 + na^3}{m + n}\right)}$$

wo A und a ein paar homologe Seiten in den parallelen Grundflächen ſind.

§. 76.

Uebungen.

1. Von einer abgeſtumpften Pyramide iſt die Grundfläche gegeben und zwei nebeneinander liegende Seitenflächen derſelben, wodurch der ganze Körper ſeiner Größe und Form nach beſtimmt iſt; es ſoll das Netz dieſes Körpers verzeichnet werden. Bemerkt muß hierbei werden, daß wenn, Fig. 30., ABCDE die Grundfläche, und AEgf und ABhk die gegebenen Seitenflächen ſind, nicht nur Ak = Af ſein muß, ſondern auch, wenn Ak und Bh verlängert werden, bis ſie ſich in a ſchneiden, und Af und Eg, bis ſie in e zuſammentreffen, ſo müſſen Aa und Ae gleiche Länge haben, wenn die gegebenen

Stücke

Stücke zu einer abgeſtumpften Pyramide gehören ſollen. Iſt nun überdies zu gleicher Zeit kh parallel zu AB und fg zu AB, ſo iſt durch die drei Figuren, nämlich durch die Grundfläche und die beiden Vierecke ABhk und AFgf eine parallel zur Grundfläche abgeſtumpfte Pyramide beſtimmt; wenn dieſes aber nicht ſtatt findet, ſo iſt die Pyramide ſchief abgeſtumpft.

2. Es iſt eine Pyramide gegeben, und der Neigungswinkel, den eine ſchneidende Ebene mit der Grundfläche bildet; man ſoll die Figur conſtruiren, welche die Grundfläche des abgeſchnittenen Theils dieſer Pyramide wird.

3. Von einem ſchief abgeſtumpften dreiſeitigen Prisma iſt die eine Grundfläche gegeben und zwei von den Paralleltrapezen, welche die Seitenflächen deſſelben bilden; es ſoll hieraus das vollſtändige Netz dieſes Körpers conſtruirt werden.

4. Die drei Kanten eines ſchief abgeſtumpften dreiſeitigen Prisma ſind a, b und c; die drei Seiten des Dreiecks, welches den normalen Querſchnitt des Prisma bildet, α, β und γ, ſo daß α der Kante a, β der Kante b und γ der Kante c gegenüberliegt; ferner iſt von der einen Grundfläche, die der Kante a gegenüberliegende Seite = A und die der Kante b gegenüberliegende = B gegeben: man ſoll hieraus die Formel angeben für die dritte Seite C dieſer Grundfläche, und für die drei Seiten A′, B′ und C′ der andern.

5. Wenn man von einem ſchief abgeſtumpften dreiſeitigen Prisma eine Seite der einen Grundfläche halbirt, den Halbirungspunkt mit der gegenüberliegenden Spitze des Dreiecks durch eine gerade Linie verbindet, von der Spitze des Dreiecks aus, auf dieſer Linie zwei Drittel derſelben abſchneidet, und durch den auf dieſe Weiſe beſtimmten Punkt eine Linie parallel zu den Kanten des Prisma zieht, bis ſie die zweite Grundfläche deſſelben trifft; ſo iſt dieſe Linie die mittlere arithmetiſche Proportionale zwiſchen den drei Kanten des Prisma. Sie iſt nämlich, wenn die Kanten mit a, b und c bezeichnet werden, $= \frac{a + b + c}{3}$.

6. Wenn die Grundfläche eines nſeitigen abgeſtumpften

Prisma regelmäßig iſt, und man zieht durch den Mittelpunkt dieſer Grundfläche eine Parallele zu den Kanten, bis ſie die obere Fläche trifft; ſo iſt dieſe Linie die mittlere arithmetiſche Proportionale zwiſchen den ſämmtlichen Kanten: es iſt dieſelbe nämlich $= \frac{a + b + c + d \ldots.}{n}$.

7. Es iſt ABm, Fig. 47., der Axendurchſchnitt eines normalen Kegels, und die Dreiecke ACα und BCb ſind die Durchſchnitte von zwei Kegelhufen, welche von dieſem Kegel weggeſchnitten ſind, ſo daß ein Körper übrig bleibt, von welchem mαCb der Durchſchnitt iſt. Dieſer Körper endigt daher unten bei C in einer Kante, deren Länge dem Durchmeſſer AB gleich iſt. Man ſoll eine Formel für den Kubikinhalt dieſes Körpers angeben.

8. Es iſt, §. 74. No. 6., die Formel für den Cylinderhuf angegeben, deſſen Durchſchnitt ced, Fig. 45., iſt; man ſoll auf gleiche Weiſe die Formel für den Huf angeben, von welchem deo der Durchſchnitt iſt, der alſo blos den Halbkreis zur Grundfläche hat.

9. Eine abgeſtumpfte Pyramide, deren beide Grundflächen G und g ſind, iſt ausgehöhlt, ſo daß inwendig ein abgeſtumpfter Kegel fehlt, deſſen Grundflächen mit denen der Pyramide zuſammenfallen, und von welchen die untere = K iſt; wie groß muß die obere = k ſein, wenn der übrig bleibende Körper der Hälfte der maſſiven abgeſtumpften Pyramide gleich ſein ſoll, und wie groß muß K wenigſtens ſein, wenn die Aufgabe möglich ſein ſoll?

10. Von einem abgeſtumpften Kegel kennt man die ganze Oberfläche = F, und die Radien der beiden Grundflächen R und ϱ; es ſoll hieraus die Formel für den Kubikinhalt dieſes Körpers abgeleitet werden.

11. Ein Prisma ſoll durch eine Ebene ſo geſchnitten werden, daß die durch dieſe Ebene gebildete Grundfläche des abgeſchnittenen Theils m mal ſo groß iſt, als die Grundfläche des Prisma ſelbſt; unter welchem Winkel muß die ſchneidende Ebene gegen die Grundfläche geneigt ſein, und wie groß muß der Neigungswinkel ſein, wenn die durch den Schnitt entſtehende Figur irgend einen beſtimmten Flächeninhalt haben ſoll?

12. Wenn Fig. 47., $\alpha\beta$ der Durchmeſſer und γC die Axe des möglichſt größten Cylinders iſt, der in den Kegel hineingezeichnet werden kann, von welchem ABm der Axendurchſchnitt iſt, ſo muß $(\alpha\beta) = \frac{2}{3}(AB)$ ſein, und es iſt daher $(\gamma C) = \frac{1}{3}(mC)$ und der Cylinder ſelbſt iſt in dieſem Falle $\frac{4}{9}$ des Kegels.

Siebenter Abſchnitt.

Von der Kugel und den Theilen derſelben.

§. 77.

Erklärungen.

1. Wenn ein Halbkreis um ſeinen Durchmeſſer ſich dreht, ſo erzeugt der Umfang deſſelben die Oberfläche einer Kugel, und es iſt der Mittelpunkt des erzeugenden Kreiſes zugleich der der Kugel, und eben ſo iſt der Radius des erzeugenden Kreiſes der Halbmeſſer der Kugel ꝛc.

2. Es geht hieraus hervor, daß der Mittelpunkt der Kugel überall gleichweit von der Oberfläche derſelben abſteht, denn es iſt dieſer Abſtand dem Radius des erzeugenden Kreiſes gleich.

3. Umgekehrt folgt, daß jeder Körper, für welchen ſich ein Punkt angeben läßt, der überall gleich weit von der Oberfläche deſſelben abſteht, eine Kugel ſein muß.

4. Wird eine Kugel von einer Ebene geſchnitten, die durch ihren Mittelpunkt geht, ſo iſt die ſchneidende Fläche ein Kreis, und da der Radius deſſelben zugleich der der Kugel iſt, ſo folgt, daß ein ſolcher Kreis dem erzeugenden Kreiſe der Kugel gleich ſein muß und es wird dieſer Kreis ein **größter Kreis** der Kugel genannt.

5. Alle größten Kreiſe der Kugel ſind gleich groß, und

ſie halbiren ſich gegenſeitig, weil die gemeinſchaftliche Sehne von je zwei derſelben durch den Mittelpunkt der Kugel geht, und alſo ein Durchmeſſer iſt.

6. Wird eine Kugel von einer Ebene geſchnitten, die nicht durch den Mittelpunkt derſelben geht, ſo wird dieſe Ebene doch immer auf der Oberfläche der Kugel von einem Kreiſe begränzt. Denn iſt adb, Fig 48., ein ſolcher Schnitt, und man zieht von dem Mittelpunkte C der Kugel eine Normale Cc auf dieſe Ebene, von dem Punkte c in der Ebene adb zwei Linien ca und cd an den Umfang des Schnittes und verbindet die Punkte a und d mit dem Mittelpunkte C der Kugel, ſo haben die beiden rechtwinkligen Dreiecke Cca und Ccd die eine Kathete Cc gemein, und die Hypotenuſen Ca und Cd ſind gleich groß, weil jede derſelben ein Halbmeſſer der Kugel iſt, folglich iſt auch ca = cd; und da dieſes immer gilt, wo man auch den Punkt d in dem Umfange des Schnittes annehmen mag, ſo folgt, daß c überall gleich weit von dieſem Umfange abſteht, und es iſt daher dieſer Umfang eine Kreislinie, die ihren Mittelpunkt in c hat.

7. Jeder, durch eine ſchneidende Ebene, die nicht durch den Mittelpunkt der Kugel geht, erzeugte Kreis auf der Oberfläche derſelben, wird ein **kleinerer Kreis** der Kugel genannt, und in Beziehung auf einen größern Kreis ADB zu dem er parallel iſt, nennt man ihn auch einen **Parallelkreis**.

8. Der Radius eines kleineren Kreiſes der Kugel iſt vollkommen beſtimmt, wenn man den Abſtand Cc der Kreisfläche von dem Mittelpunkte der Kugel kennt; denn ſetzt man dieſen Abſtand = d, den Radius der Kugel Ca = R und den Radius des kleineren Kreiſes ca = ϱ, ſo iſt

$$d^2 + \varrho^2 = R^2$$

alſo $\varrho = \sqrt{(R^2 - d^2)}$.

9. Hieraus folgt, daß ϱ deſto kleiner iſt, einen je größern Werth d hat: nämlich es iſt der Radius eines kleineren Kreiſes der Kugel deſto kleiner, je weiter er von dem Mittelpunkte der Kugel abſteht.

10. Errichtet man in dem Mittelpunkte C eines größten Kreiſes ADB eine Normale auf demſelben und verlängert ſie zu beiden Seiten, bis ſie die Oberfläche der Kugel in M und

N ſchneidet, ſo wird dieſe Linie MN eine Axe der Kugel, in Beziehung auf den größten Kreis ADB und auf alle zu demſelben gehörigen Parallelkreiſe wie adb, genannt, und die Punkte M und N ſind die Pole derſelben.

11. Jeder größte Kreis der Kugel AMBN, der die Axe MN eines andern ADB zum Durchmeſſer hat, ſteht normal auf dieſem letztern; denn da MC normal iſt auf ADB, ſo iſt auch jede durch dieſe Linie gelegte Ebene ebenfalls normal auf ADB. Zugleich geht hieraus hervor, daß MANB auch auf jedem Parallelkreiſe zu ADB normal ſein muß.

12. Wenn ein größter Kreis AMBN durch einen Pol M der Axe MN geht, ſo muß er auch durch den andern Pol N ebenfalls gehen. Denn da jeder größte Kreis durch den Mittelpunkt C der Kugel geht, ſo liegen die beiden Punkte M und C der Axe in der Ebene von AMBN, und daher muß die ganze Linie MCN in dieſer Ebene liegen.

13. Wenn zwei größte Kreiſe normal auf einem dritten ſtehen, ſo ſind ihre gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkte die Pole deſſelben; denn es ſteht die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie beider Kreisebenen normal auf der dritten, und zwar in dem Mittelpunkte derſelben: dieſe Durchſchnittslinie iſt daher die Axe und ihre Endpunkte ſind die Pole dieſes dritten Kreiſes.

14. Wenn AMB durch den Pol M des Kreiſes ADB geht, ſo iſt immer AM = MB = 90°.

15. Steht der Punkt M auf der Oberfläche der Kugel von zwei andern Punkten A und D, die nicht an den beiden Endpunkten eines und eben deſſelben Durchmeſſers liegen, 90° ab, ſo daß alſo der Bogen MA = MD = 90°, ſo iſt M der Pol des durch die Punkte A und D gelegten Kreiſes der Kugel. Denn zieht man MC, ſo iſt MCA = MCD = 90°, und daher MC normal auf der Ebene des Kreiſes ADB in dem Mittelpunkte C deſſelben, und es iſt daher MC die Axe, und alſo M ein Pol von ADB.

16. Wenn M der Pol iſt von ADB, ſo iſt der Bogen BD das Maaß des Winkels BMD, den zwei durch den Pol M gehende größte Kreiſe mit einander bilden, und weil die

Bogen bd und BD ähnlich ſind, ſo iſt auch bd das Maaß dieſes Winkels, nämlich es iſt

$$\angle BCD = \angle bdc = \angle BMD.$$

17. Der Bogen Aa des durch die Pole von ADB gehenden größten Kreiſes AMBN wird die **Breite** des Parallelkreiſes adb genannt.

18. Setzt man den Bogen Aa oder vielmehr den Winkel ACa = ∠Cac = β, ſo iſt

$$Ca : ac = r : \cos\beta$$

oder $R : \varrho = r : \cos\beta$

folglich iſt $\varrho = R\,\dfrac{\cos\beta}{r}$.

Der Radius eines Parallelkreiſes wird alſo erhalten, wenn man den Radius der Kugel mit dem Coſinus der Breite multiplicirt.

19. Da die Längen ähnlicher Bogen zweier Kreiſe zu einander ſich verhalten, wie ihre Radien, ſo iſt auch, wenn die Länge des Bogens BD = L und die von bd = l geſetzt wird,

$$l = L\,\frac{\cos\beta}{r}.$$

20. Setzt man die Fläche des größten Kreiſes = K und die eines Parallelkreiſes = k, ſo iſt

$K = R^2\pi$ und $k = \varrho^2\pi$

alſo $K : k = R^2 : \varrho^2$.

oder weil $\varrho = R\,\dfrac{\cos\beta}{r}$

$$K : k = R^2 : R^2\,\frac{\cos^2\beta}{r^2}$$

nämlich es iſt $K : k = r^2 : \cos^2\beta$.

Die Fläche eines größten Kreiſes verhält ſich alſo zu der eines Parallelkreiſes, wie das Quadrat des Sinustotus zu dem Quadrate des Coſinus der Breite.

§. 78.

Von dem Kubikinhalte der Kugel.

Zieht man in dem Quadrate ACBD, Fig. 49., aus C, als Mittelpunkt, mit der Seite CA des Quadrats den Vier-

telskreis AEB und die Diagonale CD, ſo beſchreibt, während das Quadrat ſich um AC als um eine Axe dreht, der Quadrant AEC eine Halbkugel und das Dreieck CAD beſchreibt einen umgekehrten normalen Kegel, während das Quadrat ſelbſt einen Cylinder beſchreibt. Dieſe drei Körper haben gleiche Grundflächen und gleiche Höhen, denn es iſt CB zu gleicher Zeit der Radius der Kugel, und alſo auch der Radius der Grundfläche der Halbkugel und der Radius der Grundfläche des Cylinders; AD = CB aber iſt der Radius der Grundfläche des Kegels, und AC iſt die gemeinſchaftliche Höhe von allen drei Körpern. Zieht man nun durch irgend einen Punkt a der Axe AC die Linie ad parallel zu CB, ſo beſchreibt während der Erzeugung der drei Körper die Linie ad einen zur Grundfläche parallelen Durchſchnitt des Cylinders, ae beſchreibt einen Durchſchnitt der Halbkugel und aδ einen des Kegels. Wird aber noch eine zweite Linie parallel zu ad gezogen, die ganz nahe bei derſelben liegt, ſo beſchreibt die von ad und dieſer zu derſelben parallelen Linie eingeſchloſſene Fläche, eine Cylinderſcheibe; die zwiſchen ae und der Parallele — die letztere bis an den Kreisbogen genommen — liegende Fläche beſchreibt eine Kugelſcheibe, und die zwiſchen aδ und dieſer Parallele liegende Fläche, in ſo fern die Linie nur bis an die Diagonale CD gezogen gedacht wird, beſchreibt eine Scheibe des Kegels, und es haben dieſe drei Scheiben gleiche Höhe, die mit d bezeichnet werden ſoll. Nun ſei

der Kubikinhalt des Cylinders = C, der Cylinderſcheibe = Cs
" " der Halbkugel = $\frac{1}{2}$G, der Kugelſcheibe = Gs
" " des Kegels = K, der Kegelſcheibe = Ks

ſo kann man, wenn d, nämlich die Höhe der drei Scheiben, ſehr klein angenommen wird, dieſe ſelbſt als drei flache Cylinder anſehen. Es iſt unter dieſer Vorausſetzung

$$Gs = (ae)^2 d\pi$$
$$Ks = (a\delta)^2 d\pi$$

alſo $Gs + Ks = [(ae)^2 + (a\delta)^2]\, d\pi$

und weil DAC ein rechtwinklig gleichſchenkliges Dreieck iſt, ſo iſt auch δaC gleichſchenklig und rechtwinklig, und daher aδ = aC; es iſt alſo auch

$$Gs + Ks = [(ae)^2 + (aC)^2]\,d\pi$$
$$= (Ce)^2\,d\pi$$

und weil $Ce = CB = ad$,

$$Gs + Ks = (ad)^2\,d\pi.$$

Nun iſt aber auch $Cs = (ad)^2\,d\pi$,

folglich iſt $Gs + Ks = Cs$.

Wo man ſonach auch a in der Axe AC annehmen mag, ſo iſt doch immer an dieſem Punkte die Cylinderſcheibe ſo groß, als die Kugelſcheibe und die Kegelſcheibe zuſammengenommen.

Nun nehme man an, es ſei die Axe $CA = n \cdot d$, ſo beſteht jeder der drei Körper aus n Scheiben, und es iſt, wenn man allgemein die rte Scheibe bezeichnet mit ${}^rCs$, ${}^rGs$ und ${}^rKs$,

$$\begin{aligned} {}^1Gs + {}^1Ks &= {}^1Cs \\ {}^2Gs + {}^2Ks &= {}^2Cs \\ {}^3Gs + {}^3Ks &= {}^3C \\ &\vdots \\ {}^rGs + {}^rKs &= {}^rCs \\ &\vdots \\ {}^nGs + {}^nKs &= {}^nCs \end{aligned}$$

und daher iſt auch, wenn man addirt,

$$({}^1Gs + {}^2Gs + {}^3Gs \cdots\cdots + {}^rGs \cdots\cdots {}^nGs) +$$
$$({}^1Ks + {}^2Ks + {}^3Ks \cdots\cdots + {}^rKs \cdots\cdots {}^nKs) =$$
$$({}^1Cs + {}^2Cs + {}^3Cs \cdots\cdots + {}^rCs \cdots\cdots {}^nCs);$$

nämlich es iſt, weil die n Kugelſcheiben zuſammengenommen die Halbkugel $= \frac{1}{2}G$, die n Kegelſcheiben den Kegel $= K$ und die n Cylinderſcheiben den Cylinder $= C$ bilden,

$$\tfrac{1}{2}G + K = C.$$

Für $CB = CA = R$ aber iſt

$$C = R^2\pi \times R = R^3\pi \text{ und } K = \frac{R^2\pi \times R}{3} = \tfrac{1}{3}R^3\pi$$

folglich iſt auch $\frac{1}{2}G + \frac{1}{3}R^3\pi = R^3\pi$

und daher $\frac{1}{2}G = \frac{2}{3}R^3\pi$

alſo $G = \frac{4}{3}R^3\pi$,

und dieſes iſt die Formel für den Kubikinhalt der Kugel.

Die Formel kann übrigens auch ausgedrückt werden

$$G = \tfrac{2}{3} \cdot R^2\pi \cdot 2R.$$

Da nun $R^2\pi$ die Fläche eines größten Kreiſes der Kugel iſt und 2R der Durchmeſſer derſelben, ſo ergiebt ſich hieraus die Regel: Die Kugel iſt $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, der einen größten Kreis der Kugel zur Grundfläche und den Durchmeſſer derſelben zur Höhe hat.

Zuſatz. Nimmt man auf der Oberfläche der Kugel drei nahe bei einander liegende Punkte, die nicht in einem und demſelben größten Kreiſe liegen, verbindet dieſe Punkte durch Bogen größter Kreiſe und zieht von denſelben Radien zu dem Mittelpunkte der Kugel, ſo beſtimmt ſich hierdurch eine dreiſeitige Pyramide, von welcher die drei gezogenen Radien die Seitenkanten ſind, und deren Grundfläche ein ſphäriſches Dreieck iſt. Die Höhe dieſer Pyramide iſt unbedingt dem Radius gleich, und es iſt daher der Inhalt derſelben, wenn man die Fläche des ſphäriſchen Dreiecks = f ſetzt, $= \frac{1}{3}Rf$. Nun kann man die Oberfläche der ganzen Kugel in ſphäriſche Dreiecke zerlegen, deren Anzahl = n ſein mag und deren Fläche der Reihe nach mit ${}^1f$, ${}^2f$, ${}^3f \ldots {}^nf$ bezeichnet werden ſoll; in dieſem Falle wird die ganze Kugel in n Pyramiden zerlegt. Bezeichnet man aber den Inhalt dieſer Pyramiden der Reihe nach mit ${}^1p$, ${}^2p$, ${}^3p \ldots\ldots {}^np$, ſo iſt

$$
\begin{aligned}
{}^1p &= \tfrac{1}{3}R \cdot {}^1f \\
{}^2p &= \tfrac{1}{3}R \cdot {}^2f \\
{}^3p &= \tfrac{1}{3}R \cdot {}^3f \\
&\vdots \\
{}^np &= \tfrac{1}{3}R \cdot {}^nf
\end{aligned}
$$

folglich iſt auch ${}^1p + {}^2p + {}^3p \ldots + {}^np =$

$$\tfrac{1}{3}R\,({}^1f + {}^2f + {}^3f \ldots + {}^nf).$$

Es iſt aber ${}^1p + {}^2p + {}^3p \ldots + {}^np = G$, und ${}^1f + {}^2f + {}^3f \ldots + {}^nf = F$, wenn die ganze Oberfläche der Kugel mit F bezeichnet wird; folglich iſt auch

$$G = \tfrac{1}{3}RF$$

und weil $G = \frac{4}{3}R^3\pi$

ſo iſt $\frac{4}{3}R^3\pi = \frac{1}{3}RF$

und daher $4R^2\pi = F$

die Formel für die Oberfläche der ganzen Kugel, und es giebt

dieſes die Regel: Die Oberfläche der Kugel iſt 4mal ſo groß, als die Fläche eines größten Kreiſes derſelben; eine Regel, die auch unabhängig von dem Kubikinhalte der Kugel gefunden werden kann, wie in dem folgenden §. gezeigt wird.

§. 79.

Von der Oberfläche der Kugel.

Wenn der Viertelskreis ACB, Fig. 50., um AC als um eine Axe ſich dreht, ſo wird die Halbkugel erzeugt, und die Fläche mnbc, von welcher die Linien mc und nb parallel zu CB ſind, beſchreibt eine Kugelſcheibe, der Bogen cb aber fällt mit der geraden Linie cb zuſammen, wenn die Höhe der Scheibe mn = d ſehr klein iſt. Die Scheibe ſelbſt wird alſo unter dieſen Umſtänden ein abgeſtumpfter Kegel. Nun iſt nach §. 75. No. 6. die krumme Oberfläche eines abgeſtumpften Kegels $= 2\left(\frac{R + \varrho}{2}\right) a\pi$, und es iſt daher hier, wenn die krumme Oberfläche der Kugelſcheibe mit f bezeichnet wird,

$$f = 2\left(\frac{mc + nb}{2}\right) \cdot (bc) \cdot \pi.$$

Halbirt man aber mn in a, und zieht ae parallel zu nb und mc, ſo iſt, weil bc als eine gerade Linie angenommen werden kann, $ae = \left(\frac{mc + nb}{2}\right)$, und es iſt daher auch

$$f = 2\,(ae)\,(bc)\,\pi.$$

Zieht man aber Ce und cδ parallel zu AC, ſo ſind die Dreiecke aCe und bdc ähnlich, weil Ce normal ſteht auf bc, folglich iſt

$$\frac{ae : Ce = cd : bc}{\text{alſo } (ae) \times (bc) = (Ce) \times (cd),}$$

und es iſt ſonach

$$f = 2\,(Ce)\,(cd)\,\pi,$$

oder, da Ce = R und cd = mn = d, ſo iſt

$$f = 2Rd\pi.$$

Beſteht nun die Axe AC aus n Theilen, von welchen jeder = mn = d, ſo beſteht auch die Halbkugel aus n ſolchen Scheiben, und es iſt die krumme Oberfläche einer jeden derſelben = 2Rdπ. Die krummen Oberflächen aller dieſer

Scheiben zuſammengenommen, geben die krumme Oberfläche der Halbkugel, und wird dieſe mit $\frac{1}{2}F$ bezeichnet, ſo iſt hiernach $\frac{1}{2}F = n \times 2Rd\pi$

$$= 2R \cdot nd\pi = 2R^2\pi$$

weil $nd = (AC) = R$ iſt;

und es iſt daher $F = 4R^2\pi$

eine Formel für die Oberfläche der Kugel, die mit der in dem Zuſatze zu dem vorigen §. abgeleiteten übereinſtimmt.

Zuſatz. Auf dieſelbe Weiſe wie in dem Zuſatze zu dem vorigen §. aus der Formel für den Kubikinhalt einer Kugel, die für die Oberfläche derſelben abgeleitet worden iſt; eben ſo läßt ſich auch umgekehrt aus der Formel für die Oberfläche, die für den Kubikinhalt finden. In dem gegenwärtigen §. iſt, unabhängig von dem Kubikinhalte, gefunden worden

$$F = 4R^2\pi,$$

und nach dem Zuſatze §. 78. iſt

$$G = \tfrac{1}{3}R \cdot F,$$

es iſt alſo auch

$$G = \tfrac{1}{3}R \cdot 4R^2\pi = \frac{4R^3\pi}{3}.$$

§. 80.

Von der krummen Oberfläche einzelner Theile der Kugel.

1. Es wird die krumme Oberfläche f einer Kugelſcheibe von der Höhe d ausgedrückt durch die Formel

$$f = 2Rd\pi;$$

iſt nun Fig. 50. $Ca = a = m \cdot d$, ſo beſteht der aus BCae erzeugte Körper, den man eine Kugelzone nennt, aus m Scheiben, deren krumme Oberflächen zuſammengenommen die der Zone bilden, und es iſt daher auch die krumme Oberfläche F einer ſolchen Zone

$$F = mf = m \cdot 2Rd\pi = 2R \cdot md\pi,$$

oder, weil $m \cdot d = a$, ſo iſt

$$F = 3R\pi \times a;$$

die krumme Oberfläche einer ſolchen Zone iſt alſo der eines Cylinders gleich, welcher mit der Zone gleiche Höhe hat, und deſſen Grundfläche ein größter Kreis der Kugel iſt.

2. Für $c\alpha = A$ iſt die krumme Oberfläche der durch $BC\alpha\beta$ erzeugten Zone

$$= 2R\pi \times A,$$

und die krumme Oberfläche der Zone, welche durch BCac erzeugt wird, iſt

$$= 2R\pi \times a;$$

folglich iſt die krumme Oberfläche der Zone, die erzeugt wird durch $ac\beta\alpha =$

$$2R\pi \times (A - a),$$

und für $A - a = (C\alpha - Ca) = a\alpha = h$ wird dieſe Formel, wenn man die krumme Oberfläche mit Zf bezeichnet,

$$Zf = 2R\pi \times h;$$

nämlich es iſt die krumme Oberfläche einer jeden zwiſchen irgend zwei Parallelkreiſen liegenden Zone der eines Cylinders gleich, welcher einen größten Kreis der Kugel zur Grundfläche hat, und deſſen Höhe der der Zone gleich iſt.

3. Da die krumme Oberfläche der Halbkugel $= 2R^2\pi$, und der durch BCac erzeugten Zone $= 2R\pi \times a$ iſt, ſo erhält man für die krumme Oberfläche des durch Aac erzeugten Kugelabſchnitts die Formel

$$F = 2R^2\pi - 2R\pi \times a = 2R\pi\,(R - a);$$

es iſt aber $R - a = CA - Ca = aA$ die des Abſchnitts; folglich iſt auch, wenn die Höhe des Abſchnitts mit h bezeichnet wird,

$$F = 2R\pi \times h.$$

Die für die krumme Oberfläche einer Kugelzone angegebene Formel hat alſo auch für jeden Kugelabſchnitt Gültigkeit.

4. Wenn MBN und MDN, Fig. 48., größte Kreiſe der Kugel ſind, ſo ſind dieſe Bogen Halbkreiſe, und die zwiſchen denſelben liegende Fläche iſt die krumme Oberfläche eines Ausſchnittes, die unbedingt dem Bogen BD proportionirt ſein muß. Iſt nun $BD = \angle BCD = \varphi$, ſo iſt auch die Fläche $MBND = \frac{\varphi}{360}$ von der Oberfläche der ganzen Kugel, und es iſt daher die krumme Oberfläche eines Ausſchnittes

$$F = \frac{\varphi}{360} \cdot 4R^2\pi = \frac{\varphi}{90} \cdot R^2\pi.$$

5. Nun ſei adb ein Parallelkreis zu ADB, ſo iſt das

Viereck BDdb der eben ſovielte Theil von der krummen Oberfläche der Zone, der ſovielte Theil der ganze Ausſchnitt von der Oberfläche der Kugel ſelbſt iſt, und daher iſt, wenn die Höhe der Zone = h geſetzt wird,

$$BDdb = \frac{\varphi}{360} \cdot 2R\pi \cdot h,$$

und es iſt eben ſo auch für die Höhe des Abſchnitts adbM = h′ die Fläche von

$$Mdb = \frac{\varphi}{360} \cdot 2R\pi \cdot h'.$$

6. Wenn der Parallelkreis adb, Fig. 48., um ſeinen Durchmeſſer ab ſich dreht, ſo bleibt doch immer der durch denſelben beſtimmte Abſchnitt der Kugel derſelbe, daher auch die krumme Oberfläche deſſelben und daher auch die der Zone, welche zwiſchen adb und ADB liegt. Für den Fall, daß beide parallel laufen, (wobei es übrigens einerlei iſt, ob ADB ein größter oder ein kleinerer Kreis der Kugel iſt) iſt die krumme Fläche der Zone = $2R\pi \times h$, und es iſt $h = (Cc)$; alſo gilt dieſe Formel auch in dem Falle, wenn adb und ADB nicht parallel laufen, wenn ſie nur gegenſeitig ſich nicht ſchneiden. Der Theil der Oberfläche einer Kugel, welcher zwiſchen zwei ſich nicht ſchneidenden Kreiſen liegt, wird alſo ausgedrückt durch $h \times 2R\pi$, und es iſt hier immer h dem Abſtande der Mittelpunkte beider Kreiſe von einander gleich.

7. Iſt AMD, Fig. 48., irgend ein, von Bogen größter Kreiſe eingeſchloſſenes ſphäriſches Dreieck, ſo läßt ſich die Fläche deſſelben auf folgende Art beſtimmen: Verlängert man die Bogen DA und DM auf der Oberfläche der Kugel, bis ſie ſich das zweite Mal ſchneiden, ſo wird ADM zu einem Kreisausſchnitte ergänzt, und die Ergänzung iſt, wie leicht einzuſehen, ein Dreieck, welches dem Dreiecke BDN gleich iſt. Setzt man daher in dem ſphäriſchen Dreiecke ADM den Winkel bei A = a, den bei M = b und den bei D = c, ſo iſt

$$\Delta\, ADM + \Delta\, BDN = \frac{c}{360} \cdot 4R^2\pi$$

$$\Delta\, ADM + \Delta\, ADN = \frac{b}{360} \cdot 4R^2\pi$$

$$\Delta\, ADM + \Delta\, BDM = \frac{a}{360} \cdot 4R^2\pi;$$

folglich iſt

$$3 \cdot \Delta\, ADM + \Delta\, BDN + \Delta\, ADN + \Delta\, BDM = \frac{(a+b+c) \cdot 4R^2\pi}{360}$$

da nun

$$\Delta\, ADM + \Delta\, BDN + \Delta\, ADN + \Delta\, BDM = 2R^2\pi,$$

weil dieſe vier Dreiecke zuſammengenommen die Halbkugel ausmachen, ſo iſt auch

$$2\, \Delta\, ADM = \left(\frac{a+b+c}{360}\right) \cdot 4R^2\pi - 2R^2\pi,$$

und daher $\Delta\, ADM = \left(\frac{a+b+c}{180}\right) R^2\pi - R^2\pi;$

nämlich es iſt

$$\Delta\, ADM = \left(\frac{a+b+c-180^0}{180}\right) R^2\pi;$$

die Fläche eines ſphäriſchen Dreiecks wird alſo gefunden, wenn man 180⁰ von der Summe der drei Winkel des Dreiecks abzieht, den Reſt durch 180⁰ theilt, und mit dem Quotienten die Fläche eines größten Kreiſes der Kugel multiplicirt.

§. 81.

Von dem Kugelabſchnitte.

Wärend ACBD, Fig. 49., um AC ſich dreht, erzeugt der halbe Kreisabſchnitt Aae einen Abſchnitt der Kugel, deſſen Höhe Aa iſt, und zu welchem ae als Radius der Grundfläche gehört. Sind die beiden Größen Aa = h und ae = ϱ gegeben, ſo iſt der Abſchnitt dadurch ſeiner Größe und Form nach beſtimmt, und es läßt ſich daher durch dieſe Größen auch ſowohl der Kubikinhalt, als die ganze Oberfläche des Abſchnitts ausdrücken. Die entſprechenden Formeln können auf folgende Art abgeleitet werden:

Es iſt, wenn man die §. 78. gebrauchte Bezeichnung beibehält, ganz allgemein

$$Gs + Ks = Cs.$$

Beſteht nun Aa = h aus p Theilen, von welchen jeder = d iſt, alſo $h = p \cdot \bar{d}$, ſo erhält man von a bis A auch p Scheiben, ſowohl der Kugel als des Kegels und des Cylin-

ders, und es iſt nun auch, wenn dieſe Scheiben der Reihe nach mit 1, 2, 3....p bezeichnet werden;

$$({}^1Gs + {}^2Gs \cdots + {}^pGs) + ({}^1Ks + {}^2Ks \cdots + {}^pKs)$$
$$= {}^1Cs + {}^2Cs \cdots + {}^pCs.$$

Es geben aber die Kugelſcheiben zuſammengenommen den Kugelabſchnitt, nämlich es iſt, wenn man den Inhalt des Abſchnitts $= A$ ſetzt,

$${}^1Gs + {}^2Gs \cdots + {}^pGs = A.$$

Eben ſo geben die Kegelſcheiben zuſammengenommen den durch das Paralleltrapez $DAa\delta$ erzeugten abgeſtumpften Kegel $= k$, es iſt alſo

$${}^1Ks + {}^2Ks \cdots + {}^pKs = k$$

und auf gleiche Weiſe iſt

$${}^1Cs + {}^2Cs \cdots + {}^pCs = c$$

wenn c den durch $DAad$ erzeugten Cylinder ausdrückt. Folglich hat man die Gleichung

$$A + k = c.$$

Es iſt aber $c = (ad)^2\pi \cdot (Aa)$

$$\text{und } k = \left(\frac{(AD)^2 + (AD)\,(a\delta) + (a\delta)^2}{3}\right)\pi \cdot (Aa)$$

nämlich es iſt, wenn man den Radius der Kugel $ad = AD = AC = R$ ſetzt, und alſo

$$a\delta = aC = AC - Aa = R - h,$$
$$c = R^2\pi \cdot h$$
$$\text{und } k = \left(\frac{R^2 + R\,(R - h) + (R - h)^2}{3}\right)\pi \cdot h\ .$$

folglich iſt auch, wenn man in der Gleichung $A + k = c$ für k und c dieſe Werthe ſetzt,

$$A + \left(\frac{R^2 + R\,(R - h) + (R - h)^2}{3}\right)h\pi = R^2h\pi$$

und alſo auch

$$A + \left(\frac{3R^2 - 3Rh + h^2}{3}\right)h\pi = R^2h\pi$$

und hieraus erhält man endlich

$$A = \left(\frac{3Rh - h^2}{3}\right)h\pi$$

nämlich es iſt $A = (Rh^2 - \frac{1}{3}h^3)\,\pi = (R - \frac{1}{3}h)\,h^2\pi$ eine Formel für den Kubikinhalt des Abſchnitts durch den Radius der Kugel und die Höhe des Abſchnitts ausgedrückt. Nun iſt aber

$$Aa : ae = ae : 2R - (Aa)$$

alſo, weil ae als Radius der Grundfläche des Abſchnitts mit ϱ bezeichnet wird,

$$h : \varrho = \varrho : 2R - h$$

$$\text{und daher } \varrho^2 = h\,(2R - h) \text{ und } R = \frac{\varrho^2 + h^2}{2h}.$$

Es iſt alſo auch, wenn man dieſen Werth für R ſetzt

$$A = \left[\left(\frac{\varrho^2 + h^2}{2}\right) h - \tfrac{1}{3}h^3\right]\pi$$

$$\text{nämlich es iſt } A = [\tfrac{1}{2}\varrho^2 h + \tfrac{1}{6}\,h^3]\,\pi,$$

eine Formel für den Kubikinhalt des Abſchnitts, in welchem nur die Höhe und der Radius der Grundfläche deſſelben vorkommen.

Auch die ganze Oberfläche des Abſchnitts kann durch dieſe beiden Größen ausgedrückt werden, denn es iſt die krumme Oberfläche deſſelben, nach §. 80. No. 3., $= h \times 2R\pi$ und die Grundfläche iſt $= \varrho^2\pi$, folglich iſt, wenn die ganze Oberfläche des Abſchnitts $= F$ geſetzt wird,

$$F = h \times 2R\pi + \varrho^2\pi$$

$$\text{und weil } 2Rh = \varrho^2 + h^2, \text{ ſo iſt}$$

$$F = (\varrho^2 + h^2)\,\pi + \varrho^2\pi$$
$$= (2\varrho^2 + h^2)\,\pi.$$

Zuſatz. Zieht man die Sehne $Ae = S$, ſo iſt

$$S^2 = \varrho^2 + h^2 \text{ und es iſt daher auch}$$
$$F = (S^2 + h^2)\,\pi.$$

Die ganze Oberfläche eines Kugelabſchnitts iſt daher einer Kreisfläche gleich, deren Radius die Hypotenuſe eines rechtwinkligen Dreiecks iſt, von welchem Ae und ae die Katheten ſind.

Da übrigens die krumme Oberfläche des Abſchnitts $= 2R\pi \cdot h$ iſt, und $2Rh = S^2 = (Ae)^2$, ſo folgt, daß dieſelbe auch ausgedrückt werden kann durch $S^2\pi$.

§. 82.

Aufgabe.

Es iſt der Kubikinhalt eines Kugelabſchnittes gegeben $= A$ und das Verhältniß der Höhe deſſelben zu dem Radius ſeiner Grundfläche; man ſoll dieſe hieraus ſelbſt, ſo wie den Radius der ganzen Kugel berechnen?

Auflöſung. Nach §. 81. iſt

$$(\tfrac{1}{2}\varrho^2 h + \tfrac{1}{6}h^3)\,\pi = A.$$

Da nun das Verhältniß von h und ϱ gegeben iſt, ſo kann man ſetzen $\varrho = mh$ und es iſt alsdann m eine bekannte Größe, die Gleichung aber wird für dieſen Werth von ϱ

$$(\tfrac{1}{2}m^2h^3 + \tfrac{1}{6}h^3)\,\pi = A$$

$$\text{alſo } (\tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{6})\,h^3 = \frac{A}{\pi};$$

$$\text{und } h^3 = \frac{A}{(\tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{6})\,\pi}$$

$$\text{daher iſt } h = \sqrt[3]{\left[\frac{A}{(\tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{6})\,\pi}\right]}$$

und da $\varrho = mh$, ſo iſt

$$\varrho = m\sqrt[3]{\left[\frac{A}{(\tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{6})\,\pi}\right]}$$

$$\text{und weil } \underline{h : \varrho = \varrho : 2R - h}$$

$$\text{alſo } 2R - h = \frac{\varrho^2}{h}$$

$$\text{und } 2R = \frac{\varrho^2 + h^2}{h} = \frac{m^2h^2 + h^2}{h} = (m^2 + 1)\,h$$

$$\text{ſo iſt } R = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)h = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)\sqrt[3]{\left[\frac{A}{(\tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{6})\,\pi}\right]}$$

und es ſind alſo die drei Größen h, ϱ und R beſtimmt.

Zuſatz 1. Kennt man den Inhalt des Abſchnittes $= A$ und die Höhe deſſelben $= h$, ſo läßt ſich der Radius der Grundfläche leicht beſtimmen, denn da

$$(\tfrac{1}{2}\varrho^2 h + \tfrac{1}{6}h^3)\,\pi = A$$

ſo iſt auch, wenn man ſetzt $6A = P^2 h\pi$, wo der Werth von P durch die Gleichung $P^2 = \dfrac{6A}{h\pi}$ beſtimmt iſt,

$$\tfrac{1}{2}\varrho^2 + \tfrac{1}{6}h^2 = \frac{P^2}{6}$$

$$\text{alſo } 3\varrho^2 = P^2 - h^2$$

$$\text{und daher } \varrho = \sqrt{\left[\frac{(P+h)(P-h)}{3}\right]}.$$

Zuſatz 2. Die 5 Größen R, h, ϱ, m und A hängen ſo von einander ab, daß, wenn zwei derſelben gegeben ſind, dadurch die drei übrigen einen beſtimmten Werth erhalten, welcher mittelſt der in dem gegenwärtigen §. aufgeſtellten Gleichungen ſich berechnen läßt; dieſe Gleichungen ſind zum Theil vom dritten Grade, was indeſſen die Auflöſung nur erſchwert, dieſelbe aber keineswegs unausführbar macht.

Zuſatz 3. Eine ganz einfache Formel wird in dem Falle erhalten, wenn A und h gegeben ſind und daraus der Radius der Kugel gefunden werden ſoll; denn da

$$\left(\frac{3Rh - h^2}{3}\right) h\pi = A,$$

$$\text{ſo iſt } 3R - h = \frac{3A}{h^2\pi} \text{ und } R = \frac{A}{h^2\pi} + \tfrac{1}{3}h.$$

§. 83.

Das Theilen der Kugel nach einem gegebenen Verhältniſſe.

Aufgabe. Man ſoll eine gegebene Kugel durch eine Ebene in zwei Theile theilen, die ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.

Auflöſung. Soll der kleinere der beiden Theile zu der ganzen Kugel ſich verhalten wie 1 : m, ſoll er alſo der mte Theil der ganzen Kugel ſein, wo alſo immer m > 2 ſein muß, ſo nehme man für den Sinustotus = 1 den dritten Theil des Winkels, von welchem $1 - \frac{2}{m}$ der Sinus iſt; mit dem Sinus dieſes dritten Theils multiplicire man den Durchmeſſer der Kugel und ziehe das Product von dem Radius derſelben ab, ſo giebt der Reſt die Höhe des Abſchnitts, deſſen Inhalt dem mten Theile der ganzen Kugel gleich iſt: wird jenes Produkt aber zu dem Radius der Kugel addirt, ſo bekommt man die Höhe des Abſchnitts des größern der beiden Theile, in welche die Kugel getheilt werden ſoll.

Beweis. Für den Kubikinhalt des einen Abſchnittes = A

findet, nach §. 81., zwiſchen dieſer Größe, der Höhe des Abſchnitts $= h$ und dem Radius der Kugel $= R$ die Gleichung ſtatt

$$A = \left(\frac{3Rh - h^2}{3}\right) h\pi;$$

der Inhalt der ganzen Kugel iſt $= \frac{4R^3\pi}{3}$ und da der kleinere Abſchnitt den mten Theil derſelben betragen ſoll, ſo muß ſein

$$A = \frac{4R^3\pi}{3m}.$$

Die obige Gleichung wird alſo, wenn man dieſen Werth für A ſetzt,

$$\frac{4R^3}{m} = (3Rh - h^2)\, h,$$

und es iſt daher $h^3 - 3Rh^2 = -\frac{4R^3}{m}$.

Setzt man aber hier $h = z + R$.

ſo iſt $h^3 = z^3 + 3Rz^2 + 3R^2z + R^3$

$-3Rh^2 = \quad -3Rz^2 - 6R^2z - 3R^3$

alſo $z^3 - 3R^2z - 2R^3 = -\frac{4R^3}{m}$

nämlich es iſt $z^3 - 3R^2z = \left(2 - \frac{4}{m}\right) R^3 = 2\left(1 - \frac{2}{m}\right) R^3$

wo $1 - \frac{2}{m}$ einen poſitiven Werth < 1 haben muß, weil vermöge der Bedingungen der Aufgabe $m > 2$ iſt. Der Werth von z iſt alſo durch die kubiſche Gleichung beſtimmt

$$z^3 - 3R^2z - 2\left(1 - \frac{2}{m}\right) R^3 = 0;$$

für irgend einen Winkel φ iſt

$\sin 3\varphi = \sin(2\varphi + \varphi) = \sin 2\varphi \cos\varphi + \cos 2\varphi \sin\varphi$

nämlich es iſt

$$\begin{aligned}\sin 3\varphi &= 2\sin\varphi \cos\varphi \cdot \cos\varphi + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\sin\varphi\\ &= 3\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^3\varphi\\ &= 3\sin\varphi(1 - \sin^2\varphi) - \sin^3\varphi\\ &= 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi\end{aligned}$$

und dieſes giebt die Gleichung

$$\sin^3\varphi - \tfrac{3}{4}\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 3\varphi = 0.$$

Wird aber in der oben gefundenen Gleichung

$$z^3 - 3R^2z - 2\left(1 - \frac{2}{m}\right)R^3 = 0$$

$z = p \sin\varphi$ geſetzt, ſo wird dieſelbe

$$p^3 \sin^3\varphi - 3pR^2 \sin\varphi - 2\left(1 - \frac{2}{m}\right) R^3 = 0,$$

und daher iſt hier

$$\sin^3\varphi - \frac{3R^2}{p^2} \sin\varphi - 2\left(1 - \frac{2}{m}\right)\frac{R^3}{p^3} = 0.$$

Soll nun dieſe Gleichung mit

$$\sin^3\varphi - \tfrac{3}{4}\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 3\varphi = 0$$

demſelben Werthe von φ entſprechen, ſo muß ſein

$$\frac{3R^2}{p^2} = \tfrac{3}{4} \text{ und } - 2\left(1 - \frac{2}{m}\right)\frac{R^3}{p^3} = \tfrac{1}{4}\sin 3\varphi.$$

Die erſte dieſer beiden Gleichungen giebt

$$4R^2 = p^2, \text{ alſo } \pm 2R = p$$

und ſetzt man nun $-2R$ für p in der zweiten Gleichung, ſo wird dieſe

$$\tfrac{1}{4}\sin 3\varphi = + 2\left(1 - \frac{2}{m}\right)\frac{R^3}{8R^3}$$

$$\text{alſo } \sin 3\varphi = + \left(1 - \frac{2}{m}\right).$$

$$\text{Man erhält alſo für } \sin 3\varphi = 1 - \frac{2}{m}$$

$$z = p \sin\varphi = - 2R \sin\varphi.$$

Da nun $h = z + R$, ſo iſt auch

$$h = R - 2R \sin\varphi = R\,(1 - 2\sin\varphi)$$

was bewieſen werden ſollte.

Beiſpiele. 1. Soll die Kugel in zwei Theile getheilt werden, die ſich zu einander verhalten, wie 1 : 2, ſo muß der kleinere der beiden Theile $\frac{1}{3}$ der ganzen Kugel ſein, und es iſt daher für dieſen Fall $m = 3$

$$\text{und } \sin 3\varphi = 1 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3} = 0{,}3333333$$

$$\text{alſo } 3\varphi = 19^0\ 28'\ 16{,}4'' \text{ und } \varphi = 6^0\ 29'\ 25{,}5''$$

folglich iſt $h = R\,(1 - 2\sin\varphi) = R\,(1 - 2\sin 6^0\ 29'\ 25{,}5'')$

und weil $\sin 6^0\ 29'\ 25{,}5'' = 0{,}113$, ſo iſt,

$$h = R\,(1 - 0{,}226) = 0{,}774 \cdot R.$$

Von der Richtigkeit dieſes Werthes kann man ſich leicht auf folgende Art überzeugen: Es iſt allgemein

$$A = \left(\frac{3Rh - h^2}{3}\right) h\pi$$
$$= (R - \tfrac{1}{3}h)\, h^2\pi$$

alſo hier $A = (R - 0{,}258\ R) \cdot 0{,}744^2 \cdot R^2\pi$
$= (1 - 0{,}258) \cdot 0{,}744^2 \cdot R^3\pi = 0{,}742 \cdot 0{,}744^2\ R^3\pi$
$= 0{,}444\ R^3\pi.$

Da aber der Inhalt der ganzen Kugel $= \frac{4R^3\pi}{3}$ iſt, ſo beträgt der dritte Theil derſelben $\frac{4}{9} \cdot R^3\pi = 0{,}444 \cdots R^3 \cdot \pi$.

2. Will man die Kugel in zwei Theile theilen, die ſich wie 1 : 3 verhalten, ſoll alſo der kleinere Theil $= \frac{1}{4}$ der ganzen Kugel ſein, ſo muß $m = 4$ genommen werden;

alſo $\sin 3\varphi = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$;
es iſt alſo $3\varphi = 30^0$ und daher $\varphi = 10^0$
und $h = R\ (1 - 2 \sin \varphi) = R\ (1 - 2 \sin 10^0)$
oder $h = R\ (1 - 2 \cdot 0{,}1736482) = R \cdot 0{,}6527$.

3. Will man ein Stück abſchneiden, welches $\frac{2}{5}$ der ganzen Kugel iſt, ſo muß $m = \frac{5}{2}$ angenommen werden, und es iſt alsdann

$\sin 3\varphi = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2$
und daher $3\varphi = 11^0\ 32'\ 13''$, alſo $\varphi = 3^0\ 50'\ 44\frac{1}{3}''$
und da $\sin 3^0\ 50'\ 44\frac{1}{3}'' = 0{,}067$, ſo iſt in dieſem Falle
$h = R\ (1 - 2 \cdot 0{,}067) = R \cdot 0{,}866.$

4. Soll der abzuſchneidende Theil $\frac{5}{32}$ der ganzen Kugel betragen, ſo muß $m = \frac{32}{5}$ angenommen werden, alſo wird

$\sin 3\varphi = 1 - \frac{2}{\frac{32}{5}} = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$.
Nun iſt $\sin^3 \varphi - \frac{3}{4} \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 3\varphi = 0$
alſo hier $\sin^3 \varphi - \frac{3}{4} \sin \varphi + \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{16} = 0$
und $64 \sin^3 \varphi - 48 \sin \varphi + 11 = 0$
und für $4 \sin \varphi = x$ wird
$x^3 - 12x + 11 = 0$

eine Gleichung, von welcher $x = 1$ eine Wurzel iſt und daher $4 \sin \varphi = 1$, alſo $\sin \varphi = \frac{1}{4}$.

Da nun $h = R\ (1 - 2 \sin \varphi)$,
ſo iſt $h = \frac{1}{2}R$.

Es wird wirklich $A = \left(\frac{3Rh - h^2}{3}\right) h\pi$
$= (R - \frac{1}{3}h)\, h^2\pi$, für $h = \frac{1}{2}R$,

$$A = \tfrac{5}{6}R \cdot \frac{R^2}{4}\pi = \frac{5}{24}R^3\pi = \tfrac{5}{32} \cdot \frac{4R^3\pi}{3}$$

$= \frac{5}{32} \cdot G$, alſo $\frac{5}{32}$ der ganzen Kugel.

Zuſatz. Soll für $n = a + b + c \cdots$ die Kugel durch parallele Ebenen in n Theile getheilt werden, die ſich zu einander verhalten, wie $a : b : c \cdots$, ſo nimmt man zuerſt $m = \frac{n}{a}$ und lernt hierdurch die Höhe des Abſchnitts kennen, welcher den erſten Theil bildet; hierauf nimmt man $m = \frac{n}{a+b}$ und erfährt hierdurch, wie hoch der Abſchnitt iſt, welcher aus der Summe der beiden erſten Theile beſteht, und da die Höhe des erſten Theils bereits gefunden iſt, ſo lernt man hierdurch nun auch die Lage und Höhe der Zone kennen, welche den zweiten Theil bildet ꝛc. Da übrigens bei dem Gebrauch der obigen Formeln immer $m > 2$ ſein muß, ſo nimmt man, wenn in einem beſonderen Falle

$$m = \frac{n}{a + b \cdots\cdot} < 2$$

gefunden wird, $m = \frac{n}{n - (a + b \cdots)}$

und lernt hierdurch eine Größe h' von der Art kennen, daß $2R - h'$ der geſuchte Werth von h wird.

Beiſpiel. Man ſoll durch drei parallele Ebenen eine Kugel in 4 Theile theilen, die ſich zu einander verhalten wie $1 : 2 : 3 : 4$.

Die Höhe h' des Abſchnitts A', welcher dem erſten Theile gleich iſt, wird gefunden für $m = \frac{10}{1}$, weil $1+2+3+4=10$; alſo iſt

$$\sin 3\varphi' = 1 - \frac{2}{m} = 1 - \tfrac{1}{5} = \tfrac{4}{5} = 0{,}8$$

und daher $3\varphi' = 53^\circ\ 7'\ 48''$ und $\varphi' = 17^\circ\ 42'\ 36''$
und weil hier $17^\circ\ 42'\ 36'' = 0{,}3041493$
ſo iſt $h' = R\,(1 - 2 \sin \varphi') = 0{,}3917 \cdot R$.

Die Höhe h'' des Abſchnitts A'', welcher den beiden erſten Theilen zuſammengenommen gleich iſt, erhält man, weil dieſe Theile wie $(1 + 2) : (1 + 2 + 3 + 4) = 3 : 10$

zur ganzen Kugel ſich verhalten ſollen, wenn man $m = \frac{10}{3}$ ſetzt, alſo

$$\sin 3\varphi'' = 1 - \frac{2}{m} = 1 - \tfrac{3}{5} = \tfrac{2}{5} = 0{,}4$$

und es iſt daher $3\varphi'' = 23^0\ 34'\ 42''$, alſo $\varphi'' = 7^0\ 51'\ 34'$
und weil $\sin 7^0\ 51'\ 34'' = 0{,}1367434$
ſo iſt $h'' = R\,(1 - 2 \sin \varphi'') = 0{,}7265 \cdot R$
und weil $h' = 0{,}3917 \cdot R$
ſo iſt $h'' - h' = 0{,}3348 \cdot R.$

Die Höhe h''' des Abſchnitts A''', welcher den drei erſten Theilen zuſammengenommen gleich iſt, würde man, da $(1 + 2 + 3) : (1 + 2 + 3 + 4) = 6 : 10$, erhalten für $m = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$, weil aber hier $m < 2$ iſt, ſo nimmt man $m = \frac{n}{n - (a + b + c)} = \frac{10}{6} = \frac{5}{2}$ und erhält hierdurch die Höhe h des Abſchnitts A, welcher A''' zur ganzen Kugel ergänzt; man erhält alſo in dem gegenwärtigen Falle, wo nur 4 verſchiedene Theile vorkommen, die Höhe h des Abſchnitts A, der dem vierten der Theile gleich iſt, und zwar von dem entgegengeſetzten Ende des Radius genommen. Es iſt aber für $m = \frac{5}{2}$

$$\sin 3\varphi = 1 - \frac{2}{m} = \tfrac{1}{5} = 0{,}2.$$

Dieſer Fall iſt bereits in dem Beiſpiele, No. 3., berechnet worden, und es iſt daher hier wie dort $h = 0{,}866 \cdot R$
und da $h''' = 2R - h$, ſo iſt $h''' = 1{,}1340 \cdot R$
da aber $h'' = 0{,}7265 \cdot R$
ſo wird $h''' - h'' = 0{,}4075 \cdot R.$

Endlich iſt $h'''' = 2R$ und $h'''' - h''' = 0{,}866 \cdot R.$

Um alſo die Kugel nach dem gegebenen Verhältniſſe zu theilen, muß der Durchmeſſer, wenn man ihn = 10000 annimmt, ſo getheilt werden, daß

der erſte Theil	3917	dieſer	Theile	enthält
= zweite	= 3348	=	=	=
= dritte	= 4075	=	=	=
= vierte	= 8660	=	=	=
Summa	10000	Theile.		

§. 84.

Nähere Beſtimmungen für die Kugelzonen.

Wenn die Figur ACBD, Fig. 49., um AC als um eine Axe gedreht wird, ſo daß der Viertelskreis AEB eine Halbkugel beſchreibt, ſo wird von $a\alpha n e$ eine Kugelzone beſchrieben, deren Kubikinhalt entweder dadurch berechnet werden kann, daß man die Differenz der beiden durch $A\alpha n$ und Aae beſchriebenen Kugelabſchnitte berechnet, oder man kann die Formel für den Kubikinhalt der Zone auch unmittelbar aus der Gleichung ableiten

$$Gs + Ks = Cs.$$

Denn es ergiebt ſich hieraus auf gleiche Weiſe, wie §. 81. der Inhalt eines Kugelabſchnitts beſtimmt worden iſt, daß die durch $a\alpha n e$ beſchriebene Zone und der durch $a\alpha m\delta$ beſchriebene abgeſtumpfte Kegel zuſammengenommen eben ſo groß ſind, als der durch $a\alpha\beta d$ erzeugte Cylinder.

Man ſetze $ae = a$, $\alpha n = A$, $a\alpha = h$, $C\alpha = x$ und alſo auch $\alpha m = x$ und $a\delta = x + h$; den Radius der Kugel $= R$, den Inhalt der Zone $= Z$ des abgeſtumpften Kegels der durch $a\alpha m\delta$ beſchrieben wird $= K$, und den Inhalt des durch $a\alpha\beta d$ beſchriebenen Cylinders $= C$, ſo iſt

$$Z + K = C.$$

$$K = \left[\frac{(\alpha m)^2 + (a\delta)^2 + (\alpha m)\,(a\delta)}{3}\right].\,(a\alpha)\,\pi$$

$$= \left(\frac{x^2 + (x+h)^2 + x\,(x+h)}{3}\right) h\pi$$

$$= \left(\frac{3x^2 + 3xh + h^2}{3}\right) h\pi$$

und $C = (\alpha\beta)^2\,(a\alpha)\,\pi = R^2 h\pi$;

es iſt alſo auch

$$Z + \left(\frac{3x^2 + 3xh + h^2}{3}\right) h\pi = R^2 h\pi$$

oder $Z + (x^2 + xh + \tfrac{1}{3}h^2)\,h\pi = R^2 h\pi$

und daher iſt

$$Z = [R^2 - x^2 - xh - \tfrac{1}{3}h^2]\,h\pi.$$

Es iſt aber $R^2 - x^2 = (Cn)^2 - (C\alpha)^2 = (\alpha n)^2 = A^2$ folglich iſt auch

$$Z = [A^2 - xh - \tfrac{1}{3}h^2]\, h\pi.$$

Nun iſt aber $(Ca)^2 + (ae) = (C\alpha)^2 + (\alpha n)^2 = R^2$

nämlich es iſt $(x + h)^2 + a^2 = x^2 + A^2$

alſo $2hx + h^2 + a^2 = A^2$

und $hx = \dfrac{A^2 - h^2 - a^2}{2}$,

folglich wird, wenn man dieſen Werth für hx ſetzt,

$$Z = \left[A^2 - \frac{A^2 - h^2 - a^2}{2} - \tfrac{1}{3}h^2\right] h\pi$$

oder $Z = [\tfrac{1}{2}A^2 + \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{3}h^2]\, h\pi$,

und dieſes giebt endlich für den Inhalt der Zone die Formel

$$Z = \left[\frac{A^2 + a^2}{2} + \tfrac{1}{6}h^2\right] h\pi$$

in welcher nur ſolche Größen vorkommen, die unmittelbar bei einer gegebenen Zone gemeſſen werden können.

Die krumme Oberfläche einer Zone wird, nach §. 80. No. 1., ausgedrückt durch $2R\pi \cdot h$

und die beiden Grundflächen derſelben ſind

$$A^2\pi + a^2\pi = (A^2 + a^2)\,\pi$$

folglich iſt, wenn die ganze Oberfläche der Zone mit F bezeichnet wird,

$$F = (A^2 + a^2 + 2Rh)\,\pi.$$

Nun iſt $R^2 = A^2 + x^2$ und $x = \dfrac{A^2 - h^2 - a^2}{2h}$

alſo auch $R^2 = A^2 + \left(\dfrac{A^2 - h^2 - a^2}{2h}\right)^2$

und $4h^2R^2 = 4A^2h^2 + (A^2 - h^2)^2 - 2\,(A^2 - h^2)\,a^2 + a^4$

$= (A^2 + h^2)^2 - a^2\,[2A^2 - 2h^2 - a^2]$,

es iſt folglich $2hR = \sqrt{[(A^2 + h^2)^2 - a^2\,(2A^2 - 2h^2 - a^2)]}$

und da dieſer Werth für 2hR in der Formel für die Fläche der Zone geſetzt werden kann, ſo folgt, daß ſich auch die ganze Oberfläche derſelben durch die Größen A, a und h ausdrücken läßt.

Zuſatz. Da, wenn der kleinere Kreis adb, Fig. 48., um ſeinen Durchmeſſer als um eine Axe ſich dreht, dadurch weder der Kubikinhalt noch die Oberfläche des von dieſem Kreiſe abhängenden Kreisabſchnitts geändert wird, ſo folgt, daß auch bei jeder Lage von adb gegen ADB, wenn nur

beide ſich nicht ſchneiden, der zwiſchen dieſen beiden Kreiſen liegende Theil der Kugel immer denſelben Inhalt und dieſelbe Oberfläche behält. Die oben angegebenen Formeln für Z und F gelten daher auch in dem Falle, wenn die beiden Flächen der Zone nicht parallel zu einander laufen, und es iſt immer h dem Abſtande der Mittelpunkte beider Grundflächen von einander gleich.

§. 85.

Aufgabe.

Man kennt den Radius einer Kugel = R, die Höhe einer Zone = h und ihren Inhalt = Z; es ſoll die Lage derſelben in der Kugel beſtimmt werden.

Auflöſung. Für $a\alpha = h$, Fig 49., und $C\alpha = x$, iſt nach §. 84.

$$Z = (R^2 - x^2 - hx - \tfrac{1}{3}h^2)\, h\pi$$

$$\text{alſo } x^2 + hx = R^2 - \tfrac{1}{3}h^2 - \frac{Z}{h\pi}$$

$$\text{und } (x + \tfrac{1}{2}h)^2 = R^2 - \tfrac{1}{12}h^2 - \frac{Z}{h\pi}$$

oder, wenn man ſetzt $Z = M^2 h\pi$,

$$(x + \tfrac{1}{2}h)^2 = R^2 - M^2 - \tfrac{1}{12}h^2,$$

$$\text{folglich iſt } x = -\tfrac{1}{2}h + \sqrt{(R^2 - M^2 - \tfrac{1}{12}h^2)}.$$

Iſt aber der Werth von x gefunden, ſo iſt nun

$$A = \sqrt{(R^2 - x^2)} \text{ und } a = \sqrt{(R^2 - (x + h)^2)}.$$

Zuſatz 1. Soll die Aufgabe keinen Widerſpruch enthalten, ſo darf nicht ſein

$$R^2 < M^2 + \tfrac{1}{12}h^2$$

$$\text{oder, weil } M^2 = \frac{A^2 + a^2}{2} + \tfrac{1}{6}h^2,$$

es darf nicht ſein

$$R^2 < \frac{A^2 + a^2}{2} + \tfrac{1}{6}h^2 + \tfrac{1}{12}h^2$$

$$< \frac{A^2 + a^2}{2} + \tfrac{1}{4}h^2$$

und alſo auch nicht

$$R^2 - \tfrac{1}{4}h^2 < \frac{A^2 + a^2}{2}$$

und für 2R = D, enthält die Aufgabe einen Widerſpruch, wenn da iſt

$$D^2 - h^2 < 2\,(A^2 + a^2)$$

und für $D^2 - h^2 = 2\,(A^2 + a^2)$

wird $x = -\frac{1}{2}h$.

Zuſatz 2. Aus der Bedingung, daß nicht ſein kann

$$D^2 - h^2 < 2\,(A^2 + a^2)$$

und alſo $\frac{D^2 - h^2}{2} < A^2 + a^2$

ergiebt ſich die Eigenſchaft des Kreiſes: wenn zwei parallele Sehnen gezogen werden, und man bildet ein rechtwinkliges Dreieck, deſſen Katheten die Hälfte dieſer Sehnen ſind, ſo kann das Quadrat der Hypotenuſe dieſes Dreiecks nie größer ſein, als die Hälfte des Quadrats der zweiten Kathete eines andern rechtwinkligen Dreiecks, deſſen Hypotenuſe der Durchmeſſer des Kreiſes und deſſen eine Kathete dem normalen Abſtande beider Sehnen von einander gleich iſt.

§. 86.

Von dem Kugelnetze.

Nach einer bereits früher gegebenen Erklärung, verſteht man unter einem Netze eine ebene Figur, die ſo zuſammengeſchlagen werden kann, daß ſie einen beſtimmten Körper vollſtändig begränzt, und hieraus folgt, daß ein genaues Netz nur von ſolchen Körpern conſtruirt werden kann, die entweder blos von ebenen Flächen begränzt werden, oder die in ebenen Flächen ſich abwickeln laſſen. Da nun dieſes bei einer Kugel nicht der Fall iſt, ſo folgt, daß auch ein in jeder Hinſicht richtiges Netz von einer Kugel ſich nicht angeben läßt; doch iſt die Aufgabe, das Netz einer Kugel darzuſtellen, von praktiſcher Wichtigkeit, weil bei der Anfertigung der Erd- und Himmelskugeln dergleichen Netze gebraucht werden, indem man die Zeichnung auf einer Ebene entwirft, und mit derſelben die verfertigte Kugel überzieht. Gewöhnlich theilt man zu dieſer Abſicht die Oberfläche der Kugel in eine beſtimmte Anzahl gleicher Segmente, wie MaNb, Fig. 51., wo M und N die beiden Pole der Kugel ſind, MaN und MbN zwei gleiche Kreisbogen, die mit den gleichen Ra-

dien Aa = Bb beſchrieben werden; es müſſen nun die Kreisbogen MaN und MbN eine ſolche Größe haben, daß jeder derſelben der Hälfte eines größten Kreiſes der Kugel gleich iſt. Da nun aber, bei der Belegung der Kugel mit dieſen Segmenten, auch die gerade Linie MN ein halber größter Kreis der Kugel werden muß, ſo wird MCN = MaN, was nicht möglich iſt, und praktiſch nur dadurch ausgeführt werden kann, daß bei dem Ueberziehen der Kugel die Segmente angefeuchtet werden, wodurch es möglich wird, MCN auszudehnen, während die begränzenden Bogen MaN und MbN ihre Länge behalten. Uebrigens geht ſchon hieraus hervor, daß ein auf ſolche Weiſe conſtruirtes Netz dem wahren Netze einer Kugel deſto näher kommen kann, je geringer die Breite ab eines Segmentes iſt, in je mehr Segmente die ganze Oberfläche der Kugel alſo getheilt wird.

Iſt die Anzahl der Segmente gegeben, in welche die ganze Oberfläche der Kugel getheilt werden ſoll, und kennt man auch die mit dem Netze zu überziehende Kugel ihrer Größe nach; iſt alſo der größte Kreis derſelben ſeiner Länge nach gegeben: ſo iſt dadurch der Werth von ab und der von aM beſtimmt, und es kommt nun darauf an, die Länge des Radius AM = Aa zu berechnen, mit welchem die Kreisbogen MaN und MbN, welche die einzelnen Segmente begränzen, beſchrieben werden müſſen.

Man ſetze, es ſei ab der 2kte Theil des ganzen Umfanges eines größten Kreiſes, die wirkliche Länge des Bogens aM = l und daher, weil

$$\underline{2k \times (ab) = 4\,(aM) = 4l,}$$
$$k \times (ab) = 2l$$
$$\text{und } k \times (aC) = l;$$

ferner ſei $\angle MAa = \varphi$, ſo iſt für den Radius AM = 1,

$$\text{weil } \underline{AM : AC = 1 : \cos\varphi,}$$
$$(AC) = \cos\varphi,$$
$$\text{und daher } (Ca) = 1 - \cos\varphi.$$
$$\text{Es iſt aber } k\,(Ca) = l$$
$$\text{folglich iſt auch } k\,(1 - \cos\varphi) = l$$

wo φ denſelben Bogen in Grade ausdrückt, der durch l ſei-

ner wahren Länge nach ausgedrückt wird. Man kann daher $\cos\varphi = \cos l$ ſetzen, wodurch die Gleichung erhalten wird

$$k(1 - \cos l) = l.$$

Nun iſt aber bekanntlich

$$\cos l = 1 - \frac{l^2}{1\cdot 2} + \frac{l^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{l^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} \dots$$

oder wenn man blos die beiden erſten Glieder benutzt, weil es hier doch blos auf einen Näherungswerth ankommt,

$$\cos l = 1 - \frac{l^2}{2}$$

$$\text{und alſo } 1 - \cos l = \frac{l^2}{2}.$$

$$\text{Es iſt folglich auch } k \cdot \frac{l^2}{2} = l;$$

hieraus erhält man $l = \frac{2}{k}$ als die ungefähre Länge, welche der Bogen Ma haben muß, für den Radius AM = Aa = 1 und es iſt hierdurch auch der Winkel φ beſtimmt. Da nun

$$(Aa) = 1$$

$$\text{und } (aC) = 1 - \cos\varphi,$$

$$\text{ſo iſt } \frac{(Aa)}{(aC)} = \frac{1}{1 - \cos\varphi}$$

$$\text{und } (Aa) = \left(\frac{1}{1 - \cos\varphi}\right) \times (aC).$$

Nun iſt aber (aC) als ein beſtimmter Theil des größten Kreiſes der Kugel bekannt, folglich iſt auch der Radius (Aa) beſtimmt, mit welchem die das Segment begränzenden Bogen MaN und MbN beſchrieben werden müſſen, und es ſind nach der Annahme 2k ſolcher Segmente erforderlich, um die ganze Kugel damit zu bedecken.

Gewöhnlich beſteht das Kugelnetz aus 12 Segmenten, und es iſt alſo in dieſem Falle 2k = 12 und k = 6. Da nun $l = \frac{2}{k}$, ſo iſt alsdann $l = \frac{1}{3}$ für den Radius = 1; ſo daß alſo $180^0 = \pi = 3{,}14159$.

Setzt man nun die Proportion an

$$3{,}14159 : \tfrac{1}{3} = 180^0 : \varphi^0$$

ſo findet man $\varphi = \left(\frac{60}{3{,}14159}\right)^0 = 19^0\ 6'$ circa.

Nun iſt $\cos 19^0\ 6' = 0{,}9449489$

alſo $1 - \cos\varphi = 0{,}0550511$

und daher $(Aa) = \left(\frac{1}{1 - \cos\varphi}\right)(aC) = \frac{1}{0{,}0550511} \cdot (aC)$.

Es iſt aber $\frac{1}{0{,}0550511} = 18$;

folglich müßte eigentlich ſein

$$(Aa) = 18 \cdot (aC) = 9 \cdot (ab).$$

Man findet aber, wenn der Werth von l genauer berechnet wird, denſelbe etwas größer als $\frac{2}{k}$ und er iſt daher für $k=6$ eine Kleinigkeit größer als $\frac{1}{3}$; daher wird auch φ größer als $19^0\ 6'$, und es erhält daher $\cos\varphi$ einen etwas geringeren Werth, doch wird dadurch die Gleichung

$$(Aa) = 9\,(ab)$$

nicht geändert.

Da durch das Anfeuchten des Segments, um es über die Kugel zu paſſen, indem hierbei MN ausgedehnt wird, ab ſich etwas verkürzt, ſo nimmt man bei der Conſtruction der Segmente, von welchen 12 die ganze Kugel bedecken ſollen, gewöhnlich

$$(Aa) = 10 \cdot (ab).$$

Daher wird zur Entwerfung dieſer Segmente die Regel gegeben: Man nehme $ab = \frac{1}{12}$ eines größten Kreiſes der Kugel, alſo = der Länge eines Bogens von 30^0, halbire ab in C; nehme $CA = CB = 9\tfrac{1}{2} \times (ab) = 19 \times (Ca)$ und beſchreibe nun aus A und B mit dem Radius $Aa = Bb = 10 \times (ab)$ ein Paar Bogen, die ſich in M und N ſchneiden, ſo ſchließen dieſelben eins der 12 erforderlichen Segmente ein.

Will man für eine größere Kugel ein aus 20 Segmenten beſtehendes Netz entwerfen, ſo wird $2k = 20$, alſo $k = 10$ und $l = \frac{2}{k} = \frac{1}{5}$.

Da nun $3{,}14159 : l = 180^0 : \varphi^0$;

$$\text{ſo iſt hier } \varphi = \left(\frac{36}{3{,}14159}\right)^0 = 11^0\,25'.$$

$$\text{Nun iſt } \cos 11^0\,25' = 0{,}9802136$$

$$\text{alſo } 1 - \cos\varphi = 0{,}0197864$$

$$\text{und daher } (A\bar{a}) = \left(\frac{1}{1 - \cos\varphi}\right) \cdot (aC)$$

$$= \frac{1}{0{,}0197864} \cdot (aC) = 50 \cdot (aC) \text{ ungefähr.}$$

Man müßte alſo in dieſem Falle den Radius 25 × (ab) nehmen, wenn die Verkürzung von (ab) bei dem Belegen der Kugel nicht berückſichtigt wird.

§. 87.

Aufgabe.

Auf der Oberfläche einer Kugel ſollen mehrere Punkte angegeben werden von der Art, daß wenn man ſie durch Bogen größter Kreiſe mit einander verbindet, die ganze Oberfläche der Kugel dadurch in lauter gleichſeitige gleich große Dreiecke zerlegt wird.

Aufloſung. Nach §. 80. No. 3., wird die Fläche eines ſphäriſchen Dreiecks ausgedrückt durch

$$F = \left(\frac{a + b + c - 180^0}{180^0}\right) \cdot R^2\pi,$$

und wenn man den Radius der Kugel = 1 ſetzt und alſo $180^0 = \pi$, ſo wird

$$F = (a + b + c - \pi).$$

Da nun die Dreiecke gleichſeitig ſein ſollen, ſo müſſen auch die Winkel gleich groß ſein, alſo $a = b = c$ und folglich iſt alsdann

$$F = 3a - \pi.$$

Iſt nun die Anzahl der Dreiecke, in welche die ganze Kugel zerlegt wird, $= x$, ſo iſt $x \cdot F$ der Oberfläche der ganzen Kugel gleich, $= 4R^2\pi = 4\pi$ für $R = 1$, und dieſes giebt ſonach die Gleichung

$$x\,(3a - \pi) = 4\pi.$$

Haben nun von den ſämmtlichen Dreiecken, in welche die Oberfläche der Kugel zerlegt wird, je n einen Winkelpunkt gemein, ſo iſt, weil alle um einen Punkt liegende Winkel zuſammen=

genommen 2π betragen, die Größe eines jeden Winkels $a = \frac{2\pi}{n}$. Wird dieſer Werth für α in der obigen Gleichung geſetzt, ſo iſt

$$x\left(3 \cdot \frac{2\pi}{n} - \pi\right) = 4\pi,$$

oder es iſt $x(6 - n) = 4n$,

und daher $x = \frac{4n}{6 - n}$.

Da nun wenigſtens 3 Dreiecke in einem Punkte zuſammentreffen müſſen, ſo kann auch n nicht kleiner als 3 ſein, und weil bereits $n = 6$ für x keinen beſtimmten Werth giebt, und wenn man $n > 6$ nehmen wollte, x einen negativen Werth erhalten würde, was zu keinem Reſultate führt: ſo folgt, daß n kleiner als 6 ſein muß, und es iſt daher

$n = 3$ oder $n = 4$ oder $n = 5$

und dieſen Werthen entſprechen die von x

$x = 4$ oder $x = 8$ oder $x = 20$.

Die ganze Oberfläche der Kugel läßt ſich alſo in 4, 8 oder 20 gleichſeitige gleich große Dreiecke zerlegen, und es iſt jeder Winkel eines jeden dieſer Dreiecke in dem erſten Falle $= 120^0$, in dem zweiten Falle $= 90^0$ und in dem dritten $= 72^0$.

Da, wenn die Oberfläche der Kugel in 4 Dreiecke zerlegt wird, die zuſammengenommen 12 Winkel haben, je drei Winkel in einem Punkte zuſammenſtoßen, ſo folgt, daß zu dieſer Eintheilung 4 Punkte auf der Oberfläche der Kugel angegeben werden müſſen. Soll die Oberfläche der Kugel in 8 Dreiecke zerlegt werden, die alſo zuſammen 24 Winkel haben, ſo treffen je 4 Winkel in einem Punkte zuſammen, und es iſt daher die Anzahl der hierzu erforderlichen Punkte auf der Oberfläche der Kugel = 6. Will man aber endlich die Oberfläche der Kugel in 20 Dreiecke zerlegen, die alſo 60 Winkel haben, ſo treffen je 5 dieſer Winkel in einem Punkte zuſammen, und es iſt folglich die hierzu erforderliche Anzahl der Punkte auf der Oberfläche der Kugel = 12.

Zuſatz 1. Es iſt bekanntlich, wenn die drei Seiten eines ſphäriſchen Dreiecks mit A, B und C, und die drei Winkel deſſelben mit a, b und c bezeichnet werden,

cos

$$\cos c = \frac{r^2 \cos C - r \cos A \cos B}{\sin A \sin B},$$

und daher für das gleichſeitige Dreieck, wenn man $r = 1$ annimmt,

$$\cos c = \frac{\cos C - \cos^2 C}{\sin^2 C} = \frac{\cos C (1 - \cos C)}{1 - \cos^2 C}$$

$$= \frac{\cos C (1 - \cos C)}{(1 + \cos C)(1 - \cos C)} = \frac{\cos C}{1 + \cos C}.$$

Es iſt aber allgemein

$$\sin \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right)} \text{ und } \cos \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right)}$$

und daher $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ und $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, folglich iſt auch, wenn man in der erſten dieſer beiden Gleichungen ſetzt $2\alpha = c$ und in der andern $2\alpha = C$,

$$\cos c = 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}c \text{ und } \cos C = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}C - 1.$$

Setzt man dieſe Werthe in der Gleichung

$$\cos c = \frac{\cos C}{1 + \cos C}$$

ſo wird erhalten

$$1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}c = \frac{2\cos^2 \tfrac{1}{2}C - 1}{2\cos^2 \tfrac{1}{2}C}$$

und es iſt daher

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2}c = 1 - \frac{2\cos^2 \tfrac{1}{2}C - 1}{2\cos^2 \tfrac{1}{2}C}$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 \tfrac{1}{2}C}$$

und daher iſt

$$\sin \tfrac{1}{2}c = \frac{1}{2\cos \tfrac{1}{2}C} \text{ und } \cos \tfrac{1}{2}C = \frac{1}{2\sin \tfrac{1}{2}c}$$

der Ausdruck, durch welchen beſtimmt wird, wie in einem gleichſeitigen ſphäriſchen Dreiecke die Seiten und Winkel von einander abhängen.

Zuſatz 2. Iſt abc, Fig. 51a., ein Kreisausſchnitt für den Radius $ac = 1$, und ſollen die Radien ca und cb um gleichviel, $a\alpha = b\beta$, verlängert werden, ſo daß, wenn man die Sehne $\alpha\beta$ zieht, dieſe ſo groß iſt, wie $a\alpha$ und $b\beta$ zuſammengenommen, oder was daſſelbe iſt, daß $\alpha\beta = 2\,(a\alpha)$, ſo läßt ſich die Länge von $a\alpha = z$, wenn der Winkel $acb = C$ ge-

geben iſt, leicht auf folgende Art beſtimmen: Es iſt in dem gleichſchenkligen Dreieck $\alpha c \beta$

$$c\alpha : \tfrac{1}{2}(\alpha\beta) = 1 : \sin \tfrac{1}{2}C$$

$$\text{alſo } 1 + z : z = 1 : \sin \tfrac{1}{2}C$$

$$\text{folglich iſt } z = \sin \tfrac{1}{2}C + z \sin \tfrac{1}{2}C$$

$$\text{und daher } z = \frac{\sin \tfrac{1}{2}C}{1 - \sin \tfrac{1}{2}C}.$$

Iſt nun c der Mittelpunkt der Kugel, deren Oberfläche nach der obigen Anleitung in $x = m$ gleich große gleichſeitige Dreiecke zerlegt iſt, und es iſt ab eine der Seiten dieſer Dreiecke, ſo ſind a und b zwei von den Punkten, die auf der Oberfläche der Kugel beſtimmt werden müſſen, um die Eintheilung zu erhalten, und für $a\alpha = b\beta = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta)$ ſind α und β zwei Punkte, die als die Mittelpunkte zweier Kugeln angenommen werden können, welche $a\alpha = b\beta$ zum Halbmeſſer haben, die ſich gegenſeitig und auch die Kugel, zu welcher cab gehört, berühren. Es laſſen ſich alſo, wenn man die Oberfläche der gegebenen Kugel nach der obigen Anleitung theilt, eben ſo viel Kugeln als man Theilpunkte erhält, beſchreiben, die gegenſeitig mit einander in Berührung ſind, und die ſämmtlich die gegebene Kugel berühren. Nun iſt aber, nach der im §. aufgeſtellten Berechnung, die Anzahl der Theilpunkte 4, 6 oder 12; es können daher um jede gegebene Kugel 4, 6 oder 12 ſie berührende Kugeln beſchrieben werden, die ſich gegenſeitig ebenfalls berühren: und zwar, wenn die Anzahl der berührenden Kugeln = 4 iſt, ſo berührt von dieſen jede die drei übrigen, iſt die Anzahl der berührenden Kugeln = 6, ſo wird jede derſelben von 4 der übrigen berührt, und wenn die Anzahl aller berührenden Kugeln = 12 iſt, ſo berührt jede 5 von den übrigen.

Zuſatz 3. Der Radius z der berührenden Kugeln iſt in allen Fällen

$$z = \frac{\sin \tfrac{1}{2}C}{1 - \sin \tfrac{1}{2}C}$$

$$\text{und es iſt } \cos \tfrac{1}{2}C = \frac{1}{2 \sin \tfrac{1}{2}c}.$$

Iſt nun

1. die Anzahl der berührenden Kugeln = 4,

ſo iſt nach der in dem §. angegebenen Rechnung $c = 120^0$, alſo $\sin \frac{1}{2}c = \sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und daher $\cos \frac{1}{2}C = \frac{1}{\sqrt{3}}$ folglich iſt $\sin \frac{1}{2}C = \sqrt{(1 - \cos^2 \frac{1}{2}C)} = \sqrt{(1 - \frac{1}{3})} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ $= \frac{\sqrt{6}}{3}$ und es iſt daher in dieſem Falle

$$z = \frac{\sin \frac{1}{2}C}{1 - \sin \frac{1}{2}C} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{6}}{1 - \frac{1}{3}\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3 - \sqrt{6}} = \frac{(3 + \sqrt{6})\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6} + 2 = 4{,}4494 \ldots.$$

2. Wenn die Anzahl der berührenden Kugeln $= 6$ iſt, ſo wird $c = 90^0$, alſo $\sin \frac{1}{2}c = 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

$$\text{alſo } \cos \frac{1}{2}C = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin \frac{1}{2}C,$$

$$\text{und daher } z = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{2})\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2} + 1 = 2{,}4142\ldots.$$

3. Wenn endlich die Anzahl der berührenden Kugeln 12 beträgt, ſo iſt $c = 72^0$ und daher

$$\sin \frac{1}{2}c = \sin 36^0 = \frac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})},$$

$$\text{alſo } \cos \frac{1}{2}C = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}} = \frac{2}{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}$$

$$\text{und daher } \sin^2 \frac{1}{2}C = 1 - \frac{4}{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}$$

$$\text{folglich iſt } \sin \frac{1}{2}C = \frac{\sqrt{(3 - \sqrt{5})}}{\sqrt{(5 - \sqrt{5})}}$$

und es iſt daher in dieſem Falle

$$z = \frac{\sqrt{(3 - \sqrt{5})}}{\sqrt{(5 - \sqrt{5})} - \sqrt{(3 - \sqrt{5})}} =$$

$$\frac{[\sqrt{(3 - \sqrt{5})}] \times [\sqrt{(5 - \sqrt{5})} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})}]}{(5 - \sqrt{5}) - (3 - \sqrt{5})} =$$

$$\frac{\sqrt{(20 - 8\sqrt{5})} + (3 - \sqrt{5})}{2} = \sqrt{(5 - 2\sqrt{5})} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$= 1{,}1085.$$

Hieraus geht zugleich hervor, daß in allen Fällen die Radien der berührenden Kugeln größer ſind als der Radius der berührten.

§. 88.

Aufgabe.

Es ſind 4 Punkte im Raume gegeben, die nicht ſämmtlich in einer und derſelben Ebene liegen; man ſoll eine Kugel beſchreiben, von der Art, daß dieſe 4 Punkte in der Oberfläche derſelben liegen.

Auflöſung. Da die Punkte alle 4 nicht in einer und derſelben Ebene liegen, ſo können auch nicht drei derſelben in einer geraden Linie ſich befinden, und es iſt daher durch je drei dieſer Punkte ein Dreieck beſtimmt. Sind B, c und d, Fig 52., drei von dieſen Punkten, ſo müſſen dieſe immer in einer Ebene liegen, die hier die Ebene der Figurentafel ſein ſoll. Es iſt nun in dem Dreieck Bcd die Lage von B und c gegen d beſtimmt, und zwar die von B durch db = b, und die Normale bB = B, die Lage von c aber iſt durch dc = c beſtimmt. Der vierte Punkt α liegt außerhalb der Ebene des Dreiecks, und wenn die Normale von α auf dieſe Ebene dieſelbe in A trifft und man zieht von A die Normale Aa auf dc, ſo iſt die Lage von α beſtimmt durch da = a, aA = A und Aα = α. Der Mittelpunkt z der zu beſtimmenden Kugel habe eine ſolche Lage, daß, wenn von demſelben eine Normale auf die Ebene des Dreiecks Bcd gezogen wird, die Normale die Ebene in y trifft, und man ſetze nun, nachdem yx parallel zu Aa und Bb gezogen iſt, dx = x, xy = y, yz = z und den geſuchten Radius der Kugel = R. Die Lage von z gegen α ſei von der Art, wie ſie in Fig. 52a. dargeſtellt wird, ſo daß alſo die Ebene des Dreiecks in der Linie yA normal von der Ebene y′A′αz geſchnitten wird. Nun iſt, wenn man zα zieht, dieſe Linie = R und wenn ze parallel zu y′A′ gezogen wird, ſo iſt αe = α — z, folglich iſt

$$R^2 = (ze)^2 + (\alpha - z)^2$$

und da ze = y′A′ = yA (Fig. 52.)

$$\text{und } (yA)^2 = (Aa - xy)^2 + (xa)^2$$
$$= (A - y)^2 + (a - x)^2,$$

ſo erhält man die Gleichung

$$1.\quad R^2 = (a - x)^2 + (A - y)^2 + (\alpha - z)^2.$$

Wird z mit B verbunden, ſo iſt, wenn man yB gezogen denkt, in dem rechtwinkligen Dreieck zyB, weil auch zB = R ſein muß,

$$R^2 = (By)^2 + z^2,$$

und weil $(By)^2 = (Bb - xy)^2 + (bx)^2$

$$= (B - y)^2 + (x - b)^2; \text{ ſo iſt}$$

$$2.\quad R^2 = (x - b)^2 + (B - y)^2 + z^2.$$

Denkt man den Mittelpunkt z der Kugel mit c verbunden, ſo iſt auch dieſe Linie = R, und es iſt

$$R^2 = (cy)^2 + z^2$$

$$= (cx)^2 + y^2 + z^2; \text{ nämlich es iſt}$$

$$3.\quad R^2 = (c - x)^2 + y^2 + z^2.$$

Verbindet man aber endlich z mit d, welche Linie ebenfalls = R iſt, ſo iſt

$$R^2 = (dy)^2 + z^2$$

$$= (dx)^2 + (xy)^2 + z^2, \text{ und daher}$$

$$4.\quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Hiernach hat man vier verſchiedene Gleichungen, welche die vier unbekannten Größen x, y, z und R enthalten, die hierdurch vollkommen beſtimmt ſind, und man kann ſonach nicht nur den Werth von R finden, ſondern auch die Lage des Mittelpunktes der Kugel gegen die Linie dc und auch gegen die Ebene des Dreiecks Bcd.

Wird die vierte dieſer Gleichungen von den drei übrigen abgezogen, ſo bekommt man

$$5.\quad o = a^2 - 2ax + A^2 - 2Ay + \alpha^2 - 2\alpha z.$$

$$6.\quad o = - 2bx + b^2 + B^2 - 2By.$$

$$7.\quad o = c^2 - 2cx.$$

Aus No. 7. erhält man unmittelbar

$$8.\quad x = \tfrac{1}{2}c.$$

Dieſer Werth für x in No. 6. geſetzt, giebt

$$2By = - bc + b^2 + B^2; \text{ alſo iſt}$$

$$9.\quad y = \frac{B^2 + b^2 - bc}{2B}$$

und die Gleichung No. 5. giebt nun

$$2\alpha z = a^2 - ac + A^2 - \frac{A(B^2 + b^2 - bc)}{B} + \alpha^2,$$

und daher

$$10. \quad z = \frac{B(a^2 + A^2 + \alpha^2 - \alpha c) - A(B^2 + b^2 - bc)}{2\alpha B}.$$

Da nun

$$11. \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

ſo iſt, wenn man die für x, y und z gefundenen Werthe ſubſtituirt, auch der Werth von R beſtimmt. Es iſt alſo durch die vier gegebenen Punkte immer eine Kugel ihrer Größe und Lage nach beſtimmt, und zwar nur eine einzige Kugel, weil die Gleichungen, durch welche die Coordinaten x, y und z beſtimmt werden, ſämmtlich blos von dem erſten Grade ſind. Nur in dem Falle führen die Gleichungen zu keinem Reſultate, wenn entweder $B = 0$ oder $\alpha = 0$ iſt; in dieſem Falle liegen aber auch die vier Punkte in einer und derſelben Ebene.

Zuſatz 1. Da je drei beliebig auf der Oberfläche einer Kugel angenommene Punkte immer in einer Ebene liegen müſſen, die die Kugel in einem größten oder kleineren Kreiſe ſchneidet, und da die in dem Mittelpunkte eines ſolchen Kreiſes auf der Ebene deſſelben errichtete Normale durch den Mittelpunkt der Kugel gehen muß, ſo folgt, daß Fig. 52. y der Mittelpunkt des Kreiſes ſein muß, der um das Dreieck Bcd beſchrieben werden kann, und es laſſen ſich daher die Werthe von x und y auch unabhängig von den obigen Gleichungen auf folgende Art finden: Da man, um den Mittelpunkt y des Kreiſes zu finden, der ſich um Bcd beſchreiben läßt, in dem Halbirungspunkte x der Linie dc eine Normale errichten muß, ſo folgt hieraus unmittelbar, daß

$$(dx) = x = \tfrac{1}{2}(cd) = \tfrac{1}{2}c;$$

ferner iſt bekanntlich, wenn der Radius (dy) des um Bcd beſchriebenen Kreiſes $= \varrho$ geſetzt wird, für $dc = c$, $Bd = d$, $cB = e$ und die Fläche des Dreiecks $= F$

$$\varrho = \frac{cde}{4F}$$

$$\text{und } F = \frac{(cd)\,(bB)}{2} = \tfrac{1}{2}Bc;$$

$$\text{alſo iſt auch } \varrho = \frac{cde}{2Bc} = \frac{de}{2B}$$

und daher $\varrho = \frac{d^2 e^2}{4B^2}$;

und weil $y^2 = \varrho^2 - x^2$, ſo iſt auch

$$y^2 = \frac{d^2 c^2}{4B^2} - \frac{c^2}{4} = \frac{d^2 c^2 - B^2 c^2}{4B^2}.$$

Es iſt aber $d^2 = (b^2 + B^2)$ und $e^2 = [(c - b)^2 + B^2]$; alſo iſt auch

$$y^2 = \frac{(b^2 + B^2)[(c - b)^2 + B^2] - B^2 c^2}{4B^2},$$

und hieraus findet man nach gehöriger Reduction

$$y^2 = \frac{[B^2 - b(c - b)]^2}{4B};$$

folglich iſt $y = \frac{B^2 - bc + b^2}{2B}$,

was mit dem in der Gleichung No. 9. erhaltenen Werthe übereinſtimmt.

Zuſatz 2. Auch durch eine geometriſche Conſtruction läßt ſich der Mittelpunkt der Kugel, ſo wie der Radius derſelben, leicht auf folgende Art finden: Es ſei, Fig. 53., mMnN der um das Dreieck Bcd, Fig. 52., beſchriebene Kreis und y der Mittelpunkt deſſelben, ſo iſt, weil die Lage von A gegen das Dreieck Bcd, Fig. 52., gegeben iſt, auch die Lage von A gegen y, Fig. 53., bekannt. Zieht man nun durch A und y den Durchmeſſer mn, ſo ſind die hierdurch beſtimmten Punkte m und n ein Paar Punkte auf der Oberfläche der Kugel, und es iſt, wenn man αm und αn zieht, die Ebene des Dreiecks normal auf der Ebene des Kreiſes; weil aber der Mittelpunkt der Kugel in der Linie yq liegen muß, welche in y auf der Ebene des Kreiſes normal ſteht, ſo muß dieſer Mittelpunkt auch in der Ebene des Dreiecks mnα liegen: und weil die Punkte m, n und α alle drei auf der Oberfläche der Kugel liegen, ſo muß der Mittelpunkt z derſelben von dieſen Punkten gleich weit abſtehen; es iſt derſelbe daher der Mittelpunkt des Kreiſes, welcher um das Dreieck αmn beſchrieben werden kann. Beſchreibt man alſo um das Dreieck Bcd einen Kreis, zieht durch den Mittelpunkt y deſſelben und durch den von der Lage des vierten Punktes α abhängenden Punkt A einen Durchmeſſer mn, errichtet auf

demſelben in A eine Normale $A\alpha$, die dem Abſtande des Punktes α von der Ebene des Dreiecks Bcd gleich iſt, und beſchreibt um $mn\alpha$ einen Kreis, ſo iſt der Radius deſſelben, $zm = R$, der Halbmeſſer der Kugel, und die Normale zy iſt die in der obigen algebraiſchen Ableitung mit z bezeichnete Ordinate.

§. 89.

Einige Bemerkungen über Berührungen bei einer Kugel.

Ein Kreis iſt ſeiner Größe und Lage nach durch drei Berührungsſtücke gegeben, und dieſe können Punkte, gerade Linien oder Kreiſe ſein. Auf gleiche Weiſe iſt auch eine Kugel ihrer Größe und Lage nach durch vier Berührungsſtücke beſtimmt, und dieſe können Punkte ſein oder Ebenen oder ebenfalls Kugeln. Dieſes führt zu einer Reihe von Aufgaben, die ſowohl durch geometriſche Conſtruction, als durch algebraiſche Rechnung gelöſt werden können, und jedenfalls zu intereſſanten Reſultaten führen. Eine vollſtändige Ableitung aller hier möglichen Fälle muß der eigenen Uebung überlaſſen bleiben, und um das bei der Auflöſung dieſer Aufgaben anzuwendende Verfahren kennen zu lernen, wird es hinreichen, wenn hier nur einige dieſer Aufgaben wirklich gelöſt werden. Die erſte von allen, nämlich eine Kugel durch vier Punkte zu legen, iſt bereits in dem vorigen §. vollſtändig gelöſt worden, und in Beziehung auf die übrigen iſt hier vorläufig zu bemerken, daß, wenn eine Ebene eine Kugel berührt, der von dem Mittelpunkt an den Berührungspunkt gezogene Radius der Kugel normal auf der berührenden Ebene ſteht, und daß, wenn zwei Kugeln ſich berühren, der Berührungspunkt mit ihren Mittelpunkten in gerader Linie liegt.

Soll eine Kugel beſchrieben werden, die durch drei gegebene Punkte geht, und eine der Lage nach gegebene Ebene berührt, ſo kann man den Radius der Kugel auf folgende Art finden:

Sind A, B und C, Fig. 54., die drei gegebenen Punkte, und man beſchreibt einen Kreis um dieſelben und errichtet in dem Mittelpunkte y eine Normale auf der Ebene dieſes Kreiſes, ſo muß, wie bereits §. 88. gezeigt worden iſt, der Mittelpunkt

der Kugel in dieſer Normale liegen. Nun ſei de die Linie, in welcher die gegebene Ebene von der Ebene des gezogenen Kreiſes geſchniten wird, yp normal auf de und in dem Punkte p die Normale pq auf de in der gegebenen Ebene gezogen: ſo iſt ypq der Neigungswinkel, welchen die gegebene Ebene mit der Ebene des Kreiſes bildet, und es liegt die in y auf ABC errichtete Normale in der Ebene dieſes Winkels; von welchem Punkte dieſer Normale man auch eine Senkrechte auf die gegebene Ebene ziehen mag, ſo wird dieſelbe doch immer in irgend einem Punkte von der Linie pq getroffen. Folglich muß auch der Radius der Kugel, welcher an den Berührungspunkt der Ebene gezogen werden kann, dieſe in einem Punkte der Linie pq treffen. Nun ſind m und n ein Paar Punkte auf der Oberfläche der Kugel, und es muß der Kreis, welcher durch m und n geht, und die Linie pq berührt, ein größter Kreis der Kugel ſein; wird alſo dieſer Kreis gezogen, ſo iſt der Radius deſſelben zugleich der Radius der Kugel. Die Aufgabe, eine Kugel zu beſchreiben, die durch drei gegebene Punkte geht, und eine der Lage nach gegebene Ebene berührt, läßt ſich alſo immer auf die bei Kreisberührungen vorkommende Aufgabe zurückführen, einen Kreis zu beſchreiben, der durch zwei gegebene Punkte geht, und eine der Lage nach gegebene Linie berührt.

Soll eine Kugel beſchrieben werden, die durch drei gegebene Punkte geht, und eine der Lage nach gegebene Kugel berührt, ſo beſchreibt man ebenfalls, wenn A, B und C, Fig. 54., die drei gegebenen Punkte ſind, um dieſelben einen Kreis, und es muß auch jetzt der Mittelpunkt der Kugel in der Normale yq liegen, welche auf ABC in y errichtet werden kann. Legt man nun durch yq, wo q im Raume normal über ABC liegend gedacht werden muß, eine Ebene, die durch den Mittelpunkt der gegebenen Kugel geht, ſo wird dieſe in einem größten Kreiſe geſchnitten, in dem der Berührungspunkt liegen muß. Iſt nun mn die Durchſchnittslinie dieſer Ebene mit ABC, ſo ſind m und n ihrer Lage nach gegeben, und man kennt auch den größten Kreis der gegebenen Kugel ſeiner Lage nach gegen mn. Wird alſo nun ein Kreis beſchrieben, der jenen größten Kreis berührt, und durch die

Punkte m und n geht, ſo iſt dieſer nothwendiger Weiſe ein größter Kreis der geſuchten Kugel. Es läßt ſich alſo die Aufgabe, eine Kugel zu beſchreiben, die durch drei Punkte geht und eine gegebene Kugel berührt, auf die bei den Kreisberührungen vorkommende Aufgabe zurückführen, einen Kreis zu beſchreiben, der durch zwei Punkte geht, und einen gegebenen Kreis berührt.

Es iſt nicht ſchwer, bei einigem Nachdenken auch die Auflöſung für die übrigen bei Kugelberührungen vorkommenden Aufgaben zu finden. Uebrigens verdient hier bemerkt zu werden, daß, ſo wie bei den Kreisberührungen, wenn erſt einige Aufgaben gelöſt ſind, die folgenden ſich immer auf eine oder die andere der bereits gelöſten zurückführen laſſen, dieſes auch bei den Kugelberührungen der Fall iſt. Die intereſſanteſte der hier möglichen Aufgaben iſt die, eine Kugel zu beſchreiben, die vier andere ihrer Größe und Lage nach gegebene Kugeln berührt. Dieſe Aufgabe kann auf die zurückgeführt werden, eine Kugel zu beſchreiben, die drei andere berührt, und durch einen gegebenen Punkt geht; die Auflöſung dieſer Aufgabe hängt von der ab, eine Kugel zu beſchreiben, die durch zwei Punkte geht und zwei gegebene Kugeln berührt: und da dieſe letztere mit Hülfe der obigen Aufgabe, eine Kugel zu beſchreiben, die durch drei Punkte geht, und eine gegebene Kugel berührt, gelöſt werden kann; ſo läßt ſich auch hieraus erkennen, wie es möglich iſt, eine Kugel zu beſchreiben, die vier andere ihrer Größe und Lage nach berührt. Eine ähnliche Abhängigkeit findet man auch bei den übrigen die Kugelberührung betreffenden Aufgaben.

Anmerkung. Eine Abhandlung, welche die verſchiedenen bei Kugelberührungen vorkommenden Aufgaben enthält, hat Fermat geſchrieben; man findet dieſe Abhandlung in der Sammlung ſeiner Werke unter dem Titel: De contactibus Sphaericis. Einen kurzen Auszug aus dieſer Abhandlung findet man in dem 3ten Bande von Klügel's mathematiſchem Wörterbuch, S. 420 u. ff. Die ſämmtlichen bei Kreisberührungen vorkommenden Aufgaben findet man in den praktiſchen Uebungen für angehende Mathematiker von Unger in dem 2ten Bande, welcher die Lehre von dem Kreiſe enthält.

§. 90.

Noch einige Aufgaben und Bemerkungen.

1. Die drei Seiten der Grundfläche einer dreiſeitigen Pyramide werden mit a, b, c bezeichnet, und die drei Seitenkanten derſelben mit α, β und γ; ſo daß die Kante α der Seite a gegenüberliegt, β der b und γ der c. Wie müſſen dieſe Linien von einander abhängen, wenn die vier Ecken der Pyramide die Mittelpunkte von vier Kugeln ſollen ſein können, die ſich gegenſeitig berühren?

Auflöſung. Setzt man den Radius der Kugel, deren Mittelpunkt in der Spitze der Pyramide iſt, = x, ſo müſſen die Radien der drei übrigen Kugeln ſein $\alpha - x$, $\beta - x$ und $\gamma - x$, und daher beſteht nun a aus den beiden Theilen $\beta - x$ und $\gamma - x$; eben ſo b aus $\alpha - x$ und $\gamma - x$ und c aus $\alpha - x$ und $\beta - x$; folglich bekommt man die drei Gleichungen

$$(\beta - x) + (\gamma - x) = a; \text{ alſo wird } x = \frac{\beta + \gamma - a}{2},$$
$$(\alpha - x) + (\gamma - x) = b; \quad \text{"} \quad \text{"} \quad b = a + \alpha - \beta,$$
$$(\alpha - x) + (\beta - x) = c; \quad \text{"} \quad \text{"} \quad c = a + \alpha - \gamma,$$

und durch dieſe Ausdrücke iſt nun beſtimmt, wie die Seiten von einander abhängen müſſen, wenn die Bedingungen der Aufgabe ſtatt finden ſollen.

2. Es haben ſechs gleich groſse Kugeln eine ſolche Lage gegen einander, daß jede derſelben vier der übrigen berührt; man ſoll den Radius der Kugel angeben, die zwiſchen dieſen Kugeln liegen kann, ſo daß ſie von allen berührt wird: und den Radius der Kugel, die um jene ſechs Kugeln, ſie alle berührend, gezogen werden kann.

Auflöſung. Wenn der Radius der zwiſchen den ſechs Kugeln liegenden = 1 geſetzt wird, ſo iſt nach §. 87. der Radius der berührenden $= \sqrt{2} + 1$, und es wird daher, wenn man jenen Radius = x ſetzt, der der berührenden Kugeln $= x(\sqrt{2} + 1)$. Nun ſoll dieſer gegeben ſein; es iſt alſo, wenn man ihn = R ſetzt,

$$x(\sqrt{2}+1) = R$$

$$\text{alſo wird } x = \frac{R}{\sqrt{2}+1} = R(\sqrt{2}-1).$$

Verbindet man ferner die Mittelpunkte von ſolchen vier Kugeln, von welchen jede, zwei der übrigen berührt, ſo wird die Figur ein Quadrat, deren Seite $= 2R$ iſt; alſo die halbe Diagonale dieſes Quadrats $= \frac{R}{2}\sqrt{2}$, und dieſe, um R vergrößert, muß nothwendiger Weiſe den Radius X der Kugel geben, die um die gegebenen ſechs Kugeln beſchrieben werden kann, ſo daß ſie alle berührt. Es iſt alſo

$$X = \frac{R}{2}\sqrt{2} + R = R\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right).$$

3. Es iſt $A\gamma B$, Fig. 55., der Durchſchnitt einer Halbkugel, und daher für $ca = cb$ iſt $a\alpha\gamma\beta b$ der Durchſchnitt eines Cylinders, der oben in einem Kugelabſchnitte endet; man ſoll den Kubikinhalt und die Oberfläche dieſes Körpers berechnen.

Auflöſung. Setzt man den Kubikinhalt des Abſchnitts $\alpha\gamma\beta = A$ und den des Cylinders $ab\beta\alpha = C$ und den geſuchten Inhalt des ganzen Körpers $= X$, ſo iſt

$$X = A + C,$$

und es iſt nun für $Ac = cB = R$, $\gamma d = h$ und alſo $cd = R - h$ nach §. 81.

$$A = (Rh^2 - \tfrac{1}{3}h^3)\pi$$

$$\text{und } C = (d\beta)^2 (R - h)\pi,$$

$$\text{oder weil } (d\beta)^2 = h(2R - h);$$

ſo iſt

$$C = h(2R - h)(R - h)\pi,$$

und hieraus erhält man

$$X = 2R^2h\pi - 2Rh^2\pi + \tfrac{2}{3}h^3\pi$$

$$= 2h(R^2 - Rh + \tfrac{1}{3}h^2)\pi.$$

Ferner iſt die krumme Oberfläche des Abſchnittes $\alpha\gamma\beta =$

$$2R\pi \times h = 2Rh\pi;$$

die krumme Oberfläche des Cylinders $a\alpha\beta b =$

$$2(cb)\pi \times (R - h) = 2(R - h)\pi\sqrt{(2Rh - h^2)};$$

folglich iſt die krumme Oberfläche des ganzen Körpers, die durch ca beſchriebene Grundfläche deſſelben nicht mitgerechnet,

$$F = 2Rh\pi + 2\,(R - h)\,\pi\,\sqrt{(2Rh - h^2)}.$$

Zuſatz 1. Für $h = \frac{1}{2}R$ wird

$$X = R \cdot \frac{7}{12}\,R^2\pi = \frac{7}{12}\,R^3\pi$$

$$\text{und } F = R^2\pi + R\pi\,\sqrt{\frac{3R^2}{4}} = R^2\pi(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{3})$$

Zuſatz 2. Bei der Umdrehung des Viertelkreiſes $cB\beta\gamma$ um $c\gamma$ beſchreibt derſelbe die Halbkugel; $cb\beta\gamma$ beſchreibt den in einem Kugelabſchnitt endenden Cylinder und alſo $bB\beta$ den übrig bleibenden Theil der Halbkugel, wenn jener Cylinder weggenommen wird, und es iſt der Inhalt Z dieſes übrig bleibenden Theils

$$Z = \tfrac{1}{2}G - X;$$

$$\text{alſo } Z = \frac{2R^3\pi}{3} - X,$$

und da für $h = \frac{1}{2}R$ wird $X = \frac{7}{12}\,R^3\pi$;

ſo iſt in dieſem Falle

$$Z = \frac{1}{12}\,R^3\pi$$

$$\text{und } X : Z = 7 : 1;$$

der Cylinder iſt alſo in dieſem Falle $\frac{7}{8}$ und der übrig bleibende Theil $\frac{1}{8}$ der Halbkugel.

Zuſatz 3. Soll der Cylinder nicht gerade bis zur Grundfläche der Halbkugel reichen, ſondern ſoll z. B. $a'b'$ der Durchmeſſer der Grundfläche deſſelben ſein, ſo iſt für $dc' = H$

$$C = h\,(2R - h) \cdot H\pi$$

$$\text{und } A = h\,(Rh - \tfrac{1}{3}h^2)\,\pi;$$

folglich iſt alsdann

$$X = C + A =$$

$$h\pi\,[(2R - h)\,H + (R - \tfrac{1}{3}h)h],$$

und es läßt ſich auch für dieſen Fall der übrig bleibende Theil des Abſchnittes, deſſen Höhe $= c'\gamma = H + h$ iſt, berechnen, wenn der Cylinder weggenommen wird.

Setzt man in der Formel

$$X = h\pi\,[(2R - h)\,H + (R - \tfrac{1}{3}h)\,h],$$

$$H = \frac{R - h}{3};$$

ſo wird

$$X = \frac{2hR^2\pi}{3},$$

und da $\frac{1}{2}G = \frac{2}{3}R^3\pi$, ſo iſt

$$X : \tfrac{1}{2}G = h : R,$$

und daher, weil $\frac{1}{2}G - X = Z$ geſetzt worden iſt im Zuſatz 2.,

$$X : Z = h : R - h;$$

für jede beliebige Höhe $\gamma\delta$ des Abſchnitts iſt alſo, wenn man dem angeſetzten Cylinder den dritten Theil der Höhe von dc giebt, das Verhältniß des ganzen Körpers X zu dem, was von der Halbkugel übrig bleibt, wenn man dieſen Körper wegnimmt, wie h : R — h. Hieraus folgt zugleich, daß wenn $h = \frac{1}{2}R$ iſt, auch $X = Z$ wird; der in einem Kugelabſchnitt endende Cylinder iſt alſo in dieſem Falle der Hälfte der Halbkugel gleich, oder, was daſſelbe iſt, dieſer Körper iſt eben ſo groß, als das, was von der Halbkugel übrig bleibt, wenn man dieſen Körper wegnimmt.

4. Wenn $\alpha ab\beta$, Fig. 55., der Durchſchnitt des möglichſt größten Cylinders in der Halbkugel iſt, und man bezeichnet den Inhalt deſſelben mit C und den der Halbkugel mit g, ſo findet die Proportion ſtatt

$$g : C = \sqrt{3} : 1,$$

und daher $g^2 : C^2 = 3 : 1$.

Die Höhe $a\alpha = cd$ dieſes Cylinders iſt dem dritten Theile der Seite des gleichſeitigen Dreiecks gleich, das in einen größten Kreis der Kugel hineingezeichnet werden kann.

Beweis. Es iſt die Seite des gleichſeitigen Dreiecks im Kreiſe, wenn der Radius mit R bezeichnet wird, $= R\sqrt{3}$; alſo iſt der dritte Theil derſelben =

$$\frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Für $cd = x = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$ iſt $d\beta = \sqrt{(\gamma c - cd)\,(\gamma c + cd)}$;

nämlich es iſt $d\beta = cb = \sqrt{(R - x)(R + x)}$

$$= (\sqrt{R^2 - x^2}) = \sqrt{\left(R^2 - \frac{R^2}{3}\right)} = \sqrt{\tfrac{2}{3}R^2}$$

und daher $(cb)^2 = \tfrac{2}{3}R^2$.

Nun iſt aber $C = (cb)^2 \cdot (cd) \cdot c$;

$$\text{alſo iſt } C = \tfrac{2}{3}R^2 \cdot \frac{R}{\sqrt{3}}\pi = \tfrac{2}{3}R^3\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und die Halbkugel g iſt $g = \tfrac{2}{3}R^3\pi$.

Wenn man alſo die Höhe des Cylinders $= \frac{R}{\sqrt{3}}$ nimmt, wenn man demſelben alſo den dritten Theil der Seite des gleichſeitigen Dreiecks in dem größten Kreiſe der Kugel zur Höhe giebt, ſo findet die Proportion ſtatt

$$g : C = \tfrac{2}{3}R^3\pi : \tfrac{2}{3}R^3\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= 1 : \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} : 1$$

und $g^2 : C^2 = 3 : 1$;

es kommt alſo jetzt noch darauf an, zu beweiſen, daß für eine Höhe x des Cylinders $= \frac{R}{\sqrt{3}}$ dieſer einen größeren Inhalt hat, als für jeden anderen Werth von x.

Für die Höhe des Cylinders $cd = x$, iſt der Inhalt desſelben

$$C = x(R^2 - x^2)\pi,$$

und für $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$ ergiebt ſich

$$C = \tfrac{2}{3}R^3\pi \times \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nun ſei $x = \frac{R}{\sqrt{3}} + z$, wo z einen poſitiven oder negativen Werth haben kann, ſo wird

$$x^2 = \frac{R^2}{3} + \frac{2Rz}{\sqrt{3}} + z^2$$

$$\text{alſo } R^2 - x^2 = \tfrac{2}{3}R^2 - \frac{2Rz}{\sqrt{3}} - z^2$$

$$\text{und } x(R^2 - x^2) = \tfrac{2}{3}R^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{3Rz^2}{\sqrt{3}} - z^3;$$

folglich wird in dieſem Falle

$$C = \tfrac{2}{3}R^3\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - z^2\,\pi\left(\frac{3R}{\sqrt{3}} - z\right).$$

Da nun $\frac{3R}{\sqrt{3}} - z$ ſowohl als z^2 immer einen poſitiven Werth hat, man mag z poſitiv oder negativ nehmen; ſo folgt, daß für $x = \frac{R}{\sqrt{3}} + z$ der Inhalt des Cylinders immer kleiner iſt, als $\tfrac{2}{3}R^3\pi \times \frac{1}{\sqrt{3}}$ und es iſt daher $\tfrac{2}{3}R^3\pi \times \frac{1}{\sqrt{3}}$ wirklich der Inhalt des möglichſt größten Cylinders, der in die Halbkugel hineingezeichnet werden kann.

5. Man ſoll in die Halbkugel, deren Durchſchnitt $A\gamma B$, Fig. 55., iſt, einen Cylinder, von welchem $ab\beta\alpha$ der Durchſchnitt iſt, hineinzeichnen, der einen beſtimmten Kubikinhalt hat.

Aufloͤſung. Wird der gegebene Kubikinhalt mit $R^3\pi \cdot k$ bezeichnet, ſo muß, weil $\tfrac{2}{3}R^3\pi \times \frac{1}{\sqrt{3}}$ der möglichſt größte Cylinder iſt, nach No. 4., entweder $k = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$ oder $k < \tfrac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$ ſein. Setzt man aber die Höhe des Cylinders $= x$, ſo iſt der Inhalt deſſelben $= x\,(R^2 - x^2)\,\pi$; alſo bekommt man die Gleichung

$$x\,(R^2 - x^2)\,\pi = R^3\pi \cdot k,$$

und daher wird $x^3 - R^2x + R^3k = o$,

und ſetzt man nun $x = p \sin\varphi$, ſo wird dieſe Gleichung

$$p^3 \sin^3\varphi - R^2p \sin\varphi + R^3k = o,$$

und daher

$$1.\quad \sin^3\varphi - \frac{R^2}{p^2}\sin\varphi + \frac{R^3}{p^3}k = o.$$

Es iſt aber, wie bereits §. 83. gezeigt worden,

$$2.\quad \sin^3\varphi - \tfrac{3}{4}\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 3\varphi = o;$$

ſollen alſo dieſe beiden Gleichungen demſelben Werthe von φ entſprechen, ſo muß ſein

$\tfrac{3}{4} =$

$$\tfrac{3}{4} = \frac{R^2}{p^2} \text{ und } \tfrac{1}{4}\sin 3\varphi = \frac{R^3}{p^3}\cdot k$$

$$\text{alſo } p = \frac{2R}{\sqrt{3}} \text{ und } \sin 3\varphi = \frac{4R^3}{p^3}\cdot k$$

$$\text{oder } \sin 3\varphi = \frac{4R^3\cdot 3\sqrt{3}}{8R^3}\cdot k = \tfrac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot k.$$

Nun iſt der möglichſt größte Werth, den k haben kann, $= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$; alſo wird in dieſem Falle

$$\sin 3\varphi = \tfrac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\times\tfrac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 1$$

und es iſt alsdann $3\varphi = 90°$, alſo $\varphi = 30°$,

$$\text{und daher } x = p\sin\varphi = \frac{2R}{\sqrt{3}}\cdot\sin 30°$$

$$= \frac{2R}{\sqrt{3}}\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

ein Werth, der mit dem in No. 4. angegebenen übereinſtimmt.

Iſt aber $k < \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$ ſo wird $\sin 3\varphi < 1$, und es läßt ſich daher in jedem Falle der Werth von x beſtimmen durch die beiden Gleichungen

$$\sin 3\varphi = \tfrac{3}{2}k\cdot\sqrt{3} \text{ und } p = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

von welchen der Werth von x ſo abhängt, daß da iſt

$$x = p\sin\varphi = \frac{2R}{\sqrt{3}}\cdot\sin\varphi.$$

Soll z. B. der Cylinder der Hälfte der Halbkugel gleich ſein, ſo muß $C = \frac{1}{3}R^3\pi$ werden, und weil bei der Auflöſung der Aufgabe geſetzt wurde

$C = R^3\pi\cdot k$, ſo iſt jetzt $k = \frac{1}{3}$

alſo $\sin 3\varphi = \frac{3}{2}k\cdot\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$

Da nun $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60°$, ſo iſt $\varphi = 20°$

$$\text{und } x = \frac{2R\sin 20°}{\sqrt{3}}.$$

6. Es iſt in einem größten Kreiſe einer Kugel ein Quadrat beſchrieben, welches der Axendurchſchnitt eines Cylinders in der Kugel iſt, und ein gleichſeitiges Dreieck, als der Axendurchſchnitt eines gleichſeitigen Kegels in eben dieſer Kugel;

es ſoll beſtimmt werden, wie dieſe Körper und wie ihre Oberflächen von einander abhängen.

Aufloſung. Für den Radius = R iſt die Seite des Quadrats in dem Kreiſe = $R\sqrt{2}$, und die Seite des gleichſeitigen Dreiecks in demſelben = $R\sqrt{3}$; die Höhe dieſes Dreiecks iſt alſo = $\frac{R\sqrt{3}}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}R$. Hiernach iſt die Höhe des Cylinders = $R\sqrt{2}$, und der Radius der Grundfläche deſſelben = $\frac{1}{2}R\sqrt{2}$, der Radius der Grundfläche des Kegels = $\frac{1}{2}R\sqrt{3}$ und die Höhe deſſelben = $\frac{3}{2}R$. Es iſt alſo

der Inhalt der Kugel $G = \frac{4R^3\pi}{3}$

" " des Cylinders $C = \frac{R^3\sqrt{2}}{2}\pi$

" " des Kegels $K = \frac{3R^3\pi}{8}$,

folglich iſt $G : C : K = \frac{4}{3} : \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{3}{8}$

$= 32 : 12\sqrt{2} : 9.$

Ferner iſt die Oberfläche der Kugel $Gf = 4R^2\pi$
die ganze Oberfläche des Cylinders $Cf = 3R^2\pi$
" " " " Kegels $Kf = \frac{9R^2}{4}\pi$,

und daher $Gf : Cf : Kf : = 4 : 3 : \frac{9}{4}$

$= 16 : 12 : 9$

Zuſatz. Beſchreibt man um einen größten Kreis der Kugel ein Quadrat und ein gleichſeitiges Dreieck, und ſind dieſe die Axendurchſchnitte eines Cylinders und eines Kegels, die um dieſe Kugel beſchrieben werden können, ſo iſt die Höhe des Cylinders = 2R und der Radius der Grundfläche deſſelben = R.

Die Seite des gleichſeitigen Dreiecks iſt in dieſem Falle = $2R\sqrt{3}$, und daher
der Radius der Grundfläche deſſelben = $R\sqrt{3}$
und die Höhe = 3R.

Es iſt alſo in dieſem Falle

der Inhalt der Kugel $G = \frac{4R^3\pi}{3}$,

der Inhalt des Cylinders $C = 2R^3\pi$,
" " des Kegels $K = 3R^3\pi$
und daher $G : C : K = 4 : 6 : 9$.

Jetzt iſt die ganze Oberfläche der Kugel $= Gf = 4R^2\pi$
" " " des Cylinders $= Cf = 6R^2\pi$
und " " " des Kegels $= Kf = 9R^2\pi$
und daher auch $Gf : Cf : Kf = 4 : 6 : 9$.

Wenn man alſo um eine Kugel einen gleichſeitigen Cylinder und einen gleichſeitigen Kegel beſchreibt, ſo verhält ſich der Inhalt dieſer Körper zu einander eben ſo, wie ihre Oberflächen; nämlich es iſt

$$G : C : K = Gf : Cf : Kf = 4 : 6 : 9.$$

7. In einen normalen Kegel, deſſen Seite $= a$ iſt, und der einen Radius der Grundfläche hat $= R$, ſoll eine Kugel hineingezeichnet und das Verhältniß dieſer Kugel zu dem Kegel angegeben werden.

Auflöſung. Der Axendurchſchnitt des Kegels iſt ein gleichſchenkliges Dreieck, deſſen Grundlinie $= 2R$ und deſſen Schenkel $= a$ iſt, und der Kreis, der in dieſes Dreieck hineingezeichnet werden kann, iſt, wie leicht einzuſehen, ein größter Kreis der Kugel; es iſt daher der Radius dieſes Kreiſes auch der Radius der Kugel. Nun iſt aber, wenn man den Radius des Kreiſes, der in das Dreieck hineingezeichnet werden kann, $= \varrho$ ſetzt, die drei Seiten des Dreiecks $= a$, b und c, die Höhe deſſelben, in Beziehung auf die Grundlinie c, $= h$ und die Fläche des Dreiecks $= F$,

$$F = \frac{ch}{2} = \frac{\varrho\,(a + b + c)}{2};$$

$$\text{folglich iſt } \varrho = \frac{ch}{a + b + c}$$

und da in dem gegenwärtigen Falle $a = b$ und $c = 2R$,

$$\text{ſo wird } \varrho = \frac{ch}{2\,(a + R)} = \frac{Rh}{a + R}.$$

Nun iſt der Inhalt der Kugel $G = \frac{4\varrho^3\pi}{3}$, es iſt alſo auch

$$G = \tfrac{4}{3}\left(\frac{Rh}{a + R}\right)^3 \pi = \frac{4R^3h^3\pi}{3\,(a + R)^3}$$

und der Inhalt des Kegels iſt $K = \frac{R^2h\pi}{3}$

alſo wird

$$G : K = \frac{4R^3h^3\pi}{3\,(a+R)^3} : \frac{R^2h\pi}{3}$$
$$= 4Rh^2 : (a+R)^3.$$

Es iſt aber $h^2 = a^2 - R^2 = (a+R)(a-R)$,

folglich iſt $G : K = 4R\,(a-R) : (a+R)^2$

das Verhältniß der Kugel zu dem Kegel. Für $a = 2R$ iſt der Kegel gleichſeitig, und es wird das Verhältniß $= 4 : 9$, wie auch in No. 6. gefunden worden iſt.

Zuſatz. Die Oberfläche der Kugel iſt

$$Gf = 4\varrho^2\pi = 4\left(\frac{Rh}{a+R}\right)^2\pi,$$

und die ganze Oberfläche des Kegels

$$Kf = aR\pi + R^2\pi = R\,(a+R)\,\pi;$$

folglich iſt

$$Gf : Kf = \frac{4R^2h^2\pi}{(a+R)^2} : R\,(a+R)\,\pi$$
$$= 4Rh^2 : (a+R)^3 = 4R\,(a-R) : (a+R)^2$$
$$= G : K.$$

Wird alſo in irgend einen normalen Kegel eine Kugel hineingezeichnet, ſo verhält ſich der Inhalt dieſer Körper zu einander immer wie ihre Oberflächen.

8. Auf der Oberfläche einer Kugel ſollen mehrere Punkte angegeben werden, ſo daß, wenn man dieſe Punkte durch Bogen größter Kreiſe verbindet, die ganze Oberfläche der Kugel dadurch in lauter gleiche Vierecke zerlegt wird, von welchen jedes 4 gleiche Seiten und 4 gleiche Winkel hat. Wieviel ſolcher Vierecke ſind möglich, und wie groß ſind die Winkel und die Seiten derſelben?

Auflöſung. Da jedes Viereck gleiche Seiten und gleiche Winkel haben ſoll, ſo wird es durch die Diagonale in zwei gleichſchenklige Dreiecke zerlegt, in dieſen iſt der Winkel an der Grundlinie halb ſo groß, als der der Grundlinie gegenüberliegende Winkel, alſo als der Winkel des Vierecks ſelbſt. Setzt man alſo den Winkel des Vierecks $= a$, ſo iſt jeder der beiden übrigen Winkel eines jeden der beiden Dreiecke $= \frac{1}{2}a$.

Nun wird für den Radius = 1 die Fläche F eines jeden ſphäriſchen Dreiecks ausgedrückt durch

$$F = (a + b + c - \pi),$$

alſo iſt hier, weil $b = c = \frac{1}{2}a$,

$$F = (2a - \pi).$$

Die Fläche eines Vierecks iſt folglich =

$$2F = 2\,(2a - \pi),$$

und wenn die ganze Oberfläche der Kugel aus x ſolcher Vierecke beſteht, ſo hat man, weil die ganze Oberfläche $= 4\pi$ iſt,

$$2x\,(2a - \pi) = 4\pi, \text{ alſo } 2ax - x\pi = 2\pi.$$

Stoßen nun m Vierecke in einem Punkte zuſammen, ſo iſt

$$ma = 360^\circ = 2\pi$$

$$\text{alſo } a = \frac{2\pi}{m}$$

und daher iſt auch

$$2\left(\frac{2\pi}{m}\right)x - x\pi = 2\pi,$$

$$\text{alſo } x = \frac{2m}{4 - m}.$$

Da nun m wenigſtens = 3 ſein muß, weil ſonſt $a = 180^\circ$ wird, und wenn man $m > 3$ nimmt, x einen negativen Werth erhält, ſo iſt wirklich $m=3$ und daher $x=6$. Es ſind alſo 6 ſolcher Vierecke auf der Oberfläche der Kugel möglich, die zuſammen 24 Winkel haben, und weil immer drei Winkel in einem Punkte zuſammenſtoßen, ſo folgt, daß dieſe 6 Vierecke durch 8 Punkte auf der Oberfläche der Kugel ihrer Lage nach beſtimmt ſind.

Da $ma = 360^\circ$ und $m = 3$,
ſo iſt $a = 120^\circ$ und $\frac{1}{2}a = 60^\circ$.

Nämlich es ſind in jedem der beiden Dreiecke, in welche ein Viereck durch die Diagonale zerlegt wird, die Winkel, welche den Seiten des Vierecks gegenüber liegen, $= 60^\circ$ und der der Diagonale gegenüberliegende Winkel iſt $= 120^\circ$. Da nun ganz allgemein für $r = 1$

$$\cos B = \frac{\cos b + \cos a \cos c}{\sin a \sin c},$$

ſo iſt B eine Seite des Vierecks, wenn man ſetzt $b = c = 60^\circ$

und $a = 120^0$, und hierdurch iſt die Größe der Seite beſtimmt; nämlich es iſt

$$\cos B = \frac{\cos 60^0 + \cos 120^0 \cos 60^0}{\sin 120^0 \sin 60^0}$$

$$= \frac{\cos 60^0 - \cos^2 60^0}{\sin^2 60^0} = \frac{\sin 30^0 - \sin^2 30^0}{\sin^2 60^0}.$$

Es iſt aber $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ und $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, folglich iſt

$$\cos B = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

§. 91.

Uebungen.

1. Es iſt §. 87. gezeigt worden, daß die ganze Oberfläche der Kugel auf verſchiedene Arten in lauter gleich große, gleichſeitige Dreiecke zerlegt werden kann, und es läßt ſich der ganze Raum, nach §. 90. No. 8., auch in gleich große, gleichſeitige und gleichwinklige Vierecke zerlegen. Außerdem iſt nun aber auch noch möglich, auf der Oberfläche der Kugel mehrere Punkte ſo anzugeben, daß ſie dadurch in lauter gleiche gleichſeitige Fünfecke zerlegt wird; es beträgt die Anzahl derſelben 12, und die dazu erforderliche Anzahl Punkte auf der Oberfläche der Kugel iſt 20.

2. Wird eine Figur auf der Oberfläche der Kugel regelmäßig genannt, wenn die Seiten derſelben gleich große Bogen größter Kreiſe und alle Winkel derſelben gleich groß ſind, ſo läßt ſich, mit Hülfe der Sätze §. 87., §. 90. No. 6. und des obigen Satzes No. 1., beweiſen, daß nur auf 5 verſchiedene Arten die ganze Oberfläche der Kugel in gleich große, regelmäßige Figuren zerlegt werden kann, und zwar entweder in 4 oder in 8 oder in 20 Dreiecke, oder in 6 Vierecke, oder endlich in 12 Fünfecke. Uebrigens wird hierbei das Dreieck als einfachſte Figur angeſehen, da ſich die Oberfläche auf unendlich viele Arten in Zweiecke zerlegen läßt, von welchen jedes durch zwei größte Halbkreiſe gebildet wird. Iſt z. B. BD, Fig. 48., der nte Theil des Kreisumfanges, ſo iſt auch das Zweieck MBND der nte Theil der ganzen Oberfläche der Kugel.

3. Durch Parallelkreiſe läßt ſich die Oberfläche der Kugel ſehr leicht in jede beliebige Anzahl Gürtel oder Zonen zerlegen, die ſämmtlich gleich groß ſind. Sollen die Kreiſe parallel

zu dem größten Kreiſe ADB, Fig. 48., laufen, und ſoll die Oberfläche der Halbkugel dadurch in n gleiche Theile getheilt werden, ſo braucht man nur den Radius MC der Axe MN in n gleiche Theile zu theilen, und durch die Theilpunkte die Parallelen zu ADB zu ziehen, ſo iſt das Verlangte geſchehen.

4. Die Oberfläche der Halbkugel ADBM, Fig. 48., wird durch Parallelkreiſe zu ADB in n gleiche Theile getheilt: nach welchem Verhältniſſe wird der Quadrant MdD durch dieſe Parallelen getheilt, oder, was daſſelbe iſt, wieviel Grad hält jeder der n Bogen, in welche der Quadrant von den Parallelkreiſen zerlegt wird?

5. Wenn zwei Punkte auf der Oberfläche einer Kugel durch den Bogen eines kleinern Kreiſes verbunden werden, ſo iſt dieſer ſeiner wahren Länge nach immer größer, als der zwiſchen dieſen Punkten liegende Bogen eines größten Kreiſes; es iſt alſo der Bogen eines größten Kreiſes immer die kürzeſte Linie zwiſchen zwei Punkten auf der Oberfläche der Kugel.

6. Wenn die Höhe eines Kugelabſchnitts $= h$, der Radius der Grundfläche deſſelben $= \varrho$, der Radius der Kugel $= R$, der Kubikinhalt des Abſchnitts $= A$ und die ganze Oberfläche deſſelben $= F$ geſetzt wird, ſo finden nach §. 81. zwiſchen dieſen Größen die Gleichungen ſtatt

$$A = [\tfrac{1}{2}\varrho^2 h + \tfrac{1}{6}h^3]\,\pi,$$
$$F = (2\varrho^2 + h^2)\,\pi$$
$$\text{und } \varrho^2 = h\,(2R - h).$$

Es laſſen ſich alſo, wenn zwei der hier vorkommenden 5 Größen h, ϱ, R, A, F, gegeben ſind, die drei übrigen finden. Werden hier alle mögliche Fälle entwickelt, ſo erhält man 30 verſchiedene Formeln, von welchen einige aus Gleichungen des dritten Grades abgeleitet werden müſſen. Es iſt nun in jedem Falle eine zweckmäßige Uebung, eine Tabelle anzufertigen, welche alle hier möglichen Formeln enthält.

7. Der Kubikinhalt einer Kugel verhält ſich zu dem Inhalte eines Würfels, der den Durchmeſſer der Kugel zur Seite hat, ziemlich genau wie 111 : 212, und genauer noch wie 122 : 233. Für das erſte dieſer beiden Verhältniſſe iſt die Verhältnißzahl für die Kugel um eine Kleinigkeit zu groß und für das zweite Verhältniß um etwas zu klein.

8. Man kann ſowohl in einem Würfel als um denſelben eine Kugel beſchreiben; die erſtere berührt alle Flächen deſſelben und die letztere geht durch alle Ecken des Würfels: und dem Inhalte nach verhält ſich die erſtere dieſer beiden Kugeln zu der anderen wie $1 : 3\sqrt{3}$ und ihre Oberflächen verhalten ſich wie $1 : 3$.

9. Der Quadrant MdD, Fig. 48., eines größten Kreiſes der Kugel iſt in drei gleiche Theile getheilt, und es ſind durch die Theilpunkte Parallelkreiſe zu ADB gezogen; wie verhalten ſich die drei Theile zu einander, in welche die Halbkugel durch dieſe Flächen getheilt wird, und wie verhalten ſich ihre krummen Oberflächen?

10. Es ſollen drei gleichweit von einander abſtehende Punkte auf der Oberfläche einer Kugel angegeben werden, ſo daß das hierdurch beſtimmte ſphäriſche Dreieck den nten Theil der ganzen Kugelfläche beträgt.

11. Von einem Kugelabſchnitte adbM, Fig. 48., von welchem die Höhe $cM = h$ und der Radius der Grundfläche $ca = \varrho$ gegeben ſind, ſoll ein Ausſchnitt acdM genommen werden, der die Eigenſchaft hat, daß die ſämmtlichen begränzenden Flächen deſſelben, alſo $aMd + acd + acM + dcM$ zuſammengenommen der krummen Oberfläche des ganzen Abſchnitts gleich ſind; wieviel Grad muß der Bogen ad halten?

12. Es iſt eine dreiſeitige Pyramide gegeben; man ſoll eine Kugel innerhalb derſelben beſchreiben, die alle 4 Flächen dieſer Pyramide berührt.

13. abd, Fig. 56., iſt der Axendurchſchnitt eines normalen Kegels; dc iſt die Höhe deſſelben und ce der Durchmeſſer der in dieſem Kegel beſchriebenen Kugel; durch e iſt die Linie fg parallel zu ab gezogen, ſo daß nun abgf der Durchſchnitt eines abgeſtumpften Kegels iſt. Wie verhält ſich dieſer abgeſtumpfte Kegel zu dem ganzen Kegel, und wie verhält ſich derſelbe zu der Kugel?

14. Es ſind die Bogen größter Kreiſe Dd und Bb, Fig. 48., beide normal auf dem Bogen BD des größten Kreiſes ADB und es iſt $dD = bB = BD$, jeder dieſer Bogen $= 1^\circ$, ſo daß nun auch der Bogen bd eines Parallelkreiſes, welcher die Endpunkte b und d verbindet, ebenfalls 1° des

kleinern Kreiſes iſt. Wie groß iſt die Fläche des Vierecks BDdb?

15. Ein Kugelabſchnitt, deſſen Höhe = h iſt, wird ausgehöhlt, ſo, daß der übrig bleibende maſſive Theil durchgehends gleich dick iſt, und der weggenommene Theil zu dem übrig bleibenden wie m : n ſich verhält; welche Stärke oder Dicke hat der hohle Abſchnitt? wobei übrigens vorausgeſetzt wird, daß der Radius der ganzen Kugel bekannt iſt.

16. Von einem concentriſch ausgehöhlten Kugelabſchnitte, von welchem die Höhe und der Radius der Grundfläche gegeben ſind, beträgt die innere, alſo die durch die Aushöhlung erzeugte Fläche eben ſo viel, als die Grundfläche des ganzen Abſchnitts vorher betrug. Wie viel iſt dem Kubikinhalte nach von dem Abſchnitte hinweggenommen und welche Stärke hat der noch übrige maſſive Theil des Abſchnitts?

Achter Abſchnitt.

Von den regulairen Körpern.

§. 92.

Die regulaire Ecke.

Man nennt eine Ecke regulair, wenn ſie von lauter gleich großen ebenen Winkeln eingeſchloſſen wird, die alle unter gleichen Neigungswinkeln zuſammentreffen. Die Conſtruction einer ſolchen Ecke kann auf folgende Art gedacht werden: Es ſei abcde, Fig. 57., ein regulaires Vieleck und g der Mittelpunkt deſſelben; in g errichte man auf der Ebene des Vielecks eine Normale, und ziehe von irgend einem Punkte dieſer Normale, Linien nach den Ecken a, b, c, d und e des Vielecks, ſo bilden dieſe in dem angenommenen Punkte eine regelmäßige nkantige Ecke, wenn die Grundfläche eine nſeitige Figur iſt. Denn da g der Mittelpunkt der Figur abcde iſt, ſo ſteht

jeder Punkt der in g errichteten Normale von allen Ecken der Figur gleich weit ab, und es iſt daher, wenn man den in der Normale angenommenen Punkt mit m bezeichnet,

$$ma = mb = mc = md = me$$

und alſo auch

$$\Delta mab = \Delta mbc = \Delta mcd = \Delta mde = \Delta mea.$$

Die Ecke, deren Scheitel in m iſt, wird daher von lauter gleichen ebenen Winkeln eingeſchloſſen. Legt man nun durch die Diagonale be eine Ebene, ſo daß ſie die Kante am normal ſchneidet, und bezeichnet den Durchſchnittspunkt mit α, ſo iſt in dem dadurch beſtimmten Dreiecke $b e \alpha$ der Winkel $b \alpha e$ der Neigungswinkel der beiden Ebenen bam und eam. Eben ſo iſt, wenn man durch die Diagonale ac eine Ebene legt, welche die Kante bm normal in β ſchneidet, der Winkel $a \beta c$ des Dreieck $a c \beta$, der Neigungswinkel der beiden Ebenen abm und cbm. Nun ſind aber, wie leicht einzuſehen iſt, die Dreiecke $b \alpha e$ und $c \beta a$ congruent, folglich iſt auch $\angle b \alpha e = \angle c \beta a$; der Neigungswinkel der beiden Ebenen eam und bam iſt alſo dem Neigungswinkel gleich, welchen die beiden Ebenen abm und cbm mit einander bilden. Da nun daſſelbe von allen übrigen Neigungswinkeln der körperlichen Ecke bei m gilt, ſo folgt, daß alle Neigungswinkel derſelben gleich groß ſind, und ſie iſt daher regulair.

Aus dieſem Satze folgt zugleich, daß wenn eine nkantige Ecke von n gleichen ebenen Winkeln eingeſchloſſen wird, ſo daß, wenn alle Kanten gleich groß genommen werden, ihre Endpunkte ein regelmäßiges nEck bilden, auch alle Neigungswinkel derſelben gleich groß ſein müſſen. Aus der Conſtruction geht übrigens auch hervor, daß m die Spitze einer normalen regelmäßigen nkantigen Pyramide iſt, alſo einer ſolchen Pyramide, die eine regelmäßige Grundfläche hat, und deren Axe, d. h. die Linie, welche die Spitze m mit dem Mittelpunkte g der Grundfläche verbindet, normal auf der Grundfläche iſt.

Die Abhängigkeit der ebenen und der Neigungswinkel einer regulairen körperlichen Ecke von einander und von der Anzahl der die Ecke begränzenden Ebenen ergiebt ſich auf folgende Art:

Man ſetze in dem gleichſchenkligen Dreieck ame den Winkel ame, welcher einer der ebenen Winkel der körperlichen Ecke iſt, $= m$ und $\angle eam = k$, alſo $k = \frac{180^0 - m}{2}$, den Neigungswinkel der beiden Ebenen eam und bam, alſo $\angle e\alpha b = \mu$ und den Polygonalwinkel eab der regelmäßigen Grundfläche abcde $= p$, ſo iſt, Fig. 57a., wenn eam eins der gleichſchenkligen Dreiecke iſt, welche die Seitenflächen der regelmäßigen Pyramide bilden,

$$ae : e\alpha = r : \sin k$$

und es iſt daher, wenn man $ab = bc = cd = de = ea = a$ ſetzt und $e\alpha = \alpha$,

$$a : \alpha = r : \sin k,$$

$$\text{alſo } \alpha = \frac{a \sin k}{r}.$$

Die durch eb ſo gelegte Ebene, daß ſie auf der Kante am normal ſteht, wird von den Ebenen eam und bam ſo geſchnitten, daß dadurch das gleichſchenklige Dreieck eαb, Fig. 57b., gebildet wird, und es iſt hier $\angle e\alpha b = \mu$, einer der Neigungswinkel der körperlichen Ecke m. Nun iſt aber in jedem Dreiecke von zwei Seiten und dem eingeſchloſſenen Winkel die dritte Seite ſo abhängig, daß die Gleichung ſtatt findet

$$(be)^2 = (\alpha b)^2 + (\alpha e)^2 - 2(\alpha b)(\alpha e)\frac{\cos \mu}{r},$$

folglich iſt hier, weil $\alpha b = \alpha e = \alpha$

$$(be)^2 = 2\alpha^2 - 2\alpha^2 \cdot \frac{\cos \mu}{r}.$$

Eben ſo iſt, Fig. 57., in dem gleichſchenkligen Dreiecke bae, weil $ab = ae = a$ und $\angle bae = p$,

$$(be)^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \frac{\cos p}{r}.$$

Werden nun die beiden Werthe von $(be)^2$ einander gleich geſetzt, ſo erhält man

$$2a^2 - 2a^2 \cdot \frac{\cos p}{r} = 2\alpha^2 - 2\alpha^2 \cdot \frac{\cos \mu}{r}.$$

Es iſt aber gefunden worden $\alpha = \frac{a \sin k}{r}$

folglich iſt auch

$$a^2 - a^2 \cdot \frac{\cos p}{r} = \frac{a^2 \sin^2 k}{r^2} - \frac{a^2 \sin^2 k}{r^2} \cdot \frac{\cos \mu}{r}$$

und daher

$$r - \cos p = \frac{\sin^2 k}{r^2} (r - \cos \mu).$$

Da nun $k = \frac{180^0 - m}{2} = 90^0 - \frac{1}{2}m$,

ſo iſt $\sin k = \cos \frac{1}{2}m$ und es iſt daher auch

$$r^2 (r - \cos p) = \cos^2 \tfrac{1}{2}m\,(r - \cos \mu);$$

nämlich es iſt

$$\frac{r^2 (r - \cos p)}{\cos^2 \frac{1}{2}m} = r - \cos \mu,$$

und daher $\cos \mu = r - \frac{r^2 (r - \cos p)}{\cos^2 \frac{1}{2}m}$

oder $\cos \mu = \frac{r^2 \cos p - r \sin^2 \frac{1}{2}m}{\cos^2 \frac{1}{2}m}$.

Hier iſt p der Polygonalwinkel, alſo wenn die Ecke von n Flächen begränzt wird,

$$p = \left(\frac{n-2}{n}\right) \cdot 180^0$$

bekannt, und es läßt ſich daher in jedem Falle der Werth von μ berechnen, wenn m gegeben iſt.

Auch die Größe des Neigungswinkels φ, welchen die Kante ma mit der Grundfläche bildet, läßt ſich leicht berechnen; denn es iſt in dem rechtwinkligen Dreieck agm

$$am : ag = r : \cos \varphi$$

alſo $\cos \varphi = \left(\frac{ag}{am}\right) r.$

Da nun in dem gleichſchenkligen Dreieck age

$$ag : \tfrac{1}{2}(ae) = r : \cos \tfrac{1}{2}p$$

ſo iſt $(ag) = \frac{ar}{2\cos \frac{1}{2}p}$

und eben ſo iſt in dem gleichſchenkligen Dreieck aem, Fig. 57a.,

$$am : \tfrac{1}{2}(ae) = r : \cos k$$

alſo $(am) = \frac{ar}{2\cos k} = \frac{ar}{2 \sin \frac{1}{2}m}$.

Es iſt alſo $\left(\frac{ag}{am}\right) = \frac{\sin \frac{1}{2}m}{\cos \frac{1}{2}p}$

$$\text{und daher iſt } \cos\varphi = \frac{r \sin \tfrac{1}{2}m}{\cos \tfrac{1}{2}p}.$$

Zuſatz 1. Für $n = 3$, wenn alſo die Ecke von drei Flächen begränzt wird, iſt $p = 60^0$; alſo $\cos p = \tfrac{1}{2}r$ und $\cos \tfrac{1}{2}p = \cos 30^0 = \frac{r}{2} \sqrt{3}$; folglich iſt für $n = 3$

$$\cos\mu = \frac{\tfrac{1}{2}r^3 - r \sin^2 \tfrac{1}{2}m}{\cos^2 \tfrac{1}{2}m} \text{ und } \cos\varphi = \frac{2 \sin \tfrac{1}{2}m}{\sqrt{3}}.$$

Für $n = 4$ wird $p = 90^0$; alſo $\cos p = 0$ und $\cos \tfrac{1}{2}p = \cos 45^0 = \frac{r}{2} \sqrt{2}$, und es iſt daher für $n = 4$

$$\cos\mu = -\frac{tg^2 \tfrac{1}{2}m}{r} \text{ und } \cos\varphi = \sin \tfrac{1}{2}m \cdot \sqrt{2}.$$

Für $n = 5$ wird $p = 108^0$ und $\tfrac{1}{2}p = 54^0$, und daher $\cos p = -\cos 72^0 = -\frac{r}{4}(-1 + \sqrt{5})$

$$\text{und } \cos \tfrac{1}{2}p = \frac{r}{4} \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}.$$

Es läßt ſich daher auch in dieſem Falle der Werth von μ ſowohl, als der von φ, leicht berechnen.

Zuſatz 2. Wenn die Ecke von drei ebenen Winkeln gebildet wird, ſo iſt nach dem vorigen Zuſatze

$$\cos\mu = \frac{\tfrac{1}{2}r^3 - r \sin^2 \tfrac{1}{2}m}{\cos^2 \tfrac{1}{2}m} \text{ und } \cos\varphi = \frac{2 \sin \tfrac{1}{2}m}{\sqrt{3}}.$$

Iſt nun $m = 60^0$, ſo wird

$$\sin \tfrac{1}{2}m = \sin 30^0 = \frac{r}{2} \text{ und } \cos^2 \tfrac{1}{2}m = r^2 - \frac{r^2}{4} = \tfrac{3}{4}r^2,$$

und daher iſt in dieſem Falle

$$\cos\mu = \frac{\tfrac{1}{2}r^3 - \tfrac{1}{4}r^3}{\tfrac{3}{4}r^2} = r \text{ und } \tfrac{1}{3}\cos\varphi = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Iſt aber $m = 90^0$, ſo wird $\sin \tfrac{1}{2}m = \cos \tfrac{1}{2}m = \frac{r}{2} \sqrt{2}$;

$$\text{alſo } \cos\mu = \frac{\tfrac{1}{2}r^3 - \tfrac{1}{2}r^3}{\tfrac{1}{2}r^2} = 0,$$

$$\text{und daher } \mu = 90^0,$$

$$\text{und } \cos\varphi = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{r}{3}\sqrt{6},$$

u. ſ. w.

§. 93.

Von den regulairen Körpern überhaupt.

Ein Körper wird regulair genannt, wenn er von lauter congruenten regelmäßigen Figuren eingeſchloſſen wird, und alle Ecken deſſelben von gleich vielen ebenen Winkeln gebildet werden. Da die begränzenden Flächen alle regelmäßig und congruent ſind, ſo müſſen die Ecken natürlich von lauter gleich großen ebenen Winkeln begränzt werden. Nun iſt aber, wenn der Polygonalwinkel eines regelmäßigen nEcks = m geſetzt wird,

$$m = \left(\frac{n-2}{n}\right) \cdot 180^0$$

und wird nun jede Ecke von k ebenen Winkeln gebildet, ſo iſt die Summe aller Winkel einer Ecke =

$$k\left(\frac{n-2}{n}\right) \cdot 180^0,$$

wo k wenigſtens = 3 ſein muß. Die Summe aller, eine körperliche Ecke bildenden, ebenen Winkel iſt immer kleiner als 360°; alſo erhält man für die Werthe von n und k die Bedingungsgleichung

$$k\left(\frac{n-2}{n}\right) \cdot 180^0 < 360^0,$$

$$\text{und daher } k\,(n-2) < 2n,$$

wo k und n ganze Zahlen ſein müſſen, von welchen keine < 3 ſein kann.

Aus der Bedingung $k\,(n-2) < 2n$

$$\text{aber folgt } n < \frac{2k}{k-2}$$

und es muß daher ſein

$$\begin{aligned} \text{für } k &= 3, \quad n < 6 \\ \text{„} \quad k &= 4, \quad n < 4 \\ \text{„} \quad k &= 5, \quad n < 3\tfrac{1}{3} \\ \text{„} \quad k &= 6, \quad n < 3 \end{aligned}$$

und der Werth von n wird immer kleiner, je größer man k annimmt. Da nun wenigſtens n = 3 ſein muß, ſo folgt, daß k = 6 oder k > 6 nicht ſein kann: in einem regulairen

Körper kann alſo keine Ecke von mehr als fünf ebenen Winkeln begränzt werden. Nun muß $n < 4$ ſein, ſowohl für $k = 4$, als auch für $k = 5$; alſo kann in dieſen beiden Fällen nur $n = 3$ ſein; wenn nämlich die Ecken eines regulairen Körpers von vier oder fünf ebenen Winkeln gebildet werden, ſo kann derſelbe nur von regelmäßigen Dreiecken begränzt ſein. Für $k = 3$ muß $n < 6$ ſein, und es kann daher n die Werthe haben $n = 3$, $n = 4$ und $n = 5$; werden alſo die Ecken eines regulairen Körpers von drei ebenen Winkeln gebildet, ſo ſind die den Körper begränzenden Flächen entweder regelmäßige Dreiecke, Vierecke oder Fünfecke. Dieſe Betrachtung führt zu dem Reſultate, daß überhaupt nur fünf verſchiedene Gattungen von regelmäßigen Körpern denkbar ſind. Nämlich 1. der Körper wird von regelmäßigen Dreiecken begränzt, und jede Ecke von drei ebenen Winkeln gebildet; 2. der Körper wird von regelmäßigen Dreiecken begränzt, und jede Ecke von vier ebenen Winkeln gebildet; 3. der Körper wird von regelmäßigen Dreiecken begränzt, und jede Ecke von fünf ebenen Winkeln gebildet; 4. der Körper wird von regelmäßigen Vierecken begränzt, und jede Ecke von drei ebenen Winkeln gebildet; 5. der Körper wird von regelmäßigen Fünfecken begränzt, und jede Ecke von drei ebenen Winkeln gebildet.

Zuſatz. Es läßt ſich ſchon zum Voraus einſehen, daß um jeden regelmäßigen Körper ſich eben ſowohl wird eine Kugel beſchreiben laſſen, die durch alle Ecken deſſelben geht, wie es möglich iſt, um jedes regelmäßige Vieleck einen Kreis zu beſchreiben. Denkt man nun eine ſolche Kugel wirklich beſchrieben, ſo müſſen die Ecken des Körpers Punkte auf der Oberfläche der Kugel bilden, wodurch dieſelbe in gleiche, regelmäßige, ſphäriſche Figuren zerlegt wird. Nach der Bemerkung §. 91. No. 1. kann aber eine ſolche Zerlegung der Oberfläche der Kugel nur auf fünf verſchiedene Arten geſchehen, und zwar auf dreierlei Arten durch Dreiecke, auf eine Art durch Vierecke und auf eine Art durch Fünfecke; es läßt ſich daher auch hierdurch nachweiſen, daß nur fünf verſchiedene Gattungen von regelmäßigen Körpern denkbar ſind.

§. 94.

Von den bei regulairen Körpern zu beſtimmenden Größen.

Iſt die Möglichkeit irgend eines regulairen Körpers nachgewieſen, und weiß man, von wieviel Flächen derſelbe begränzt wird, ſo kommt es nun noch darauf an, zu beſtimmen:

1. Wieviel Ecken und wieviel Kanten derſelbe hat. Iſt die Anzahl der begränzenden Flächen = f, und iſt jede derſelben ein nEck, ſo iſt die Summe der Seiten aller dieſer Flächen = nf, und weil je zwei dieſer Seiten zu einer Kante ſich vereinigen, ſo iſt die Anzahl der Kanten eines ſolchen Körpers beſtimmt durch die Formel $\frac{nf}{2}$. Die f Flächen haben aber auch nf Winkel; iſt alſo die Anzahl der eine Ecke bildenden Winkel = k, ſo wird die Anzahl aller Ecken des Körpers ausgedrückt durch $\frac{nf}{k}$.

2. Wie groß die ebenen Winkel und wie groß die Neigungswinkel ſind. Die Größe des ebenen Winkels m, welcher natürlich der Polygonalwinkel des nEcks ſein muß, iſt

$$m = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180^\circ,$$

und die Größe des Neigungswinkels μ iſt durch die, bereits §. 92., abgeleitete Formel beſtimmt

$$\cos\mu = \frac{r^2 \cos p - r \sin^2 \tfrac{1}{2}m}{\cos^2 m}.$$

Es iſt hier p der Polygonalwinkel eines regelmäßigen Vielecks von eben ſo vielen Seiten, als ebene Winkel die körperliche Ecke bilden; es iſt alſo, wenn dieſe Zahl = k geſetzt wird,

$$p = \frac{(k-2)}{k} \cdot 180^\circ.$$

Auch wird durch die ebenfalls §. 92. abgeleitete Formel

$$\cos\varphi = \frac{r \sin \tfrac{1}{2} m}{\cos \tfrac{1}{2} p}$$

der Neigungswinkel beſtimmt, den die Kanten einer jeden Ecke mit der regelmäßigen Grundfläche der durch die Ecke der Form nach beſtimmten normalen Pyramide bilden.

3. Ob

3. Ob und wie es möglich iſt, in und um einen ſolchen Körper eine Kugel zu beſchreiben, und wie groß die Radien ϱ und R dieſer Kugeln ſind.

4. Wie groß die Oberfläche F des ganzen Körpers iſt, und auf welche Weiſe das Netz deſſelben gezeichnet werden kann. Nun iſt aber, wenn man die Seite eines regelmäßigen nEcks = a und den halben Polygonalwinkel deſſelben = m ſetzt, der Inhalt einer ſolchen Figur =

$$\frac{na^2 \operatorname{tg} m}{4r},$$

wird alſo der Körper von f Flächen begränzt, ſo iſt

$$F = \frac{nfa^2 \operatorname{tg} m}{4r}.$$

5. Wie groß der Kubikinhalt K des Körpers iſt; es läßt ſich leicht nachweiſen, daß derſelbe durch die Formel ausgedrückt werden kann

$$K = \tfrac{1}{3}F \cdot \varrho$$

wo F die ganze Oberfläche und ϱ den Radius der Kugel bedeutet, die in den Körper hineingezeichnet werden kann. Uebrigens folgt aus dieſer letzten Formel auch umgekehrt

$$\varrho = \frac{3K}{F}.$$

§. 95.

Der von gleichſeitigen Dreiecken begränzte regulaire Körper, deſſen Ecken dreikantig ſind.

Bildet man einen körperlichen Winkel aus drei gleichſeitigen Dreiecken, ſo vereinigen ſich die drei Grundlinien dieſer Körper ebenfalls zu einem gleichſeitigen Dreieck; in ſofern dieſes als die Grundfläche angeſehen wird, hat man eine dreiſeitige Pyramide, die von vier gleich großen, gleichſeitigen Dreiecken begränzt wird, und es wird jede Ecke derſelben durch drei Winkel von 60° gebildet. Da nun zwei dreikantige Ecken, die von gleichen ebenen Winkeln gebildet werden, auch gleiche Neigungswinkel haben; ſo folgt, daß alle Ecken dieſer Pyramide gleich ſind, und es iſt dieſer Körper daher regulair. Er wird das regulaire Tetraeder oder Vierſeit genannt.

Die Conſtruction eines Tetraeder, deſſen Seite = a gegeben iſt, geſchieht auf folgende Art: Man beſchreibt über dieſe Seite ein regelmäßiges Dreieck, und errichtet in dem Mittelpunkte deſſelben, d. i. in dem Mittelpunkte des Kreiſes, der um dieſes Dreieck beſchrieben werden kann, eine Normale auf der Fläche deſſelben = h = $\sqrt{(a^2 - M^2)}$, und verbindet den Endpunkt dieſer Normale mit den drei Spitzen des Dreiecks, ſo iſt die hierdurch beſtimmte Pyramide das Tetraeder; denn es ſind die Seitenkanten dieſer Pyramide gleich groß, nach §. 92., und die Größe einer jeden derſelben = x iſt durch die Formel beſtimmt

$$x = \sqrt{(M^2 + h^2)}$$

$$\text{und } h^2 = a^2 - M^2,$$

wo M den Radius des Kreiſes bedeutet, der ſich um die Grundfläche beſchreiben läßt; daher iſt x = a, und der Körper wird alſo von vier gleichen, gleichſeitigen Dreiecken begränzt, und iſt daher, wie aus dem obigen ſich ergiebt, regulair.

Die Eigenthümlichkeiten eines regulairen Tetraeder laſſen ſich nun auf folgende Art beſtimmen:

1. Es wird daſſelbe von vier gleichſeitigen Dreiecken begränzt, und jede Ecke durch drei ebene Winkel gebildet; alſo iſt §. 94. No. 1.

$$n = 3,\ f = 4 \text{ und } k = 3,$$

und daher iſt die Anzahl der Kanten deſſelben

$$= \frac{nf}{2} = 6,$$

und die Anzahl der Ecken

$$= \frac{nf}{k} = 4.$$

2. Da der Körper von gleichſeitigen Dreiecken begränzt wird, ſo iſt jeder ebene Winkel m = 60°, und eben ſo iſt auch, weil jede Ecke durch drei Winkel gebildet iſt, p = 60°, und daher der Neigungswinkel je zweier Ebenen = μ beſtimmt durch die Formel

$$\cos\mu = \frac{r^2 \cos p - r \sin^2 \frac{1}{2} m}{\cos^2 \frac{1}{2} m} = \frac{r^2 \cos 60^0 - r \sin^2 30^0}{\cos^2 30^0}$$

$$= \frac{r^2 \cdot \frac{1}{2} r - r\left(\frac{1}{2} r\right)^2}{\frac{3}{4} r^2} = \frac{1}{3} r.$$

Der Neigungswinkel φ jeder Kante zu der gegenüber liegenden Ebene iſt beſtimmt durch die Formel

$$\cos\varphi = \frac{r \sin\frac{1}{2}m}{\cos\frac{1}{2}p} = \frac{r \sin 30^0}{\cos 30^0} = \operatorname{tg} 30^0;$$

daher iſt $\mu = 70^0\ 31'\ 44''$ und $\varphi = 54^0\ 44'\ 8''$.

3. Da die Fläche eines gleichſeitigen Dreiecks $= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ ſo iſt die ganze Oberfläche des Tetraeder

$$F = 4 \times \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = a^2\sqrt{3},$$

und der Kubikinhalt deſſelben wird ausgedrückt durch die Formel

$$K = \frac{h}{3} \times \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

und es iſt

$$h = \sqrt{(a^2 - M^2)};$$

nun iſt aber, wenn die drei Seiten eines Dreiecks mit a, b, c, und die Fläche deſſelben mit fl bezeichnet wird, der Radius des Kreiſes, der ſich um dieſes Dreieck beſchreiben läßt, =

$$M = \frac{abc}{4fl};$$

alſo iſt hier, weil $a = b = c$ und $fl = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

$$M = \frac{a^3}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ und } M^2 = \frac{a^2}{3}$$

und $h = \sqrt{(a^2 - M^2)} = \sqrt{\left(a^2 - \frac{a^2}{3}\right)} = a\sqrt{\tfrac{2}{3}}$;

folglich iſt der Kubikinhalt

$$K = \frac{a}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}} \times \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

4. Da ſowohl in, als um jede dreiſeitige Pyramide eine Kugel beſchrieben werden kann, ſo gilt dieſes natürlich auch von dem Tetraeder, und es müſſen hier die Mittelpunkte beider zuſammenfallen. Zieht man von dieſem Mittelpunkte Linien an die Ecken des Tetraeder, ſo wird daſſelbe in vier gleiche Pyramiden zerlegt, deren Grundflächen die begränzenden Flächen des Tetraeder ſind, deren Höhe der Radius ϱ

der Kugel iſt, die ſich in das Tetraeder hineinzeichnen läßt und deren Seitenkanten dem Radius R der Kugel gleich ſind, die um das Tetraeder beſchrieben werden kann. Der Inhalt einer ſolchen Pyramide wird alſo ausgedrückt durch

$$\frac{\varrho}{3} \times \text{fl.} = \frac{\varrho}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3},$$

und daher iſt der Inhalt K des ganzen Tetraeder

$$K = 4 \times \frac{\varrho}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{a^2 \varrho}{3} \cdot \sqrt{3}.$$

Es iſt aber auch

$$K = \frac{a^3}{12} \sqrt{2};$$

alſo iſt

$$\frac{a^2 \varrho}{3} \sqrt{3} = \frac{a^3}{12} \sqrt{2},$$

und daher

$$\varrho = \frac{a}{4} \sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{a}{12} \sqrt{6}.$$

Da ferner ſein muß

$$R^2 = M^2 + \varrho^2;$$

ſo iſt auch

$$R^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{24} = \frac{9a^2}{24};$$

folglich iſt

$$R = \frac{3a}{2} \sqrt{\tfrac{1}{6}} = \frac{3a}{12} \sqrt{6} = \frac{a}{4} \sqrt{6}.$$

Zuſatz. Die Formeln für ϱ und R hätten auch auf folgende Art gefunden werden können: Fällt man von der Spitze des Tetraeder eine Normale auf die gegenüberliegende Fläche = h, ſo muß in dieſer der Mittelpunkt beider Kugeln liegen, und es muß nun der Abſtand dieſes Punktes von der Spitze = R und der Abſtand von der Grundfläche = ϱ ſein; alſo iſt

$$R + \varrho = h.$$

Ferner iſt der Inhalt des ganzen Tetraeder

$$= \tfrac{1}{3} \cdot h \cdot \text{fl},$$

und der Inhalt einer der vier Pyramiden, aus welchen das-

ſelbe beſteht, und die ihre Spitzen gemeinſchaftlich in dem Mittelpunkte der Kugel haben,

$$= \tfrac{1}{3} \cdot \varrho \times \text{fl},$$

es iſt alſo

$$\tfrac{1}{3} \cdot \text{h} \times \text{fl} = 4 \times \tfrac{1}{3} \cdot \varrho \times \text{fl},$$

und daher

$$\text{h} = 4\varrho, \text{ alſo } \varrho = \tfrac{1}{4}\text{h},$$

und daher

$$\text{R} = \tfrac{3}{4}\text{h}, \text{ und weil } \text{h} = \text{a}\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{\text{a}}{3}\sqrt{6},$$

ſo iſt

$$\varrho = \frac{\text{a}}{12}\sqrt{6} \text{ und } \text{R} = \frac{\text{a}}{4}\sqrt{6}.$$

Zugleich geht hieraus hervor, daß $\text{R} = 3\varrho$ ſein muß.

§. 96.

Der von gleichſeitigen Dreiecken begränzte Körper, deſſen Ecken vierkantig ſind.

Eine körperliche Ecke iſt durch vier gegebene ebene Winkel, welche dieſelbe bilden ſollen, ihrer Form nach nicht beſtimmt, wenn auch die Winkel gleich groß ſind; weil ſie unter verſchiedenen Neigungswinkeln zuſammengeſetzt werden können. Setzt man z. B. zwei gleich große Tetraeder mit der einen ihrer Flächen an einander, ſo entſtehen um dieſe Fläche herum drei körperliche Winkel, von welchen jeder durch vier ebene Winkel von 60° gebildet wird, und von den Neigungswinkeln dieſer Ecken ſind nur je zwei einander gegenüberliegende von gleicher Größe; jeder der größeren Neigungswinkel aber iſt zweimal ſo groß, als jeder der kleineren.

Will man aus vier gleich großen, ebenen Winkeln eine regulaire Ecke bilden, alſo eine ſolche, in der die vier Neigungswinkel ebenfalls von gleicher Größe ſind; ſo muß man nach der Anleitung, §. 92., ein Quadrat als die Baſis einer normalen Pyramide annehmen, deren Spitze in jedem Falle eine ſolche Ecke iſt. Die Spitze ſelbſt liegt in irgend einem Punkte der Linie, welche normal auf der Fläche des Quadrats in dem Mittelpunkte deſſelben errichtet wird.

Wenn abcd, Fig. 58., das Quadrat iſt, und es ſchneiden ſich die beiden Diagonalen deſſelben ac und bd in g, ſo iſt dieſer Punkt der Mittelpunkt deſſelben; wird nun die in g auf abcd errichtete Normale, deren Endpunkt mit m bezeichnet werden ſoll, alſo gm, = ga = gb = gc = gd gemacht, und man verbindet m mit a, b, c und d, ſo ſind die Seitenflächen der hierdurch beſtimmten vierſeitigen Pyramide gleichſeitige Dreiecke; denn es iſt, wenn die Seitenkante am = x geſetzt wird,

$$x^2 = (gm)^2 + (ga)^2 = 2(ga)^2 = (ga)^2 + (gb)^2 = (ab)^2.$$

Die Seitenkanten ſind alſo in dieſem Falle eben ſo groß, als die Seiten des Quadrats abcd, und die Spitze m dieſer Pyramide iſt eine regulaire, durch vier ebene Winkel von 90° gebildete Ecke.

Wird nun die Normale mg auf der entgegengeſetzten Seite des Quadrats verlängert, und der Endpunkt dieſer verlängerten Linie, der mit m′ bezeichnet werden ſoll, ſo beſtimmt, daß gm′ = gm iſt, und man zieht von m′ Linien an a, b, c und d; ſo entſteht auf der entgegengeſetzten Seite des Quadrats ebenfalls eine vierſeitige Pyramide, die der erſteren congruent iſt: die ganze Doppelpyramide wird alſo von acht gleichſeitigen Dreiecken begränzt. Jede Ecke derſelben wird durch vier ebene Winkel von 60° gebildet, und die Ecken m und m′ ſind regulair. Läßt ſich nun beweiſen, daß auch die Ecken bei a, b, c und d regulair ſind, ſo iſt der ganze Körper regulair.

In der vierſeitigen Pyramide abcdm wird die Ecke an a gebildet von den drei ebenen Winkeln mab, mad (von welchen jeder = 60° iſt,) und bad (= 90°). Der dem letzteren gegenüberliegende Neigungswinkel iſt zugleich Neigungswinkel von der regulairen Ecke m und kann daher mit μ bezeichnet werden; ſetzt man nun jeden der beiden übrigen gleich großen Neigungswinkel = ψ, ſo iſt, weil die Sinus der ebenen Winkel wie die der Neigungswinkel ſich verhalten,

$$\sin 90^0 : \sin 60^0 = \sin \mu : \sin \psi;$$

folglich iſt $\sin \psi = \frac{\sin 60^0 \, . \, \sin \mu}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \, . \, \sin \mu.$

In der Doppelpyramide aber iſt der Neigungswinkel an der Kante ab, welchen die Flächen mab und m′ab mit einander bilden, zweimal ſo groß als der Winkel, welchen mab mit bad bildet; alſo $= 2\psi$.

Es iſt aber ganz allgemein der Neigungswinkel μ einer regulairen Ecke durch die Formel beſtimmt

$$\cos\mu = \frac{r^2 \cos p - r \sin^2 \frac{1}{2}m}{\cos^2 \frac{1}{2}m},$$

und hier iſt $m = 60^0$ und $p = 90^0$; alſo

$$\cos\mu = -\frac{r \sin^2 30^0}{\cos^2 30^0} = -\frac{r \cdot \frac{r^2}{4}}{\frac{3r^2}{4}} = -\tfrac{1}{3}r;$$

$$\text{alſo } \sin\mu = \sqrt{(r^2 - \cos^2\mu)} = \sqrt{\left(r^2 - \frac{r^2}{9}\right)} = \frac{2r}{3}\sqrt{2}$$

$$\text{und } \sin^2\mu = \frac{8}{9}r^2.$$

$$\text{Nun iſt } \sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2r}{3}\sqrt{2} = \frac{r}{3}\sqrt{6};$$

$$\text{alſo } \cos^2\psi = r^2 - \frac{r^2}{9}\cdot 6 = \frac{r^2}{3}$$

$$\text{und } \sin^2\psi = \frac{2}{3}r^2;$$

$$\text{folglich } \sin^2\psi\cos^2\psi = \frac{2}{9}r^4,$$

$$\text{daher iſt } \sin\psi\cos\psi = \frac{r^2}{3}\sqrt{2}$$

$$\text{und } \frac{2\sin\psi\cos\psi}{r} = \frac{2r}{3}\sqrt{2};$$

$$\text{nämlich es iſt } \sin 2\psi = \frac{2r}{3}\sqrt{2}.$$

$$\text{Es iſt aber auch } \sin\mu = \frac{2r}{3}\sqrt{2};$$

$$\text{folglich iſt } \sin 2\psi = \sin\mu,$$

$$\text{und daher } 2\psi = \mu.$$

Es iſt alſo in der Ecke a der Neigungswinkel, welchen in der Doppelpyramide die Flächen mab und m′ab mit einander bilden, eben ſo groß als der Neigungswinkel der beiden Flächen

mab und mad, und hieraus geht hervor, daß die Ecke bei a in der Doppelpyramide regelmäßig und der Ecke m congruent iſt; eben daſſelbe gilt auch von den Ecken bei b, c und d. Der ganze, aus den beiden Pyramiden abcdm und abcdm′ beſtehende Körper iſt daher regelmäßig, und es wird derſelbe, weil er von acht Flächen begränzt iſt, das regulaire Octaeder oder Achtſeit genannt. Die Eigenthümlichkeiten dieſes Körpers ergeben ſich nun wie folgt:

1. Da derſelbe von acht regelmäßigen Dreiecken begränzt wird, und jede Ecke durch vier ebene Winkel gebildet iſt, ſo muß man in den Formeln §. 94. No. 1. ſetzen

$$n = 3, \; f = 8 \text{ und } k = 4;$$

daher iſt in dem Octaeder

$$\text{die Anzahl der Kanten} = \frac{nf}{2} = 12 \text{ und}$$

$$\text{die Anzahl der Ecken} = \frac{nf}{k} = 6.$$

2. Die Größe des Neigungswinkels μ wird durch die bereits oben angegebene Formel ausgedrückt,

$$\cos\mu = -\tfrac{1}{3}r,$$

und es iſt daher

$$\mu = 109^0\ 28'\ 16''.$$

Ferner iſt der Winkel φ, nämlich der Winkel, welchen die Kante ma mit der Fläche abcd bildet, beſtimmt durch

$$\cos\varphi = \frac{r \sin\frac{1}{2}m}{\cos\frac{1}{2}p};$$

alſo weil $m = 60^0$ und $p = 90^0$

$$\cos\varphi = \frac{r \cdot \sin 30^0}{\cos 45^0} = \frac{r \cdot \frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}r \cdot \sqrt{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r}{2}\sqrt{2},$$

und daher $\varphi = 45^0$, wie ſich von ſelbſt verſteht, da in dem rechtwinkligen Dreieck agm, ag = gm. Uebrigens folgt hieraus

$$\angle mam' = 2 \cdot 45^0 = 90^0 = \angle bad.$$

Zwei einander gegenüberliegende, in einer Ecke zuſammenſtoßende Kanten des Octaeder bilden daher einen rechten Winkel mit einander.

3. Da das Octaeder aus zwei Pyramiden beſteht, von welchen jede das Quadrat abcd zur Grundfläche hat, und

deren Höhe = gm = gm′ = ag = ½(ac) iſt; ſo wird der Kubikinhalt K dieſes Körpers ausgedrückt durch die Formel

$$K = 2 \times \frac{(gm)}{3} \cdot (ab)^2$$

$$= 2 \times \frac{(ac)}{6} \cdot (ab)^2 = \frac{2\sqrt{2}a^2}{6} \cdot a^2 = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}.$$

Die Oberfläche F deſſelben iſt

$$F = 8 \times fl = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}.$$

4. Da ga = gb = gc = gd = gm = gm′, ſo iſt ga der Radius und g der Mittelpunkt der Kugel, die um das Octaeder beſchrieben werden kann, und es iſt der Radius dieſer Kugel

$$R = (ag) = \frac{(ac)}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Zieht man aber von g aus die Linien = R an die ſechs Ecken des Körpers, ſo wird derſelbe dadurch in acht gleiche Pyramiden zerlegt, von welchen jede ein gleichſeitiges Dreieck, deſſen Seite = a iſt, zur Grundfläche hat. Dieſe Pyramiden haben ihre Spitzen gemeinſchaftlich in g und ihre Höhe ϱ iſt der Radius der Kugel, die in das Octaeder hineingezeichnet werden kann. Der Inhalt des ganzen Körpers iſt daher

$$K = 8 \times \frac{\varrho}{3} \cdot fl = \frac{8\varrho}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Es iſt aber nach No. 3. auch

$$K = \frac{a^3}{3} \cdot \sqrt{2};$$

folglich iſt

$$\frac{8\varrho}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{3} \cdot \sqrt{2},$$

und daher

$$\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{a}{6}\sqrt{6}.$$

Zuſatz. Für die Seite des Octaeder = a iſt ½a der Radius und g der Mittelpunkt einer Kugel, die alle zwölf Kanten des Octaeder zu Tangenten hat. Der Inhalt G dieſer Kugel wird ausgedrückt durch

$$G = \frac{4(\frac{1}{2}a)^3}{3} \cdot \pi = \frac{a^3\pi}{6}.$$

Da nun der Inhalt des Octaeder

$$K = \frac{a^3}{3} \cdot \sqrt{2}, \text{ ſo iſt}$$

$$G : K = \frac{a^3\pi}{6} : \frac{a^3}{3} \sqrt{2} = \pi : 2\sqrt{2};$$

alſo ungefähr wie 10 : 9.

§. 97.

Der von gleichſeitigen Dreiecken begränzte Körper, deſſen Ecken fünfkantig ſind.

Wird die Oberfläche einer Kugel durch zwölf auf derſelben beſtimmte Punkte in zwanzig gleich große gleichſeitige Dreiecke zerlegt, was immer möglich iſt, wie aus §. 87. ſich ergiebt, ſo bilden dieſe Punkte die Ecken eines regulairen Körpers, der von zwanzig gleichſeitigen Dreiecken eingeſchloſſen iſt, und deſſen Ecken von fünf ebenen Winkeln gebildet werden.

Beweis. Da nach der Vorausſetzung die Oberfläche der Kugel in zwanzig gleich große, gleichſeitige Dreiecke zerlegt iſt, ſo iſt der Bogen eines größten Kreiſes, durch welchen der Abſtand zweier neben einander liegenden Punkte gemeſſen wird, überall gleich groß, und es ſind daher auch die Sehnen dieſer Bogen von gleicher Größe: es iſt alſo auch der geradlinige Abſtand je zweier neben einander liegenden Punkte gleich groß. Die durch die ſphäriſchen Dreiecke beſtimmten Sehnen-Dreiecke, welche den Körper begränzen, ſind alſo ſämmtlich gleichſeitig und von gleicher Größe. Der durch die zwölf Punkte auf der Oberfläche beſtimmte Körper wird alſo von lauter gleich großen regelmäßigen Dreiecken begränzt.

Nach §. 57. liegen um jeden der zwölf Punkte fünf gleich große Winkel, und da nun jeder dieſer Punkte eine Ecke des Körpers bildet, ſo folgt, daß alle Ecken des Körpers fünfkantig ſind, und es wird jede derſelben von fünf gleich großen, ebenen Winkeln von 60^0 eingeſchloſſen.

Iſt M, Fig. 48., einer der Punkte auf der Oberfläche der Kugel und ſind b und d ein Paar von den zunächſt an M anliegenden fünf Punkten, ſo iſt $Mb = Md$, und es iſt

auch der Abſtand eines jeden der übrigen drei Punkte eben ſo groß. Da nun, wenn M der Pól von ADB iſt, MB = MD = 90° ſein muß; ſo iſt auch Bb = Dd ꝛc.; folglich liegen die fünf um M herum liegenden Punkte b, d ꝛc. in einem Parallelkreiſe zu ADB, und ſie liegen alſo ſämmtlich in einer Ebene. Es iſt aber ∠bMd der fünfte Theil von 360°, und es gilt daſſelbe von jedem der übrigen vier Winkel; folglich iſt auch bd der fünfte Theil des Parallelkreiſes, in deſſen Umfang die fünf Punkte liegen, und es wird dieſer Kreis daher in fünf gleiche Theile getheilt: die fünf um M herum liegenden Punkte bilden alſo die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks, und die Ecke M iſt daher regelmäßig. Da nun eben daſſelbe auch von allen übrigen Ecken gilt; ſo folgt, daß in dem von lauter gleichen, gleichſeitigen Dreiecken begränzten Körper alle Ecken regelmäßig ſind, und es iſt daher der Körper ſelbſt regulair.

Zuſatz. Dieſen Körper nennt man das regulaire Icoſaeder oder Zwanzigſeit.

§. 98.

Formeln für das regulaire Icoſaeder.

1. Verbindet man die Punkte M, b und d, Fig. 48., durch gerade Linien, ſo iſt das Dreieck Mbd gleichſeitig und Mb = bd = dM = a die Seite des Vielecks; zugleich iſt bd = a die Seite eines regelmäßigen Fünfecks in dem Parallelkreiſe bda, deſſen Radius cb = M geſetzt werden ſoll. Der Bogen bd hält ſonach 72°, und es iſt daher für r = 1

$$a = 2M \sin 36^\circ,$$

oder weil

$$\sin 36^\circ = \tfrac{1}{4} \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})};\ \text{ſo iſt}$$

$$a = \frac{M}{2} \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$$

und daher iſt

$$M = \frac{2a}{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}.$$

Nun iſt $(Mc)^2 = (Mb)^2 - (bc)^2$; alſo auch

$$(Mc)^2 = a^2 - M^2$$
$$= a^2 - \frac{4a^2}{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{a^2 (6 - 2\sqrt{5})}{10 - 2\sqrt{5}}$$

und daher iſt

$$(Mc) = a \sqrt{\left[\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right]}.$$

Es iſt aber

$$(Mc) : (Mb) = (Mb) : (MN),$$

und daher auch, wenn man den Radius der Kugel = R und alſo MN = 2R ſetzt,

$$a \sqrt{\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right)} : a = a : 2R;$$

folglich iſt

$$R = \frac{a}{2} \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}\right)}$$

und hierdurch iſt beſtimmt, wie der Radius der Kugel, die um das Icoſaeder beſchrieben werden kann, von der Seite dieſes Körpers abhängt.

2. Denkt man von dem Mittelpunkte C der Kugel eine Normale = ϱ auf die Fläche des gleichſeitigen Dreiecks Mbd gefällt, ſo trifft dieſe die Normale von M auf bd ſo, daß $\frac{2}{3}$ dieſer Linie nach M zu abgeſchnitten wird, und es iſt daher, wenn die Normale von M auf bd mit p bezeichnet wird,

$$\varrho^2 = R^2 - (\tfrac{2}{3} p)^2 = R^2 - \frac{4}{9} p^2.$$

Da nun $p^2 = \frac{3}{4}a^2$, ſo iſt

$$\varrho^2 = R^2 - \frac{4}{9} \cdot \tfrac{3}{4}a^2 = R^2 - \frac{a^2}{3},$$

und alſo auch, wenn man für R den Werth ſetzt,

$$\varrho^2 = \frac{a^2}{4} \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}\right) - \frac{a^2}{3}$$
$$= \frac{a^2}{12} \left[\frac{3\,(5 - \sqrt{5}) - 4\,(3 - \sqrt{5})}{3 - \sqrt{5}}\right] = \frac{a^2}{12} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}\right)$$
$$= \frac{a^2}{12} \left(\frac{(3 + \sqrt{5})^2}{4}\right) = \frac{a^2}{16} \left(\frac{(3 + \sqrt{5})^2}{3}\right);$$

folglich iſt

$$\varrho = \frac{a}{4}\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)$$

und dieſes iſt die Formel für den Radius der Kugel, die in das Icoſaeder hineingezeichnet werden kann.

3. Die Fläche des gleichſeitigen, geradlinigen Dreiecks Mbd wird ausgedrückt durch

$$\frac{a^2}{4}\sqrt{3},$$

alſo iſt der Inhalt der Pyramide MbdC

$$= \frac{\varrho}{3} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a}{12}\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right) \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{a^3}{48}(3 + \sqrt{5}).$$

Das ganze Icoſaeder aber beſteht aus zwanzig ſolcher Pyramiden, die alle gleich groß ſind und gleiche Form haben; der Kubikinhalt K dieſes Körpers wird folglich ausgedrückt durch die Formel

$$K = \frac{5a^3(3 + \sqrt{5})}{12}.$$

4. Die Oberfläche F des regulairen Icoſaeder iſt

$$F = 20 \times \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 5a^2\sqrt{3}.$$

5. Da die Anzahl f der das Icoſaeder begränzenden Flächen zwanzig beträgt, ſo iſt die Zahl der Kanten dieſes Körpers

$$= \frac{nf}{2} = \frac{3 \cdot 20}{2} = 30.$$

Die Zahl der Ecken deſſelben beträgt

$$\frac{nf}{k} = \frac{3 \cdot 20}{5} = 12,$$

wie bereits aus §. 97. bekannt iſt.

6. Der Neigungswinkel μ je zweier Ebenen wird allgemein ausgedrückt durch

$$\cos\mu = \frac{r^2 \cos p - r \sin^2 \frac{1}{2}m}{\cos^2 \frac{1}{2}m}$$

und es iſt hier p der Polygonalwinkel des regelmäßigen Fünfecks = 108° und m = 60°; alſo

$$\cos\mu = \frac{r^2 \cos 108^0 - r \sin^2 30^0}{\cos^2 30^0} = -\frac{r^2 \cos 72^0 + r \cdot \frac{r^2}{4}}{\frac{3r^2}{4}}$$

$$= -\frac{4 \sin 18^0 + r}{3},$$

oder weil $\sin 18^0 = \frac{r}{4}(-1 + \sqrt{5})$, ſo iſt

$$\cos\mu = -\frac{r(-1+\sqrt{5}) + r}{3} = -\frac{r}{3}\sqrt{5},$$

und daher $\mu = 138^0\ 11'\ 23''$.

Zuſatz 1. Die Art und Weiſe, wie die Seite des Icoſaeder und der Radius der Kugel, die um daſſelbe beſchrieben werden kann, von einander abhängen, hätte auch auf folgende Art gefunden werden können:

Iſt C die Seite und c der gegenüberliegende Winkel in einem gleichſeitigen ſphäriſchen Dreiecke, ſo hängen dieſe, nach §. 57. Zuſatz 1., durch die Formel von einander ab

$$\cos \tfrac{1}{2}C = \frac{1}{2 \sin \tfrac{1}{2}c}$$

und weil bei der Beſtimmung der Punkte auf der Oberfläche der Kugel, durch welche die Ecken des Icoſaeder erhalten werden, jeder Winkel der gleichſeitigen ſphäriſchen Dreiecke 72^0 hält, ſo iſt $\frac{1}{2}c = 36^0$, und daher

$$\sin \tfrac{1}{2}c = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})};\text{ es iſt alſo}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}C = \frac{2}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}};\text{ alſo iſt}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}C = \frac{4}{10 - 2\sqrt{5}}\text{ und daher}$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}C = 1 - \frac{4}{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}};$$

folglich iſt

$$\sin \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right)} = \sin \tfrac{1}{2}\text{Arc (Mb)}.$$

Nun iſt aber die Sehne $Mb = a = R \times 2 \sin \frac{1}{2}C$; alſo iſt auch

$$a = 2R\sqrt{\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right)}$$

$$\text{und } R = \frac{a}{2} \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}\right)},$$

eine Formel, die mit der in No. 1. gefundenen übereinſtimmt.

Zuſatz 2. Wenn die Seite a eines regulairen Icoſaeder gegeben iſt, ſo läßt ſich der Durchmeſſer der Kugel, die um daſſelbe beſchrieben werden kann, mittelſt einer geometriſchen Conſtruction auf folgende Art finden:

Es iſt Fig. 48. bd = a die Seite des regulairen Fünfecks, das in den Kreis bda beſchrieben werden kann; alſo kann man den Radius dieſes Kreiſes cb = M leicht finden, und man kennt alsdann in dem rechtwinkligen Dreieck Mcb die Hypotenuſe Mb = a und die eine Kathete bc = a; alſo iſt auch die andere Kathete Mc bekannt. Da nun

$$Mc : Mb = Mb : MN,$$

ſo kennt man auch MN = 2R; alſo den Durchmeſſer der Kugel, die um das Icoſaeder beſchrieben werden kann. Da übrigens R, der Radius ϱ der Kugel die ſich in das Icoſaeder hineinzeichnen läßt, und der Radius k des Kreiſes, der um das den Körper begränzende gleichſeitige Dreieck beſchrieben werden kann, durch die Gleichung von einander abhängen

$$R^2 = \varrho^2 + k^2,$$

ſo läßt ſich der Werth von ϱ ebenfalls leicht finden.

Zuſatz 3. Wenn die Kugel gegeben iſt und die Seite des Icoſaeder, das in dieſelbe hineingezeichnet werden kann, ſo laſſen ſich die Punkte auf der Oberfläche der Kugel, welche die Ecken des Körpers bilden, auf folgende Art beſtimmen: Man nehme irgend einen Punkt M, Fig. 48., als den erſten Punkt an, und beſchreibe von dieſem Punkte mit dem Radius Mb = a einen Kreis auf der Oberfläche der Kugel; ſo liegen in dem Umfange dieſes Kreiſes fünf Punkte, deren Lage dadurch beſtimmt wird, daß man den einen Punkt b beliebig annimmt, und nun bd = bM als Seite des Fünfecks in dieſem Kreiſe herumträgt. Beſchreibt man nun ferner aus b mit bM einen Kreis, ſo geht dieſer durch M und durch zwei bereits gefundene Punkte des Kreiſes bda, und es haben nun die beiden übrigen, in dem beſchriebenen Kreiſe liegenden Punkte gegen N eine eben ſolche Lage, wie b und d gegen M; man braucht alſo jetzt nur noch aus N einen Kreis zu

beſchreiben, in welchem dieſe beiden Punkte und die drei noch fehlenden ebenfalls liegen müſſen.

Zuſatz 4. Iſt MANb, Fig. 59., ein größter Kreis der Kugel, und man zieht den Durchmeſſer MN, und verlängert denſelben bis P, ſo daß der Abſtand dieſes Punktes von dem Mittelpunkte C des Kreiſes, alſo CP, der Seite des Fünfecks in dieſem Kreiſe gleich iſt, errichtet in C auf MN die Normale CA, zieht AP und in A auf dieſe Linie eine Normale, welche den Durchmeſſer MN in f trifft, zieht fg normal auf MN und nimmt den Bogen ga = Mg, ſo iſt die Sehne Ma = Mb die Seite des Icoſaeder, das in die Kugel beſchrieben werden kann, von welcher MANb ein größter Kreis iſt. Die Richtigkeit dieſes Satzes läßt ſich auf folgende Art beweiſen: Man ſetze den Bogen Ma = C, alſo

$$Mg = \tfrac{1}{2}C, \text{ ſo iſt}$$
$$Cf = R \cos \tfrac{1}{2}C.$$

Da nun

$$fC : CA = CA : CP, \text{ ſo iſt auch}$$
$$R \cos \tfrac{1}{2}C : R = R : (CP); \text{ alſo}$$
$$(CP) = \frac{R}{\cos \frac{1}{2}C}.$$

Weil aber CP die Seite des Fünfecks im Kreiſe iſt, ſo wird der Werth dieſer Linie ausgedrückt durch

$$CP = R \times 2 \sin 36^0,$$

und daher iſt auch

$$2R \sin 36^0 = \frac{R}{\cos \frac{1}{2}C}, \text{ alſo}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}C = \frac{1}{2 \sin 36^0} = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}c}$$

wenn $c = 72^0$ iſt.

Es iſt aber $\cos \frac{1}{2}C = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}c}$ die Gleichung, durch welche die Abhängigkeit der Seite eines gleichſeitigen ſphäriſchen Dreiecks von dem Winkel deſſelben ausgedrückt wird, und für $c = 72^0$ iſt C der zu der Seite des Icoſaeder gehörige Bogen.

§. 99.

Der von Quadraten begränzte regulaire Körper.

Sobald die einen regulairen Körper begränzenden regulairen Flächen mehr als dreiſeitig ſind, müſſen die Ecken deſſelben dreikantig ſein, wie §. 93. bewieſen worden iſt, und es iſt dieſes daher auch alsdann der Fall, wenn der Körper von Quadraten begränzt wird. Werden aber drei Quadrate zu einer körperlichen Ecke aneinander geſetzt, ſo iſt hierdurch ein Parallelepipedon der Größe und Form nach vollkommen beſtimmt: der von Quadraten begränzte regulaire Körper gehört alſo zu der Gattung der Parallelepipeda, nämlich es iſt derſelbe das gleichſeitige rechtwinklige Parallelepipedon, alſo der Cubus oder Würfel, der auch das regulaire Hexaeder oder das regulaire Sechsſeit genannt wird. Die Eigenthümlichkeiten dieſes Körpers ſind leicht zu erkennen, nämlich:

1. Derſelbe wird von 6 Quadraten begränzt und hat daher 8 Ecken und 12 Kanten.

2. Die Ecken deſſelben werden von rechten Winkeln gebildet, und es ſind alle Neigungswinkel deſſelben ebenfalls rechte.

3. Bezeichnet man die Seite des Würfels mit a, ſo iſt der Kubikinhalt deſſelben $K = a^3$ und die Oberfläche $F = 6a^2$.

4. Werden je zwei einander gegenüberliegende Ecken des Würfels durch eine Diagonale verbunden, ſo erhält man 4 Diagonalen von gleicher Größe, die ſich alle in einem und demſelben Punkte gegenſeitig halbiren, und es iſt daher dieſer Punkt der Mittelpunkt, und die Hälfte der Diagonale iſt der Radius der Kugel, welche um den Würfel beſchrieben werden kann. Wird aber die Diagonale eines Quadrats, deſſen Seite a iſt, = d geſetzt, ſo iſt, wie leicht eingeſehen wird, die körperliche Diagonale des Würfels, die hier mit 2R bezeichnet werden kann, durch die Gleichung beſtimmt

$$(2R)^2 = d^2 + a^2.$$

Da nun $d^2 = 2a^2$

ſo iſt $4R^2 = 3a^2$; alſo $R = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

die Formel für den Radius der Kugel um den Würfel. Der

Radius ϱ der Kugel, die in den Würfel ſich hinein zeichnen läßt, iſt $\varrho=\frac{1}{2}a$. Endlich kann der Würfel in 6 vierſeitige Pyramiden zerlegt werden, deren Grundfläche ein Quadrat, und von welchen die Höhe der halben Seite dieſes Quadrats gleich iſt.

§. 100.

Der von regelmäßigen Fünfecken begränzte Körper.

Auch in dieſem Körper können, nach §.93., nur dreikantige Ecken vorkommen. Nun iſt eine dreikantige Ecke vollkommen beſtimmt, ſowohl, wenn die drei ebenen Winkel derſelben gegeben ſind, als auch, wenn man zwei dieſer Winkel und den von denſelben eingeſchloſſenen Neigungswinkel kennt: folglich laſſen ſich an jedes regelmäßige Fünfeck fünf demſelben gleiche Figuren ſo anlegen, daß dadurch 5 regulaire gleichgroße dreikantige Ecken gebildet werden. Iſt nämlich abcde, Fig. 57., das gegebene regelmäßige Fünfeck, und man legt an ab und bc ein Paar eben ſo große Fünfecke an, ſo erhält man bei b eine dreikantige Ecke, in welcher die drei ebenen Winkel gleich groß ſind, die daher auch 3 gleiche Neigungswinkel hat, und daher regulair iſt. Bei c läßt ſich nun die Ecke ergänzen, von welcher zwei ebene Winkel gegeben ſind, die mit denen bei b gleiche Größe haben, und der von ihnen eingeſchloſſene Neigungswinkel iſt der an der Kante bc gebildete, der auch in b vorkommt: alſo iſt die Ecke bei c der bei b congruent. Man kann hiernach auch an cd ein regelmäßiges Fünfeck anlegen, und es gilt daſſelbe von den Ecken bei d, e und a ebenfalls. Die an ab und bc angelegten Fünfecke haben eine Kante bei b gemeinſchaftlich, und wird der Endpunkt dieſer Kante = B geſetzt, ſo iſt bei B eine dreikantige Ecke ihrer Form nach beſtimmt, weil von ihr bereits zwei ebene Winkel und der eingeſchloſſene Neigungswinkel gegeben ſind, und es iſt dieſelbe, wenn ſie ergänzt wird, der bei b gleich. Der zu dieſer Ergänzung erforderliche ebene Winkel iſt alſo auch der Polygonalwinkel eines regelmäßigen Fünfecks; daſſelbe gilt auch von den Ecken an den Endpunkten der Kanten bei c, d, e und a. Zeichnet man alſo ein zweites Fünfeck, welches abcde congruent iſt, und legt an die Seiten deſſelben ebenfalls 5 Fünfecke an, ſo iſt die hierdurch

gebildete hohle, oben ausgezackte Figur, der, von welcher abcde die Grundfläche bildet, gleich, und es läßt ſich die eine umgeſtürzt auf die andere legen, ſo daß beide zuſammen einen Körper vollſtändig begränzen; dieſer Körper iſt nothwendiger Weiſe regelmäßig, weil alle Ecken deſſelben dreikantig und regulair, und die Begränzungsflächen ſämmtlich congruente regelmäßige Fünfecke ſind. Die Anzahl der dieſen Körper begränzenden Flächen beträgt 12, und es wird derſelbe daher das regulaire Dodecaeder oder Zwölfſeit genannt.

Die Eigenthümlichkeiten dieſes Körpers ergeben ſich nun wie folgt:

1. Da derſelbe von 12 Fünfecken begränzt wird, ſo iſt die Anzahl der Kanten deſſelben $= \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$, und weil alle Ecken dreikantig ſind, ſo iſt die Zahl der Ecken $= \frac{12 \cdot 5}{3} = 20$.

2. Die ebenen Winkel, welche die Ecken bilden, ſind die Polygonalwinkel von regelmäßigen Fünfecken und es iſt jeder derſelben daher $= 108^0$. Wird dieſer Winkel $= C$ geſetzt und der Neigungswinkel der Ecke $= c$, ſo hängen beide, nach §. 57. Zuſatz 1., durch die Gleichung von einander ab

$$\cos \tfrac{1}{2}C = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}c};$$

es iſt alſo $\sin \frac{1}{2}c = \frac{r^2}{2 \cos \frac{1}{2}C} = \frac{r^2}{2 \cos 54^0} = \frac{r^2}{2 \sin 36^0}$

oder, weil $\sin 36^0 = \frac{r}{4} \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$, ſo iſt

$$\sin \tfrac{1}{2}c = \frac{2r}{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}$$

und man findet $c = 116^0\ 33'\ 53''$.

Der Neigungswinkel μ der Ecken hätte auch durch die Formel §. 92. gefunden werden können

$$\cos \mu = \frac{r^2 \cos p - r \sin^2 \frac{1}{2}m}{\cos^2 \frac{1}{2}m},$$

und es iſt hier $p = 60^0$ und $m = 108^0$, alſo $\frac{1}{2}m = 54^0$

$$\text{alſo } \cos \mu = \frac{r^2 \sin 30^0 - r \sin^2 54^0}{\cos^2 54^0}$$

es iſt aber $\sin 30^0 = \frac{1}{2}r$, $\sin 54^0 = \frac{r}{4}(1 + \sqrt{5})$

und $\cos 54^0 = \frac{r}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$, alſo auch

$$\cos\mu = \frac{r^2 \cdot \frac{r}{2} - r \cdot \frac{r^2}{16}(1 + \sqrt{5})^2}{\frac{r^2}{16}(10 - 2\sqrt{5})}$$

und daher

$$\cos\mu = \frac{r^3\,[8 - (6 + 2\sqrt{5})]}{r^2\,(10 - 2\sqrt{5})}$$

$$= r\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right) = -r\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right)$$

und dieſer Ausdruck führt ebenfalls zu dem Werthe $\mu = c = 116^0\ 33'\ 53''$.

Uebrigens folgt aus der Gleichung

$$\cos\mu = -r\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right),$$

$$\sin^2\mu = r^2 - r^2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)^2 = r^2\left[\frac{(5-\sqrt{5})^2 - (-1+\sqrt{5})^2}{(5-\sqrt{5})^2}\right]$$

$$= r^2\left(\frac{4\,(6 - 2\sqrt{5})}{(5 - \sqrt{5})^2}\right) = r^2\left[\frac{4\,(-1 + \sqrt{5})^2}{(5 - \sqrt{5})^2}\right]$$

und es iſt daher

$$\sin\mu = 2r\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right) = \frac{2r}{\sqrt{5}}.$$

3. Bei einer dreikantigen Ecke überhaupt wird der Neigungswinkel P einer Kante zu der gegenüberliegenden Ebene ausgedrückt durch

$$\sin P = \frac{\sin A \sin b}{r}$$

nach §. 20. III., und es iſt alſo hier, weil die Kante regelmäßig iſt, wenn der ebene Winkel mit C und der Neigungswinkel der Ecke mit μ bezeichnet wird,

$$\sin P = \frac{\sin C \sin\mu}{r}$$

und weil $C = 108^0$, alſo $\sin C = \sin 72^0 = \frac{r}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$

und $\sin \mu = \frac{2r}{\sqrt{5}}$, ſo iſt

$$\sin P = \frac{r}{2} \sqrt{\left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}\right)}.$$

4. Wenn an die 5 Seiten des Fünfecks abcde, Fig. 57, Fünfecke angelegt werden, um dadurch die halbe Hülſe des Dodecaeder zu bilden, ſo iſt der Abſtand der entfernteſten Ecke eines jeden der angelegten Fünfecke von der Grundfläche $= (ch) \frac{\sin \mu}{r}$ und der Abſtand einer jeden der übrigen beiden Ecken von der Grundfläche iſt

$$= (ba) \frac{\sin P}{r}.$$

Es iſt aber, wenn man den Radius des Kreiſes, der um das Fünfeck abcde beſchrieben werden kann, = M ſetzt,

$$(ch) = M + \frac{M \sin \alpha}{r} = M + M \frac{\sin 54^0}{r},$$

$$\text{und da } \sin 54^0 = \frac{r}{4} (1 + \sqrt{5}), \text{ ſo iſt}$$

$$(ch) = M + M \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right) = M \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{4}\right),$$

ferner iſt $ga : ah = r : \cos \alpha$,

alſo, da die Seite des Fünfecks mit a bezeichnet wird,

$$M : \frac{a}{2} = r : \cos \alpha$$

$$\text{folglich iſt } M = \frac{ar}{2 \cos \alpha} = \frac{ar}{2 \cos 54^0}$$

$$\text{und, weil } \cos 54^0 = \frac{r}{4} \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})},$$

$$M = \frac{2a}{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}.$$

Da nun gefunden wurde $(ch) = M \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{4}\right)$, ſo iſt auch

$$(ch) = \frac{2a}{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}} \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{4}\right) = \frac{a}{2} \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}\right).$$

Wird das in dem Dodecaeder an ae anliegende Fünfeck = aed′c′b′ geſetzt, wo die Buchſtaben eben ſo, wie in der Grundfläche auf einander folgen, ſo iſt, wie bereits oben be=

merkt wurde, der normale Abſtand des Punktes c′ von der Grundfläche $= (ch) \frac{\sin \mu}{r} = (c'h) \frac{\sin \mu}{r}$. Bezeichnet man alſo dieſen Abſtand mit H, und ſetzt für (ch) und $\sin \mu$ ihre Werthe, ſo wird

$$H = \frac{a}{2} \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{oder } H = a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}} \right).$$

Eben ſo iſt der Abſtand h des Punktes b′ oder d′ von der Grundfläche $= \frac{(ab) \sin P}{r}$, alſo

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{\left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5} \right)},$$

folglich iſt $H + h = a \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}} + \frac{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}{2\sqrt{5}} \right]$

$$= a \left[\frac{2\sqrt{5}\,(1 + \sqrt{5}) + \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}\,(10 - 2\sqrt{5})}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}} \right]$$

$$= a \left[\frac{2\sqrt{5}\,(1 + \sqrt{5}) + 4\sqrt{5}}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}} \right] = a \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}} \right).$$

5. In dem Dodecaeder laufen je zwei einander gegenüberliegende Flächen parallel, und es iſt, wie bei näherer Betrachtung des Körpers ſich augenblicklich erkennen läßt, der Abſtand je zweier paralleler Flächen von einander $= H + h$; und wird die Normale auf der Grundfläche abcde in dem Mittelpunkte g derſelben errichtet, ſo trifft ſie auch den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Fläche: folglich iſt

$$H + h = a \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}} \right) = 2\varrho$$

der Durchmeſſer einer Kugel, die in das Dodecaeder ſich hineinzeichnen läßt, und alle Flächen deſſelben berührt. Alſo iſt der Radius dieſer Kugel

$$\varrho = \frac{a}{2} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}} \right).$$

Zieht man von dem Mittelpunkte dieſer Kugel an irgend eine Ecke des Körpers eine gerade Linie, ſo iſt dieſe immer die Hypotenuſe eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem ϱ und $(ga) = M$ die Katheten ſind; dieſe Linie iſt daher

der Radius einer Kugel, welche um das Dodecaeder ſich beſchreiben läßt. Der Radius dieſer Kugel iſt alſo durch die Gleichung beſtimmt

$$R^2 = \varrho^2 + M^2$$

und es iſt daher auch

$$R^2 = \frac{a^2}{4}\left(\frac{(3+\sqrt{5})^2}{10-2\sqrt{5}}\right) + \frac{4a^2}{10-2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\frac{15+3\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right) = \frac{a^2}{4}\left(\frac{90+30\sqrt{5}}{20}\right)$$

$$= \frac{a^2}{16}(18+6\sqrt{5}).$$

$$\text{alſo } R = \frac{a}{4}\sqrt{(18+6\sqrt{5})}.$$

6. Der Flächeninhalt des Fünfecks abcde iſt

$$= \frac{5\,(ae)\,(gh)}{2} = \frac{5a}{2}\cdot\frac{M\sin\alpha}{r}$$

$$= \frac{5a}{2}\cdot\frac{2a}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}\cdot\tfrac{1}{4}(1+\sqrt{5})$$

$$= \frac{5a^2}{4}\left(\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4\sqrt{5}}\right) = \frac{a^2}{16}(5+\sqrt{5})\sqrt{(10+2\sqrt{5})}.$$

Da nun die Oberfläche des ganzen Dodecaeder aus 12 ſolchen Fünfecken beſteht, ſo iſt die ganze Oberfläche deſſelben

$$F = \frac{3a^2}{4}(5+\sqrt{5})\sqrt{(10+2\sqrt{5})}.$$

7. Das Dodecaeder beſteht aus 12 Pyramiden, deren Grundfläche das regelmäßige Fünfeck und deren Höhe $= \varrho$ iſt, folglich iſt der Kubikinhalt des Körpers

$$K = 12 \times \frac{\varrho \cdot fl}{3} = 4\varrho fl$$

und daher, wenn man für ϱ und fl die Werthe ſetzt,

$$K = 4\cdot\frac{a}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}\right)\cdot\frac{a^2}{16}(5+\sqrt{5})\sqrt{(10+2\sqrt{5})}.$$

$$= \frac{a^3}{8}(3+\sqrt{5})(5+\sqrt{5})\sqrt{\left(\frac{10+2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}\right)}$$

$$= \frac{a^3}{8}(20+8\sqrt{5})\left(\frac{10+2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{a^3}{4}\cdot\frac{(5+2\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{\sqrt{5}} = \frac{a^3}{4}(5+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5});$$

nämlich es iſt

$$K = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}).$$

§. 101.

Die Netze der regulairen Körper.

Wird ein Körper von geradlinigen Flächen begränzt, ſo läßt ſich immer ein Netz von demſelben conſtruiren, und ſind, wie bei den regulairen Körpern, die begränzenden Flächen ſämmtlich regelmäßig und gleich groß, ſo iſt die Conſtruction des Netzes um ſo einfacher; nur hat man bei der Anlage deſſelben darauf zu ſehen, daß bei dem Zuſammenſchlagen des Netzes jede Ecke von gleich vielen ebenen Winkeln gebildet wird; im übrigen können die Figuren auf verſchiedene Arten aneinander gereihet werden, und es läßt ſich daher auch das Netz ein und ebendeſſelben Körpers unter mannichfach verſchiedenen Formen darſtellen. Das Entwerfen der Netze von regulairen Körpern kann auf folgende Art geſchehen:

1. Werden die drei Seiten eines gleichſeitigen Dreiecks halbirt, und man verbindet die Halbirungspunkte durch gerade Linien, ſo wird daſſelbe dadurch in 4 gleichſeitige gleichgroße Dreiecke zerlegt, von welchen drei an den Seiten des vierten anliegen; es bildet daher dieſes mittlere die Grundfläche einer dreiſeitigen Pyramide, von welcher die übrigen drei Dreiecke die Seitenflächen ſind, und dieſe Pyramide iſt das regulaire Tetraeder. Das Netz dieſes Körpers iſt alſo ein gleichſeitiges Dreieck, das in 4 gleiche Dreiecke getheilt iſt, und deſſen Seite alſo zwei mal ſo groß iſt, als die Seite des Tetraeder, deſſen Netz dargeſtellt werden ſoll.

2. Schneidet man auf einer geraden Linie drei gleiche Stücke ab, alſo ab = bc = cd, Fig. 60., beſchreibt auf der einen Seite dieſer Linie über ac und auf der andern über bd ein gleichſeitiges Dreieck, halbirt die Seiten dieſer Dreiecke und verbindet in jedem von beiden die Halbirungspunkte durch gerade Linien; ſo erhält man 8 gleichſeitige gleiche Dreiecke, die ſo aneinander gereihet ſind, daß ſie das Netz des Octaeder darſtellen, deſſen Seite = ab iſt.

3. Das regulaire Hexaeder oder der Würfel iſt ein normales Parallelepipedon, und das Netz deſſelben beſteht daher

aus einem Quadrate, dem an einer Seite zwei gleichgroße Quadrate angeſetzt ſind, und ein Quadrat an jeder der drei übrigen Seiten.

4. Werden an den 5 Seiten des regelmäßigen Fünfecks abcde, Fig. 57., fünf eben ſo große regelmäßige Fünfecke angeſetzt, ſo bildet die, auf dieſe Weiſe erhaltene Figur die Hälfte des Netzes von einem regulairen Dodecaeder. Wird alſo dieſe Figur zweimal gezeichnet, und legt man beide mit einer Seite an einander, ſo erhält man das vollſtändige Netz eines Dodecaeder.

5. Zeichnet man ein gleichſeitiges Dreieck acd, Fig. 61., verlängert ac, macht cb = ac, vollendet das hierdurch beſtimmte Parallelogramm abcd, zieht cb′ zu ad parallel und verbindet b mit b′, ſo wird dadurch das ganze Parallelogramm abcd in 4 gleiche gleichſeitige Dreiecke zerlegt. Werden nun 5 ſolche Parallelogramme aneinander geſetzt, ſo daß zwei aneinander liegende immer die Hälfte der einen Seite gemein haben, und die Ecken a, a′, a″, a‴, a⁗ in gerader Linie liegen; ſo bildet die ganze auf dieſe Weiſe erhaltene Figur das Netz des regulairen Jcoſaeder: denn es wird, wenn man dieſes Netz zuſammenſchlägt, dadurch ein Körper gebildet, von welchem jede Ecke durch 5 ebene Winkel von 60° begränzt iſt.

Zuſatz. Zeichnet man das Netz irgend eines Körpers auf dünne Pappe, und ſchneidet die ſämmtlichen in dem Netze vorkommenden Linien ihrer Länge nach ſo, daß dadurch die Pappe nur auf der obern Fläche eingeſchnitten wird, während die untere Fläche noch ein zuſammenhängendes Ganzes bildet, ſo läßt ſich alsdann das Netz wirklich zuſammenlegen, und man erhält auf dieſe Weiſe ein genaues Model des Körpers ſelbſt. Damit übrigens ein ſolcher Körper zuſammenhalte, iſt es nöthig, daß man an den äußern Linien des Netzes Klappen ſtehen läßt, wie Fig. 61. an ac eine angegeben iſt. Bei dem Zuſammenlegen des Netzes läßt ſich dieſe Klappe um a⁗e⁗ herumſchlagen und trägt dazu bei, daß der Körper nicht ſo leicht wieder aufgeht. Da bei jedem Körper immer zwei Linien zu einer Kante ſich vereinigen, ſo folgt, daß die Anzahl der Linien, welche den äußern Umfang des Netzes eines Körpers bilden, immer gerade ſein muß, und die Anzahl

der erforderlichen Klappen iſt der halben Anzahl dieſer Linien gleich. Die erſte dieſer Klappen kann bei jeder beliebigen Linie angebracht werden, die Lage aller übrigen aber iſt durch dieſe beſtimmt, ſo daß immer eine Linie überſprungen wird und die nächſt folgende eine Klappe erhält. In Fig. 61. müſſen hiernach, wenn die erſte Klappe bei ac iſt, die folgenden angebracht werden an den Linien bc, b′c′, b″c″, b‴c‴, b⁗c⁗, βe⁗, a⁗c‴, a‴e″, a″e′ und an a′d. Will man an dem, Fig. 22., dargeſtellten Netze eines dreiſeitigen Prisma Klappen anbringen, um aus dieſem Netze den Körper wirklich bilden zu können, und ſetzt man die erſte dieſer Klappen an ac an, ſo kommen die übrigen an de, fl, gh und kb.

Noch iſt bei der Bildung eines Netzes zu berückſichtigen, daß die entworfene Figur ſich immer auf der äußern Seite des Körpers darſtellt, weil, wenn z. B. die Linien af und bp, Fig. 22., eingeſchnitten werden, die Parallelogramme afed und bghk ſich nun nach unten zu zuſammenſchlagen. Es kommt daher, wenn afbg die Grundfläche des Körpers bilden ſoll, afed rechts und bghk links zu liegen. Die einzelnen Flächen haben alſo in dem Körper die entgegengeſetzte Lage von der, die ſie in dem Netze einnehmen.

§. 102.

Von den zum Theil regelmäßigen Körpern.

Vollſtändig regelmäßige Körper, alſo ſolche, die von lauter congruenten regelmäßigen Figuren ſo eingeſchloſſen werden, daß auch alle Ecken derſelben gleich ſind, giebt es nicht mehr, als die in dem Vorhergehenden beſchriebenen fünf, und es läßt ſich jeder derſelben in eine Kugel hineinzeichnen. Wird nun unter einem zum Theil regelmäßigen Körper ein ſolcher verſtanden, der von zwei oder noch mehreren verſchiedenen Arten regelmäßiger Figuren begränzt wird, ſo laſſen ſich eine große Menge ſolcher Körper angeben, die noch überdies der Bedingung Genüge leiſten, daß ſie ſämmtlich in eine Kugel ſich hineinzeichnen laſſen, ſo daß es hiernach für dieſelben einen Mittelpunkt giebt, der von allen Ecken des Körpers gleichweit abſteht. Die erſte Gattung dieſer Körper, die ſich zunächſt darbietet, ſind die regelmäßigen Prismen, nämlich diejenigen, de=

ren Grundflächen regelmäßige Figuren und deren Seitenflächen Quadrate ſind. Um dieſe Körper läßt ſich nicht nur, wie leicht einzuſehen iſt, eine Kugel beſchreiben, ſondern es ſind auch alle Ecken derſelben gleich groß; denn es wird jede derſelben von den Winkeln zweier Quadrate und von dem Polygonalwinkel der Grundfläche gebildet. Außerdem könnten hier noch die Pyramiden angeführt werden, die eine regelmäßige Grundfläche haben und deren Seitenflächen gleichſeitige Dreiecke ſind; bei dieſen Körpern aber iſt die Ecke an der Spitze der Pyramide nur in dem Falle den an der Grundfläche anliegenden Ecken gleich, wenn dieſe ein Dreieck iſt, und alsdann iſt der Körper das regelmäßige Tetraeder. Iſt die Grundfläche aber nicht ein Dreieck, ſo wird die Ecke an der Spitze der Pyramide immer von mehr als 3 ebenen Winkeln gebildet, während die an der Grundfläche anliegenden Ecken immer dreikantige ſind. Uebrigens läßt ſich um eine ſolche Pyramide immer eine Kugel beſchreiben, wenn auch die Seitenflächen derſelben nicht regelmäßig ſind; überhaupt kann um jede Pyramide eine Kugel beſchrieben werden, wenn nur die Grundfläche derſelben eine Figur iſt, um welche ein Kreis beſchrieben werden kann. Der Radius der dazu gehörigen Kugel kann in dieſem Falle immer durch die Auflöſung der Aufgabe gefunden werden: es iſt ein Kreis gegeben und außerhalb deſſelben ein Punkt; man ſoll eine Kugel beſchreiben, zu welcher dieſer Kreis als größter oder als Parallelkreis gehört, und die durch den gegebenen Punkt geht. Pyramiden, deren Grundflächen regelmäßig und deren Seitenflächen gleichſeitige Dreiecke ſind, giebt es außer dem Tetraeder nur noch zwei Gattungen: nämlich ſolche, deren Grundfläche ein Quadrat, und ſolche, deren Grundfläche ein regelmäßiges Fünfeck iſt; weil, wenn die Grundfläche mehr als 5 Seiten hat, die Fläche aller, an dieſe Seiten angelegten gleichſeitigen Dreiecke zuſammengenommen entweder der Grundfläche gleich iſt, oder weniger beträgt als dieſe: das erſtere iſt der Fall, wenn die Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck iſt, und das letztere, wenn ſie mehr als 6 Seiten hat.

Außer den Prismen giebt es noch mehrere Körper, die von zwei verſchiedenen Gattungen regelmäßiger Figuren be=

gränzt ſind, um die eine Kugel beſchrieben werden kann, und in welchen alle Ecken gleiche Größe haben und auf gleiche Weiſe gebildet ſind. Es läßt ſich nachweiſen, daß — die regelmäßigen Prismen nicht mitgerechnet — zehn verſchiedene Gattungen ſolcher Körper möglich ſind. Es würde zu weit führen, alle dieſe Körper hier angeben zu wollen, und es folgt daher blos einiges über zwei derſelben. Nämlich

1. Werden die 12 Kanten eines Würfels halbirt, und man verbindet in jeder Fläche je zwei neben einander liegende Halbirungspunkte durch gerade Linien, ſo bildet jede Ecke des Würfels eine Pyramide, deren Grundfläche ein gleichſeitiges Dreieck iſt, wie Smnc Fig. 14., und in jeder Fläche des Würfels bilden die Linien, welche die Halbirungspunkte verbinden, ein Quadrat. Schneidet man nun von dem Würfel die an den acht Ecken deſſelben gebildeten 8 Pyramiden hinweg, ſo bleibt ein Körper übrig, der von 8 gleichſeitigen Dreiecken und von 6 Quadraten eingeſchloſſen wird; jede Ecke dieſes Körpers iſt von 4 ebenen Winkeln gebildet, von welchen 2 von 60° und 2 von 90° einander gegenüber liegen, und der Mittelpunkt der Kugel, die um den Würfel beſchrieben werden kann, iſt zugleich der der Kugel, welche ſich um dieſen Körper beſchreiben läßt. Der Radius derſelben iſt dem Abſtande von den Halbirungspunkten der Kanten des Würfels gleich. Wenn aber cd in S halbirt wird, und man legt durch S die Fläche Spqr parallel zu adDA, ſo muß der Mittelpunkt der Kugel in dem Mittelpunkte der ſchneidenden Fläche liegen, die ebenfalls ein Quadrat iſt: folglich iſt der Radius der Kugel, die um den zum Theil regelmäßigen Körper beſchrieben werden kann, der halben Diagonale des Quadrats gleich. Nun iſt für die Seite des Würfels $cd = 2k$, die Diagonale $ac = 2k\sqrt{2}$, folglich iſt der Radius der Kugel, die um den Körper beſchrieben werden kann, $= k\sqrt{2}$. Eben ſo groß iſt aber auch $mS = Sn = mn$, denn es ſind auch dieſe Linien der halben Diagonale des Quadrats gleich; folglich iſt der Körper, welcher dadurch entſteht, wenn man von S, m und n Linien an den Mittelpunkt der Kugel zieht, ein Tetraeder. Der Kubikinhalt eines Tetraeder iſt nach §. 95. $= \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$, und weil hier die Seite $a = k\sqrt{2}$, ſo iſt der Inhalt eines ſolchen Te=

traeder = $\frac{k^3}{3}$. Nun beſteht der ganze Körper aus 8 ſolcher Tetraeder und aus 6 Pyramiden, welche ein Quadrat zur Grundfläche haben, das halb ſo groß iſt, als das Quadrat, welches die Fläche des Würfels bildet, und die Höhe dieſer Pyramiden iſt der halben Seite des Würfels gleich, ſo daß der Inhalt einer jeden dieſer vierſeitigen Pyramiden für cd = 2k ausgedrückt wird durch

$$\tfrac{1}{3} \times k \times 2k^2 = \frac{2k^3}{3},$$

folglich iſt der Kubikinhalt des ganzen Körpers

$$= 8 \times \frac{k^3}{3} + 6 \times \frac{2k^3}{3} = \frac{20k^3}{3} = K.$$

Der Inhalt des Würfels aber iſt $(2k)^3 = 8k^3 = W$

folglich iſt $W : K = 6 : 5$.

Der auf die oben angegebene Weiſe aus dem Würfel gebildete Körper hat alſo $\frac{5}{6}$ des Inhalts des Würfels ſelbſt.

2. Wenn man an die 4 Seiten eines Quadrats G, Fig. 62., vier eben ſo große Quadrate A, B, C und D und an eine Seitenlinie eines jeden dieſer Quadrate, nach einerlei Richtung die gleichſeitigen Dreiecke a, b, c und d anſetzt, ſo laſſen ſich, wenn G als Grundfläche unverändert die Lage behält, die übrigen Figuren zuſammenſchlagen und es entſteht dadurch ein achtkantiges hohles Gefäß mit einer vierſeitigen Grundfläche, deſſen oberer Rand, wie ſich leicht nachweiſen läßt, in einer Ebene liegt und ein regelmäßiges Achteck bildet. Die vier Ecken an der Grundfläche ſind gleich groß, und es wird jede derſelben von 4 ebenen Winkeln gebildet, von welchen drei, Winkel der Quadrate und der vierte der eines gleichſeitigen Dreiecks ſind. Auf den Rand dieſes Gefäßes, der, wie bereits bemerkt worden iſt, ein regelmäßiges Achteck bildet, kann ein Gürtel von 8 gleich großen, der Grundfläche G gleichen Quadraten aufgeſetzt werden, wodurch alsdann an dem obern Rande des Gefäßes 8 Ecken gebildet ſind, die unter ſich und den Ecken an der Grundfläche gleich ſind. Legt man nun endlich über die 8 Quadrate, deren obere Linien ebenfalls ein regelmäßiges Achteck bilden müſſen, ein dem aus G, A, B, C, D, a, b, c, d gebildeten congruentes Ge=

fäß, ſo daß der Rand deſſelben mit den obern Linien des Gürtels zuſammenfällt, ſo erhält man einen geſchloſſenen Körper, der von 18 Quadraten und 8 gleichſeitigen Dreiecken begränzt wird. Dieſer Körper gehört zu den zum Theil regelmäßigen, da er von zweierlei regelmäßigen Figuren begränzt iſt, und alle Ecken deſſelben auf gleiche Weiſe gebildet und gleich groß ſind. Daß dieſer Körper aber auch einen Mittelpunkt hat, nämlich einen Punkt, der von allen Ecken deſſelben gleich weit abſteht, und daß daher um denſelben auch eine Kugel beſchrieben werden kann, läßt ſich auf folgende Art einſehen: Es wird dieſer Körper nach drei Richtungen von einem Gürtel umſchloſſen, der aus 8 Quadraten beſteht; nämlich nach der Richtung B, G, D etc., nach der Richtung A, G, C etc. und der dritte Gürtel iſt der auf dem Rande des Gefäßes aufliegende, deſſen Netz, Fig. 62., angegeben iſt. Die acht, von dieſen drei Gürteln leer gelaſſenen Zwiſchenräume ſind durch eben ſo viele gleichſeitige Dreiecke ausgefüllt. Zieht man in der Mitte eines jeden dieſer drei Gürtel eine Linie um den ganzen Körper, ſo bildet dieſe in jedem Falle ein regelmäßiges Achteck, und man erhält auf dieſe Weiſe drei ſolche regelmäßige Figuren, von welchen jede die übrigen beiden normal halbirt; es haben dieſelben daher alle drei einen gemeinſchaftlichen Mittelpunkt, der nothwendig von allen Ecken des Körpers gleich weit abſtehen muß. Dieſer Punkt iſt daher zugleich der Mittelpunkt der Kugel, die um den Körper beſchrieben werden kann. Wird nun der Radius des zu den regelmäßigen Achtecken gehörigen Kreiſes $= M$ geſetzt und die Seite des den Körper bildenden Quadrats, welche zugleich die Seite des regelmäßigen Achtecks iſt, $= a$, ſo iſt der Radius R der Kugel durch die Gleichung beſtimmt

$$R^2 = M^2 + (\tfrac{1}{2}a)^2.$$

Nun hängt in dem regelmäßigen Achteck die Seite a von dem Radius M des Kreiſes, der ſich um daſſelbe beſchreiben läßt, durch die Gleichung ab

$$a = M\sqrt{(2 - \sqrt{2})} \text{ und daher } M = \frac{a}{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}$$

$$\text{folglich iſt auch } R^2 = \frac{a^2}{2 - \sqrt{2}} + \frac{a^2}{4} = \frac{6a^2 - a^2\sqrt{2}}{4(2 - \sqrt{2})}$$

alſo $R^2 = \frac{a^2(6 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}{8} = \frac{a^2(10 + 4\sqrt{2})}{8}$

und es iſt daher $R = \frac{a}{2}\sqrt{(5 + 2\sqrt{2})}$

die Formel für den Radius der Kugel, welche um den Körper beſchrieben werden kann.

Der ganze Körper beſteht aus 18 vierſeitigen Pyramiden, welche ein Quadrat zur Grundfläche haben und aus 8 dreiſeitigen, deren Grundfläche ein gleichſeitiges Dreieck iſt. Wird nun der Radius des Kreiſes, der um das Quadrat ſich beſchreiben läßt, = q geſetzt und der Radius des Kreiſes, der um das gleichſeitige Dreieck beſchrieben werden kann, = p, und ſetzt man die Höhe der vierſeitigen Pyramiden = h und die der dreiſeitigen = H, ſo iſt

$$h^2 = R^2 - q^2 \text{ und } H^2 = R^2 - p^2$$

oder es iſt

$$h^2 = \frac{a^2(5 + 2\sqrt{2})}{4} - q^2 \text{ und } H^2 = \frac{a^2(5+2\sqrt{2})}{4} - p^2.$$

Da nun $q^2 = \frac{1}{2}a^2$ und $p^2 = \frac{a^2}{3}$,

ſo iſt auch

$$h^2 = \frac{a^2(5+2\sqrt{2})}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2(4+2\sqrt{2})}{4} = a^2(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}),$$

und

$$H^2 = \frac{a^2(5+2\sqrt{2})}{4} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2(11+6\sqrt{2})}{12} = \frac{a^2(3 + \sqrt{2})^2}{12}.$$

Der Kubikinhalt einer der vierſeitigen Pyramiden iſt

$$P' = \frac{a^2 h}{3} = \frac{a^3}{3}\sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

und der einer dreiſeitigen

$$P'' = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{a(3 + \sqrt{2})}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{a^3}{24}(3 + \sqrt{2});$$

folglich iſt der Kubikinhalt des ganzen Körpers

$$K = 18P' + 8P'' = 3a^3\sqrt{(4 + 2\sqrt{2})} + \frac{a^3}{3}(3 + \sqrt{2})$$

$$= a^3 \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{3} + 3\sqrt{(4+2\sqrt{2})}\right].$$

Die ganze Oberfläche des Körpers wird ausgedrückt durch

$$F = 18a^2 + 8 \times \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 18a^2 + 2a^2\sqrt{3}$$
$$= 2a^2 (9 + \sqrt{3}).$$

Außerdem iſt die Anzahl der Kanten dieſes Körpers = 48 und die Anzahl der Ecken = 24.

Außer den beiden hier beſchriebenen, zum Theil regelmäßigen Körpern, die blos aus regelmäßigen Dreiecken und Quadraten gebildet ſind, giebt es noch einen dritten Körper, der ebenfalls blos dieſe beiden Gattungen von Figuren enthält, und dem auch alle die Eigenſchaften zukommen, welche bei jenen beiden vorgefunden werden. Dieſer Körper beſteht aus zwei und dreißig Dreiecken und ſechs Quadraten.

Zuſatz 1. Es iſt bereits oben bemerkt worden, daß überhaupt nur zehn verſchiedene Körper denkbar ſind, die blos aus zwei verſchiedenen Gattungen von regelmäßigen Figuren beſtehen, und die zu den regulairen in ſofern gezählt werden können, weil alle Ecken derſelben gleich groß und auf gleiche Weiſe gebildet ſind, und weil um jeden dieſer Körper eine Kugel ſich beſchreiben läßt. Drei von dieſen Körpern ſind bereits angeführt, und es beſteht jeder derſelben blos aus gleichſeitigen Dreiecken und aus Quadraten. Außerdem giebt es noch fünf hierher gehörige Körper, in welchen ebenfalls gleichſeitige Dreiecke vorkommen; die übrigen Figuren ſind regelmäßige Fünfecke, Sechsecke, Achtecke oder Zehnecke, und zwar beſteht der Körper

entweder	aus	20	Dreiecken	und	12	Fünfecken
oder	=	80	=	=	12	=
=	=	4			4	Sechsecken
=	=	8		=	6	Achtecken
=	=	20	=	=	12	Zehnecken.

Von den beiden übrigen noch möglichen Körpern beſteht der eine aus 6 Quadraten und 8 Sechsecken und der andere aus 12 Fünfecken und 20 Sechsecken.

Zuſatz 2. Auch aus drei verſchiedenen Gattungen von regelmäßigen Figuren laſſen ſich zum Theil regulaire Körper zuſam=

zuſammenſetzen; es ſind aber drei Körper dieſer Art möglich, von welchen der eine aus 20 Dreiecken, 30 Quadraten und 12 Fünfecken, der andere aus 12 Quadraten, 8 Sechsecken und 6 Achtecken, und der dritte aus 30 Quadraten, 20 Sechsecken und 12 Zehnecken beſteht.

Anmerkung. Die hier angeführten 13, zum Theil regelmäßigen Körper werden die archimediſchen Körper genannt, und man findet eine genauere Beſchreibung von denſelben in den Werken von Kepler; auch Käſtner hat in einer beſonderen Abhandlung „De polyedris data lege irregularibus" das wichtigſte von denſelben angegeben. Die Netze, ſo wie die Namen dieſer und mehrerer anderer zum Theil ſymmetriſcher Körper findet man in dem 4ten Buche von F. W. Marpurg's Anfangsgründen des progreſſional-figürlichen Ziffercalculs, nebſt Conſtruction der eckigen, geometriſchen Körper. Berlin 1774.

§. 103.

Noch einige Aufgaben und Bemerkungen.

1. Es ſoll angegeben werden, wieviel körperliche Diagonalen, worunter hier ſolche verſtanden werden ſollen, die innerhalb des Körpers liegen, ohne mit der Oberfläche deſſelben zuſammen zu fallen, in einem regelmäßigen Körper gezogen werden können.

Auflöſung. Wird der Körper von m regelmäßigen nEcken begränzt, und ſind die Ecken deſſelben pkantig, ſo iſt die Anzahl aller Ecken des Körpers $= \frac{mn}{p}$. Da in jeder Ecke p Figuren zuſammenſtoßen, ſo liegen alle Linien, die von der körperlichen Ecke an die Ecken dieſer Figuren gezogen werden, in der Oberfläche des Körpers, und nur die Linien, welche man nach anderen Ecken zieht, bilden körperliche Diagonalen. Die in einer Ecke zuſammenſtoßenden Figuren haben np Winkel, und hiervon bilden p die körperliche Ecke; eben ſoviel muß noch deßwegen in Abzug gebracht werden, weil die körperliche Ecke p Kanten hat, und an dem Endpunkte jeder Kante zwei von dieſen Winkeln zuſammenſtoßen. Man kann daher von einer Ecke aus nach $np - 2p = (n-2)p$ Ecken Linien ziehen, die in der Oberfläche des Körpers liegen. Da

nun die Anzahl aller Ecken $= \frac{mn}{p}$ und daher die Zahl derjenigen, wohin von irgend einer Ecke aus Linien gezogen werden können, $= \frac{mn}{p} - 1$ iſt, ſo beträgt die Anzahl aller von einer Ecke aus möglichen körperlichen Diagonalen $\frac{mn}{p} - 1 - (n-2)p$. Eben ſo viele körperliche Diagonalen können von jeder der $\frac{mn}{p}$ Ecken aus gezogen werden; man erhält aber auf dieſe Weiſe jede zweimal, einmal z. B. von der Ecke A nach der Ecke B, und alsdann auch umgekehrt von B nach A. Folglich wird die Anzahl x aller in einem regulairen Körper möglichen Diagonalen ausgedrückt durch die Formel

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{mn}{p} \left[\frac{mn}{p} - 1 - (n-2)p\right],$$

nämlich es iſt

$$x = \frac{mn}{2} \left[\frac{mn - p}{p^2} - n + 2\right].$$

Nun iſt für das

Tetraeder	$m = 4,\ n = 3,\ p = 3$;	alſo $x = 0$
Hexaeder	$m = 6,\ n = 4,\ p = 3$;	• $x = 4$
Octaeder	$m = 8,\ n = 3,\ p = 4$;	; $x = 3$
Dodecaeder	$m = 12,\ n = 5,\ p = 3$;	• $x = 100$
Icoſaeder	$m = 20,\ n = 3,\ p = 5$;	; $x = 36$.

Zuſatz. In dem Hexaeder und Octaeder ſind alle Diagonalen gleich groß; in dem Dodecaeder giebt es drei verſchiedene Gattungen, und es ſind 60 von der kleinſten, 30 von der größern und 10 von der größten Art möglich: jede dieſer letztern iſt dem Durchmeſſer der Kugel gleich, die um den Körper beſchrieben werden kann; in dem Icoſaeder giebt es blos zweierlei Diagonalen, nämlich 30 kleinere und 6, von welchen jede dem Durchmeſſer der Kugel gleich iſt.

2. Es ſoll die Größe der verſchiedenen körperlichen Diagonalen des Dodecaeder beſtimmt werden.

Aufloſung. Setzt man die Seite des Körpers $= a$, den Radius der Kugel, die um denſelben beſchrieben werden kann, $= R$, den Radius des Kreiſes, der um das Fünfeck ſich

beſchreiben läßt, $= M$, die Linie bc, Fig. 57., $= p$, die kleinſte Diagonale $= \delta$, die größere $= d$ und die größte $= D$; ſo iſt

$$\delta^2 = (2R)^2 - p^2,\ d^2 = (2R)^2 - a^2 \text{ und } D = 2R.$$

Es iſt aber $p = 2\left(\frac{bc}{2}\right) = 2M \cdot \sin(agc) = 2M \sin 72^\circ$

$$= 2M \cdot \tfrac{1}{4} \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} = \frac{M}{2} \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})},$$

folglich iſt $\delta^2 = 4R^2 - M^2 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

Nach §. 100. iſt aber $M^2 = \dfrac{2a^2}{5 - \sqrt{5}}$

alſo iſt

$$\delta^2 = 4R^2 - a^2 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right) = 4R^2 - a^2 \left(\frac{(5 + \sqrt{5})^2}{20}\right)$$

und da $4R^2 = \frac{a^2}{4}(18 + 6\sqrt{5})$, ſo iſt

$$\delta^2 = a^2 \left[\frac{18 + 6\sqrt{5}}{4} - \frac{(5 + \sqrt{5})^2}{20}\right]$$

$$= a^2 \left[\frac{18 + 6\sqrt{5}}{4} - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}\right] = a^2 \left[\frac{12 + 4\sqrt{5}}{4}\right],$$

es iſt alſo $\delta^2 = a^2 (3 + \sqrt{5})$ und daher

$$\delta = a\sqrt{(3 + \sqrt{5})} = a\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right).$$

Da ferner $d^2 = 4R^2 - a^2$,

ſo iſt auch $d^2 = a^2 \left(\frac{18 + 6\sqrt{5}}{4}\right) - a^2 = a^2 \left(\frac{14 + 6\sqrt{5}}{4}\right)$

und daher $d = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5})$.

Zuſatz 1. Die kleinere Diagonale d des Icoſaeder wird ebenfalls durch die Gleichung beſtimmt

$$d^2 = (2R)^2 - a^2 = 4R^2 - a^2$$

und es iſt hier, nach §. 98.,

$$4R^2 = a^2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}\right) = a^2 \left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}\right),$$

$$\text{alſo } d^2 = a^2 \left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}\right) - a^2 = a^2 \left(\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}\right),$$

und folglich iſt $d = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Zuſatz 2. Hieraus geht zugleich hervor, daß, wenn ein

Dodecaeder und ein Icoſaeder eine gleiche Seite haben, die kleinere Diagonale des Icoſaeder und die Seite deſſelben zuſammengenommen eben ſo groß ſind, als die mittlere Diagonale des Dodecaeder.

3. Es ſind die 5 regelmäßigen Körper in einer und derſelben Kugel beſchrieben: wie hängen in dieſem Falle die Seiten derſelben und wie ihr Inhalt von einander ab?

Aufloͤſung. I. Für das Tetraeder T iſt nach §. 95.

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{6} \text{ und der Inhalt } T = \frac{a^3}{12}\sqrt{2};$$

es iſt alſo, wenn die Seite dieſes Körpers mit t bezeichnet wird,

$$t = \frac{4R}{\sqrt{6}} = \frac{2R\sqrt{6}}{3} \text{ und daher } T = \frac{8R^3}{27}\cdot\sqrt{3}.$$

II. Für das Octaeder O iſt nach §. 96.

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ und der Inhalt } O = \frac{a^3}{3}\sqrt{2},$$

und es iſt daher, wenn die Seite dieſes Körpers mit o bezeichnet wird,

$$o = R\sqrt{2} \text{ und } O = \frac{4R^3}{3}.$$

III. Für das Icoſaeder I iſt nach §. 98.

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)} = \frac{a}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$$

$$\text{und der Inhalt } I = \frac{5a^3\,(3+\sqrt{5})}{12}.$$

Wird alſo die Seite des Icoſaeder = i geſetzt, ſo iſt

$$i = 2R\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)} \text{ und daher}$$

$$a^3 = i^3 = 8R^3\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)},$$

$$\text{alſo iſt } I = \frac{10R^3}{3}\cdot\frac{(3-\sqrt{5})\,(3+\sqrt{5})}{5-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)}$$

$$= \frac{40R^3(5+\sqrt{5})}{60}\sqrt{\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{20}\right)} = R^3\left(\frac{5+\sqrt{5}}{15}\right)\sqrt{(50-10\sqrt{5})}$$

$$= \frac{2R^3}{3}\sqrt{(3+\sqrt{5})\,(5-\sqrt{5})} = \frac{2R^3}{3}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}.$$

IV. Für das Hexaeder H iſt nach §. 99.

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{3} \text{ und der Inhalt } H = a^3,$$

alſo, wenn die Seite = h geſetzt wird,

$$h = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3} \text{ und } H = \frac{8R^3\sqrt{3}}{9}.$$

V. Für das Dodecaeder D iſt nach §. 100.

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{(18+6\sqrt{5})} \text{ und der Inhalt } D = \frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5}),$$

und es iſt daher, wenn die Seite dieſes Körpers mit d bezeichnet wird,

$$d = \frac{4R}{\sqrt{(18+6\sqrt{5})}} = \frac{R\sqrt{(18-6\sqrt{5})}}{3} = \frac{R(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{3}$$

alſo iſt

$$d^3 = \frac{R^3(18-6\sqrt{5})\sqrt{(18-6\sqrt{5})}}{27} = \frac{R^3(6-2\sqrt{5})\sqrt{(18-6\sqrt{5})}}{9}$$

und daher $D = \frac{R^3\,(15+7\sqrt{5})\,(6-2\sqrt{5})\sqrt{(18-6\sqrt{5})}}{36}$,

$$\text{alſo iſt } D = \frac{R^3\,(5+3\sqrt{5})\,\sqrt{(18-6\sqrt{5})}}{9}$$

$$= \frac{R^3\,\sqrt{60}\,(6+2\sqrt{5})}{9} = \frac{2R^3\cdot\sqrt{15}\cdot(1+\sqrt{5})}{9}$$

und daher iſt endlich

$$D = \frac{2R^3}{9}\,[\sqrt{15}+5\sqrt{3}].$$

VI. Werden nun dieſe Reſultate zuſammengeſtellt, ſo hat man für die Seiten der Körper die Werthe

$$t = \frac{2R\sqrt{6}}{3};\; o = R\sqrt{2};\; i = 2R\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)};\; h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

und $d = \frac{R\sqrt{(18-6\sqrt{5})}}{3}$ und es iſt daher

$$t^2 : o^2 : h^2 = \tfrac{8}{3} : 2 : \tfrac{4}{3}$$

nämlich es iſt $t^2 : o^2 : h^2 = 4 : 3 : 2$

und $d^2 : i^2 = \frac{18-6\sqrt{5}}{9} : \frac{4(3-\sqrt{5})}{5-\sqrt{5}}$,

alſo $d^2 : i^2 = 5-\sqrt{5} : 6$.

VII. Für den Inhalt der Körper haben ſich die Reſultate ergeben

$$T = \frac{8R^3\sqrt{3}}{27};\ O = \frac{4R^3}{3};\ H = \frac{8R^3\sqrt{3}}{9};$$

$$I = \frac{2R^3}{3}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} \text{ und } D = \frac{2R^3}{9}[\sqrt{15} + 5\sqrt{3}]$$

und daher iſt

$$T^2 : O^2 : H^2 = \frac{3 \cdot 8^2}{27^2} : \frac{4^2}{3^2} : \frac{3 \cdot 8^2}{9^2}$$

$$= \frac{12}{9^2} : 1 : \frac{12}{9}$$

nämlich es iſt $T^2 : O^2 : H^2 = 4 : 27 : 36$

$$\text{und } D : I = \frac{\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{3} : \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{\sqrt{(90 + 30\sqrt{5})}}{3} : \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$$

alſo iſt $D^2 : I^2 = 30 + 10\sqrt{5} : 30 + 6\sqrt{5}$ u. ſ. w.

Zuſatz. Durch den Radius der gemeinſchaftlichen Kugel ausgedrückt, findet man die Fläche des

$$\text{Tetraeder} = Tfl = \frac{8R^2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{Octaeder} = Ofl = 4R^2\sqrt{3} \text{ und}$$

$$\text{Hexaeder} = Hfl = 8R^2,$$

folglich iſt

$$(Tfl)^2 : (Ofl)^2 : (Hfl)^2 = \frac{8^2}{3} : 4^2 \cdot 3 : 8^2$$

$$= 4 : 9 : 12.$$

4. Ein Tetraeder und ein Octaeder haben gleichen Kubikinhalt: wie verhalten ſich ihre Seiten zu einander?

Aufloͤſung. Es iſt $T = \frac{t^3}{12}\sqrt{2}$ und $O = \frac{o^3}{3} \cdot \sqrt{2}$

ſoll nun $T = O$ ſein, ſo folgt $\frac{t^3}{4} = o^3$.

alſo $t^3 = 4o^3$ und daher

$o^3 : t^3 = 1 : 4$ und $o : t = \sqrt[3]{2} : 2$.

Zuſatz. Weil $Tfl = t^2\sqrt{3}$ und $Ofl = 2 \cdot o^2\sqrt{3}$, ſo iſt, wenn beide Körper gleiche Oberflächen haben ſollen,

$t^2 = 2 \cdot o^2$ und daher

$o : t = 1 : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 2$

5. Man kann in jedem regelmäßigen Körper eine Ku-

gel beſchreiben, welche die ſämmtlichen Kanten des Körpers zu Tangenten hat, und es iſt der Radius dieſer Kugel durch die Formel beſtimmt

$$x = \sqrt{\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right)}.$$

Beweis. Zieht man von dem Mittelpunkte des Körpers an irgend zwei neben einander liegende Ecken gerade Linien, ſo wird dadurch ein gleichſchenkliges Dreieck gebildet, deſſen Grundlinie eine Kante des Körpers iſt = a, und deſſen Schenkel dem Radius R der Kugel gleich ſind, die um den Körper beſchrieben werden kann. Die Normale von der Spitze dieſes Dreiecks auf die Grundlinie halbirt alſo die Kante, und es iſt dieſelbe

$$x = \sqrt{\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right)}.$$

Dieſer Werth aber kommt allen Normalen zu, die von dem Mittelpunkte des Körpers auf irgend eine Kante gefällt werden können; folglich iſt x der Radius einer Kugel, deren Mittelpunkt in dem Mittelpunkte des Körpers liegt, und die alle Kanten dieſes Körpers zu Tangenten hat.

Zuſatz. Die Abhängigkeit des Radius dieſer Kugel von der Seite eines jeden der fünf Körper läßt ſich nun leicht beſtimmen, wenn man für R den entſprechenden Werth ſetzt. Hiernach iſt in dem

Tetraeder $x^2 = \frac{a^2}{8}$

Octaeder $x^2 = \frac{a^2}{4}$

Hexaeder $x^2 = \frac{a^2}{2}$

Icoſaeder $x^2 = \frac{a^2}{8}(3 + \sqrt{5}) = \frac{a^2}{8}(\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{5}{2}})^2$

Dodecaeder $x^2 = \frac{a^2}{16}(14 + 6\sqrt{5}) = \frac{a^2}{16}(3 + \sqrt{5})^2.$

6. Jede der fünfkantigen Ecken des Icoſaeder wird von einem regelmäßigen Fünfeck begränzt, und es laſſen ſich, da der Körper zwölf Ecken hat, zwölf ſolcher fünfſeitigen Pyramiden angeben, von welchen jedoch jede mit der nächſt an=

gränzenden einen Theil gemein hat. Es ſoll beſtimmt werden, wie groß der Inhalt einer ſolchen Pyramide iſt, und wie groß der Theil iſt, den zwei neben einander liegende gemein haben.

Aufloͤſung. Setzt man die Höhe der fünfſeitigen Pyramide = p, die Seite des Körpers = a und den Radius der Kugel, die ſich um denſelben beſchreiben läßt, = R, ſo findet, wie leicht einzuſehen iſt, die Proportion ſtatt

$$p : a = a : 2R$$

alſo iſt $p = \frac{a^2}{2R}$.

Nach §. 98. aber iſt $2R = a \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)}$;

folglich iſt auch $p = a \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)}$.

Die Grundfläche der Pyramide iſt ein regelmäßiges Fünfeck, deſſen Seite = a, und es iſt daher die Fläche derſelben nach §. 100. No. 6.

$$f = \frac{a^2}{16}(5+\sqrt{5})\sqrt{(10+2\sqrt{5})};$$

folglich iſt der Inhalt P einer der fünfſeitigen Pyramiden des Icoſaeder

$$P = \frac{pf}{3} = \frac{a^3}{48}(5+\sqrt{5})\sqrt{\left(\frac{(3-\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{5-\sqrt{5}}\right)}$$

$$= \frac{a^3}{48}(5+\sqrt{5})\sqrt{\left(\frac{(6-2\sqrt{5})(5+\sqrt{5})^2}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}\right)}$$

$$= \frac{a^3}{48}(5+\sqrt{5})^2\sqrt{\frac{(-1+\sqrt{5})^2}{20}}$$

$$= \frac{a^3(5+\sqrt{5})^2(-1+\sqrt{5})}{48 \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{a^3(30+10\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}}{480};$$

nämlich es iſt $P = \frac{a^3(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{48}$

$$= \frac{a^3(10+2\sqrt{5})}{48} = \frac{a^3}{24}(5+\sqrt{5}).$$

Der gemeinſchaftliche Theil zweier Pyramiden iſt, wie der Augenſchein lehrt, eine dreiſeitige Pyramide, welche ebenfalls die Höhe p hat, und deren Grundfläche das Dreieck abc, Fig. 57.,

iſt, wenn abcde die Grundfläche der fünfſeitigen Pyramide bildet; wird alſo dieſer gemeinſchaftliche Theil = X geſetzt, ſo iſt

$$P : X = abcde : \Delta abc.$$

Da nun $\Delta abc = \frac{(ab)^2 \sin b}{2r} = \frac{a^2 \sin 108°}{2r} = \frac{a^2 \sin 72°}{2r}$

$= \frac{a^2 \sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{8}$ und $abcde = \frac{a^2}{16}(5+\sqrt{5})\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$,

$$\text{ſo iſt auch } P : X = \frac{5+\sqrt{5}}{2} : 1,$$

$$\text{und daher iſt } X = \frac{2P}{5+\sqrt{5}};$$

da nun gefunden worden iſt $P = \frac{a^3}{24}(5+\sqrt{5})$,

$$\text{ſo iſt endlich } X = \frac{a^3}{12}.$$

Zuſatz. Die Größe des gemeinſchaftlichen Theiles X zweier der fünfſeitigen Pyramiden des Icoſaeder hätte auch auf folgende Art gefunden werden können: Es iſt X ein Segment, welches auf der Oberfläche des Icoſaeder von zwei gleichſeitigen Dreiecken begränzt wird, die unter einem Winkel μ gegen einander geneigt ſind, deſſen Größe nach §. 98. No. 6. durch die Formel beſtimmt iſt $\cos\mu = -\frac{r}{3}\sqrt{5}$, und innerhalb des Körpers wird X ebenfalls von zwei Dreiecken begränzt; man kann daher das Segment auch als eine dreiſeitige Pyramide berechnen, deren Grundfläche ein gleichſeitiges Dreieck mit der Seite = a iſt, und deren Höhe ausgedrückt wird durch $\frac{h \sin\mu}{r}$, wenn man mit h die Höhe des gleichſeitigen Dreiecks bezeichnet. Folglich iſt auch

$$X = \frac{1}{3} \cdot \frac{h \sin\mu}{r} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3},$$

oder weil $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, ſo iſt auch

$$X = \frac{a^3}{8} \cdot \frac{\sin\mu}{r}.$$

Nun iſt $\sin \mu = \sqrt{(r^2 - \cos^2\mu)} = \sqrt{\left(r^2 - \frac{5r^2}{9}\right)} = \frac{2}{3}r$;

$$\text{alſo iſt } X = \frac{a^3}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{a^3}{12}.$$

7. Wenn man in einem Dodecaeder alle Kanten halbirt, und die Halbirungspunkte der zu einer und derſelben Ecke gehörigen Kanten durch gerade Linien verbindet, ſo daß dadurch an jeder Ecke eine dreiſeitige Pyramide beſtimmt wird, und man ſchneidet die auf dieſe Weiſe beſtimmten Pyramiden ab, ſo bleibt ein zum Theil regelmäßiger Körper übrig, deſſen Eigenthümlichkeiten und namentlich deſſen Kubikinhalt und Oberfläche beſtimmt werden ſollen.

Auflöſung. Daß der von dem Dodecaeder übrig bleibende Körper zu den zum Theil regelmäßigen Körpern, §. 102., gehört, ergiebt ſich auf folgende Art: Dadurch, daß man die Halbirungspunkte der Kanten durch gerade Linien verbindet, wird in jedes, das Dodecaeder begränzende Fünfeck ein kleineres hineingezeichnet, das die halbe Diagonale zur Seite hat; es iſt nämlich, wenn abcde, Fig. 57., die begränzende Fläche iſt, $hk = \frac{1}{2}(be)$ die Seite des kleineren, hineingezeichneten regelmäßigen Fünfecks. Daher wird der von dem Dodecaeder übrig bleibende Körper ebenfalls von zwölf regelmäßigen Fünfecken begränzt, und außerdem noch von eben ſo viel gleichſeitigen Dreiecken, als das Dodecaeder Ecken hatte, alſo von zwanzig ſolchen Dreiecken. Hieraus geht hervor, daß der übrig bleibende Körper von zwölf regelmäßigen Fünfecken und zwanzig Dreiecken begränzt iſt, und daß jede Ecke deſſelben von zwei Winkeln der Fünfecke und von zwei Winkeln der Dreiecke auf gleiche Art gebildet iſt; der Körper gehört alſo wirklich zu den, §. 102., betrachteten Körpern. Die Anzahl der Ecken dieſes Körpers beträgt dreißig, und die der Kanten deſſelben iſt ſechszig.

In dem Dodecaeder läßt ſich jede Ecke dadurch, daß man in den drei dieſelbe bildenden Fünfecken die Diagonalen zieht, zu einer Pyramide P ergänzen, welche der ähnlich iſt, die, um den oben angegebenen Körper zu erhalten, abgeſchnitten werden muß, und es verhalten ſich ihre homologen Sei-

ten zu einander wie 2 : 1. Der Inhalt einer jeden der abzuſchneidenden Pyramiden iſt daher $= \frac{1}{8}P$; es iſt alſo, wenn der Inhalt des Dodecaeder $= D$ und der des übrig bleibenden Körpers $= X$ geſetzt wird,

$$X = D - 12 \times \tfrac{1}{8}P = D - \tfrac{3}{2}P.$$

Der Werth von X iſt daher beſtimmt, ſobald man den von P kennt. Es iſt aber P eine dreiſeitige Pyramide, deren Kante a die Seite des Dodecaeder iſt, und die ein gleichſeitiges Dreieck zur Grundfläche hat, von welchem die Seite d die Diagonale des Fünfecks iſt, welches das Dodecaeder begränzt. Daher iſt die Grundfläche der Pyramide fl $= \frac{d^2}{4} \sqrt{3}$, und der Radius des Kreiſes, der um dieſe Grundfläche beſchrieben werden kann,

$$m = \frac{d^3}{4fl} = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{3}.$$

Die Höhe h der Pyramide wird daher ausgedrückt durch

$$h^2 = a^2 - m^2 = a^2 - \frac{d^2}{3};$$

$$\text{alſo iſt } h = \sqrt{\left(a^2 - \frac{d^2}{3}\right)},$$

und daher $P = \frac{1}{3}fl \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{d^2}{4} \sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(a^2 - \frac{d^2}{3}\right)}$.

Da nun nach §. 100. No. 7.

$$D = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5});$$

ſo erhält man für X den Werth

$$X = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}) - \frac{d^2\sqrt{3}}{8}\sqrt{\left(a^2 - \frac{d^2}{3}\right)}.$$

Dieſer Ausdruck aber enthält die beiden Größen d und a, und da d die Seite des Körpers X bildet, ſo muß nun noch der Werth von a durch d ausgedrückt werden.

Da, Fig. 57., $\angle aeb = 36^0$; ſo iſt

$$ae : ef = r : \cos 36^0,$$

$$\text{alſo } a : \tfrac{1}{2}d = r : \sin 54^0,$$

$$\text{und daher iſt } a = \frac{dr}{2 \sin 54^0}$$

und weil $\sin 54^\circ = \frac{r}{4}(1+\sqrt{5})$, ſo iſt

$$a = \frac{2d}{1+\sqrt{5}} = \frac{d(-1+\sqrt{5})}{2}.$$

Es iſt alſo $a^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{d^2(6-2\sqrt{5})}{4} - \frac{d^2}{3}$

$$= \frac{d^2(14-6\sqrt{5})}{12} = \frac{d^2(3-\sqrt{5})^2}{12}$$

und daher $\frac{3}{2}P = \frac{d^2\sqrt{3}}{8}\sqrt{\left(a^2 - \frac{d^2}{3}\right)} = \frac{d^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{d(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{3}}$;

nämlich es iſt $\frac{3}{2}P = \frac{d^3(3-\sqrt{5})}{16}$.

Ferner iſt $a^3 = \frac{d^3(-1+\sqrt{5})^3}{8} = \frac{d^3(6-2\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})}{8}$

$$= d^3(-2+\sqrt{5});$$

folglich iſt $D = \frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$

$$= \frac{d^3}{4}(-2+\sqrt{5})(15+7\sqrt{5}) = \frac{d^3}{4}(5+\sqrt{5}).$$

Da nun $X = D - \frac{3}{2}P$,

ſo erhält man

$$X = \frac{d^3}{4}(5+\sqrt{5}) - \frac{d^3}{16}(3-\sqrt{5})$$

und endlich $X = \frac{d^3}{16}(17+5\sqrt{5})$

als den geſuchten Inhalt des Körpers.

Da übrigens der Körper von zwölf Fünfecken und zwanzig Dreiecken begränzt wird, deren Seite = d iſt, ſo iſt es auch nicht ſchwer, die Formel für die Oberfläche des Körpers X anzugeben.

Zuſatz. Der Radius der Kugel, die um den Körper X beſchrieben werden kann, iſt zugleich der Radius der Kugel, die alle Kanten des Dodecaeder zu Tangenten hat, und es iſt derſelbe daher nach No. 5.

$$x = \frac{a}{4}(3+\sqrt{5})$$

da nun $a = \frac{d(-1+\sqrt{5})}{2}$, ſo iſt auch

$$x = \frac{d(-1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{8};$$

nämlich es iſt $x = \frac{d}{4}(1+\sqrt{5})$.

8. Die fünf regelmäßigen Körper ſind ſo conſtruirt, daß ſie alle gleichen Kubikinhalt haben; es ſoll angegeben werden, wie unter dieſen Bedingungen die Seiten derſelben von einander abhängen.

Auflöſung. Man ſetze den gemeinſchaftlichen Kubikinhalt $=k^3$, ſo iſt für das Tetraeder, deſſen Seite $=t$ ſein ſoll,

$$\frac{t^3}{12}\sqrt{2} = k^3; \text{ alſo } t^3 = 6k^3\sqrt{2}.$$

Für das Octaeder, das eine Seite $= o$ hat, iſt

$$\frac{o^3}{3}\sqrt{2} = k^3; \text{ alſo } o^3 = \frac{3k^3\sqrt{2}}{2}.$$

Für das Icoſaeder, das eine Seite $= i$ hat, iſt

$$\frac{5i^3(3+\sqrt{5})}{12} = k^3; \text{ alſo } i^3 = \frac{12k^3}{5(3+\sqrt{5})},$$

nämlich es iſt $i^3 = \frac{3k^3(3-\sqrt{5})}{5}$.

Für das Hexaeder mit der Seite h iſt

$$h^3 = k^3,$$

und für das Dodecaeder, deſſen Seite $= d$ ſein ſoll, hat man

$$\frac{d^3}{4}(15+7\sqrt{5}) = k^3;$$

es iſt daher $d^3 = \frac{4k^3}{15+7\sqrt{5}}$

$$= \frac{4k^3(7\sqrt{5}-15)}{20} = \frac{h^3(7\sqrt{5}-15)}{5}.$$

Hieraus ergeben ſich nun die Verhältniſſe

$$t^3 : o^3 = 4 : 1$$

$$\text{und } i^3 : d^3 = 3(3-\sqrt{5}) : 7\sqrt{5}-15$$
$$= 3(3-\sqrt{5})(7\sqrt{5}+15) : 20$$
$$= 18\sqrt{5}+30 : 20;$$

nämlich es iſt $i^3 : d^3 = 15+9\sqrt{5} : 10$

u. ſ. w.

§. 114.

Uebungen.

1. Es iſt bereits §. 101. im Zuſatz angegeben worden, wie man zu verfahren hat, wenn das Netz eines Körpers auf Pappe entworfen werden ſoll, in der Abſicht, daraus durch das Zuſammenlegen den Körper ſelbſt zu bilden; es bietet ſich daher jedem hierdurch ein einfaches Mittel dar, die regelmäßigen Körper wirklich zu conſtruiren, und dieſes iſt um ſo zweckmäßiger, da, wenn man einen ſolchen Körper wirklich vor ſich hat, alle Eigenthümlichkeiten deſſelben um vieles leichter eingeſehen werden, als wenn man hierbei mit bloßen Zeichnungen ſich behelfen will. Es wird daher verlangt, daß die Netze der regelmäßigen Körper auf Pappe gezeichnet und daraus die Körper ſelbſt gebildet werden.

2. In §. 102. wird die Behauptung aufgeſtellt, daß es zehn verſchiedene Körper giebt, von welchen jeder die Eigenſchaften hat, daß alle Ecken deſſelben gleich ſind, und daß er blos von zwei verſchiedenen Gattungen regelmäßiger Figuren begränzt wird. Zwei von dieſen Körpern ſind bereits §. 102. näher beſchrieben, und ein dritter in §. 103. No. 7. Es ſollen die Netze von dieſen drei Körpern gezeichnet und aus denſelben die Körper ſelbſt gebildet werden. Da übrigens §. 102. Zuſatz 1. angegeben iſt, aus wie vielen Figuren einer jeden Gattung jeder dieſer Körper beſteht: ſo iſt zu verſuchen, das Netz aller dieſer Körper zu entwerfen, und überhaupt alle Eigenthümlichkeiten eben ſo zu entwickeln, wie in §. 102. und §. 103. No. 7. die Eigenthümlichkeiten von dreien dieſer Körper entwickelt worden ſind.

3. Auf welche Weiſe iſt es möglich, zu beweiſen, daß nicht mehr als zehn verſchiedene Körper möglich ſind, die zu den aus zwei Gattungen regelmäßiger Figuren gebildeten gehören?

4. Die Eigenthümlichkeiten des Icoſaeder ſind §. 97. dadurch abgeleitet worden, daß die den Ecken deſſelben entſprechenden zwölf Punkte auf der Oberfläche der dazu gehörigen Kugel beſtimmt wurden, und es entſprechen auch den übrigen regelmäßigen Körpern Punkte auf der Oberfläche der

Kugel, die regelmäßige Figuren auf derſelben bilden, wie bereits §. 87. bewieſen worden iſt. Es ſoll nun angegeben werden, wie man mittelſt einer einfachen geometriſchen Conſtruction, wenn die Seite irgend eines der regelmäßigen Körper gegeben iſt, den Radius der dazu gehörigen Kugel finden kann, ſo wie die den Ecken des Körpers enſprechenden Punkte auf der Oberfläche derſelben.

Anmerkung. Da dieſe Punkte auf der Oberfläche der Kugel ſich wirklich durch eine einfache Conſtruction finden laſſen, ſo iſt dadurch auch das Verfahren beſtimmt, wodurch aus einer gegebenen Kugel jeder der fünf Körper herausgeſchnitten werden kann, weil man zu dieſer Abſicht nur die durch die gegebenen Punkte beſtimmten Segmente von der Kugel abzuſchneiden braucht.

5. Nach §. 102. No. 1. erhält man, wenn die Kanten eines Würfels halbirt, und die dadurch an den Ecken deſſelben beſtimmten Pyramiden weggeſchnitten werden, einen zum Theil regelmäßigen Körper, der von ſechs Quadraten und acht gleichſeitigen Dreiecken begränzt iſt. Eben dieſer aber wird auch erhalten, wenn man die Kanten eines Octaeder halbirt, die Halbirungspunkte verbindet, und die an den Ecken deſſelben dadurch beſtimmten vierſeitigen Pyramiden abſchneidet. Wie muß ſich die Seite des Würfels zu der des Octaeder verhalten, wenn die in beiden Fällen erhaltenen Körper gleich groß ſein ſollen?

6. Es ſoll angegeben werden, wie man mit Hülfe einer geometriſchen Conſtruction die Größe des Neigungswinkels, unter welchem die einen regelmäßigen Körper begränzenden Flächen zuſammenſtoßen, beſtimmen kann. Zugleich iſt der Satz zu beweiſen, daß der Neigungswinkel des Tetraeder den des Octaeder zu 180° ergänzt.

7. Man kann nicht nur in und um jeden regelmäßigen Körper eine Kugel beſchreiben; ſondern es läßt ſich auch aus jedem derſelben einer oder ſelbſt verſchiedene der zum Theil regelmäßigen Körper herausſchneiden, wie bereits durch einige Beiſpiele erläutert worden iſt. Wichtiger aber als dieſes iſt es, daß man in jeden der regelmäßigen Körper einen anderen regelmäßigen hineinzeichnen kann, und dieſes führt zu den fol=

genden intereſſanten Sätzen, deren Beweis leicht gefunden werden kann:

a. Zieht man in den einen Würfel begränzenden ſechs Quadraten die Diagonalen, ſo bilden dieſe die Kanten eines, in den Würfel hineingezeichneten Tetraeder.

b. Werden die Mittelpunkte der Quadrate eines Würfels durch gerade Linien verbunden, ſo bilden dieſe die Kanten eines in dieſen Würfel hineingezeichneten Octaeder, deſſen Ecken in dieſen Mittelpunkten liegen. Uebrigens wird hier ſowohl, als bei jeder anderen regelmäßigen Figur unter dem Mittelpunkte deſſelben der Mittelpunkt des Kreiſes verſtanden, der um dieſe Figur beſchrieben werden kann.

c. Halbirt man die Seiten eines Tetraeder und verbindet die Halbirungspunkte, ſo bilden die Verbindungslinien die Kanten, und die Halbirungspunkte ſind die Ecken eines in das Tetraeder hineingezeichneten Octaeder.

d. Halbirt man die Kanten eines Octaeder, verbindet in jedem der, dieſen Körper begränzenden Triangel die Halbirungspunkte, und halbirt ferner dieſe Verbindungslinien, ſo bilden die hierdurch gefundenen Punkte die Ecken eines in das Octaeder hineingezeichneten Würfels, deſſen Kanten erhalten werden, wenn man dieſe Ecken durch gerade Linien mit einander verbindet.

e. Werden in einem Icoſaeder die Mittelpunkte der daſſelbe begränzenden Dreiecke durch gerade Linien verbunden, ſo daß man von dem Mittelpunkte eines jeden, Verbindungslinien an die der drei angränzenden zieht, ſo bilden dieſe Linien die Kanten, und die Mittelpunkte der Dreiecke ſind die Ecken eines in das Icoſaeder hineingezeichneten Dodecaeder.

f. Werden die Mittelpunkte der ein Dodecaeder begränzenden Fünfecke mit einander ſo verbunden, daß von dem Mittelpunkte eines jeden, Verbindungslinien an die der fünf angränzenden gezogen werden, ſo erhält man hierdurch ein in das Dodecaeder hineingezeichnetes Icoſaeder.

Anmerkung. Den geometriſchen Beweis aller dieſer Sätze findet man in dem funfzehnten Buche der Elemente des Euklides.

8. Nach dem vorigen Satze läßt ſich in jeden der regelmäßigen Körper ein anderer hineinzeichnen. Es iſt daher

zu

zu beſtimmen, wie ſich von den beiden Körpern, von welchen der eine in dem andern enthalten iſt: die Seiten, der Inhalt, die Oberflächen und die Radien der zu ihnen gehörigen Kugeln zu einander verhalten.

9. Wenn in einer und derſelben Kugel ein Dodecaeder und ein Icoſaeder beſchrieben werden, ſo ſind die Radien der Kreiſe, welche um das den erſteren Körper begränzende Fünfeck und um das den letzteren begränzende Dreieck beſchrieben werden können, gleich groß.

10. Von in einer und derſelben Kugel beſchriebenen Körpern verhält ſich die Oberfläche des Dodecaeder zu der des Icoſaeder, wie die Seite des Würfels zu der Seite des Icoſaeder.

11. Es läßt ſich ein ſymmetriſcher Körper conſtruiren, deſſen Oberfläche aus zwölf gleichen, gleichſeitigen Parallelogrammen beſteht, und es wird dieſer Körper das Rhomboidal-Dodecaeder genannt. Man ſoll das Netz dieſes Körpers entwerfen, und die Eigenſchaften, beſonders aber den Ausdruck für den Kubikinhalt deſſelben angeben.

12. Wenn man von einem Icoſaeder zwei einander gegenüberliegende, fünfſeitige Pyramiden hinwegnimmt, ſo bleibt ein Körper übrig, der von zwei regelmäßigen, parallel laufenden Fünfecken und von zehn gleichſeitigen Dreiecken begränzt wird; es ſollen die Eigenthümlichkeiten dieſes Körpers angegeben werden.

13. Was für ein Körper bleibt übrig, wenn man von einem Dodecaeder an ſo vielen Ecken als möglich, die dreiſeitigen Pyramiden abſchneidet, von welchen die Kanten der Ecke die Seitenkanten bilden, und deren Grundfläche ein gleichſeitiges Dreieck iſt, welches die Diagonale des das Dodecaeder begränzenden Fünfecks zur Seite hat?

14. Welcher von den fünf, in einer und derſelben Kugel beſchriebenen regulairen Körpern hat die größte Seite, welcher hat die größte Oberfläche, welcher den größten Kubikinhalt, und wie folgen überhaupt dieſe Stücke ihrer Größe nach auf einander?

15. Die Figuren, von welchen die regelmäßigen Körper begränzt werden, ſind alle in einem und demſelben Kreiſe be-

ſchrieben; wie verhalten ſich in dieſem Falle die Körper zu einander?

16. Wenn man an jede Seite eines regelmäßigen Vielecks eine eben ſolche Figur anſetzt, ſo läßt ſich um die ganze auf dieſe Weiſe gebildete Figur ein Kreis beſchreiben, der durch alle äußere Ecken geht, und deſſen Mittelpunkt mit dem der Figur zuſammenfällt, um welche die übrigen verzeichnet ſind. Man kann daher einen ſolchen Kreis beſchreiben um das vollſtändige Netz eines Tetraeder, um das halbe Netz des Dodecaeder und um fünf Quadrate von dem Netze eines Würfels. Wie wird der Inhalt dieſer Körper durch den Radius dieſes Kreiſes ausgedrückt, und wie verhalten ſich dieſe Körper zu einander, wenn die Radien jener Kreiſe bei allen gleich groß ſind?

Zweite Abtheilung.

Anfangsgründe der höheren Stereometrie.

Einleitung.

§. 105.

Gegenſtand der höhern Stereometrie.

Die Elementar-Stereometrie hat ausſchließlich nur ſolche Körper zu ihrem Gegenſtande, die entweder von lauter ebenen geradlinigen Figuren begränzt ſind, oder die durch Umdrehung einer geradlinigen Figur um eine Seite derſelben oder eines Kreisſtückes um den Durchmeſſer des Kreiſes erzeugt werden, und ſie lehrt, ſowohl den Inhalt als die Oberfläche dieſer Körper berechnen. Nur in einzelnen Fällen iſt es möglich, mit Hülfe der Elemente auch Theile dieſer Körper zu berechnen, die, für ſich genommen, nicht zu der oben angegebenen Gattung gehören, wie dieſes z. B. bei ſchief abgeſtumpften Kegeln oder Cylindern der Fall iſt: indeſſen läßt ſich auch für dieſe Körper nichts vollſtändiges angeben; denn es laſſen ſich keine vollſtändigen Formeln zur Berechnung der Oberfläche derſelben auffinden, und auch bei den für den Kubikinhalt des ſchiefen Kegels und der Kegelhuſe aufgeſtellten Formeln wird das Berechnen der elyptiſchen Abſchnitte als bekannt vorausgeſetzt.

Die höhere Stereometrie beſchäftigt ſich mit allen von krummen Oberflächen begränzten Körpern, in ſo fern das Geſetz ihrer Erzeugung gegeben iſt oder gefunden werden kann; ſie lehrt nicht nur die Berechnung des Inhalts dieſer Körper und ihrer krummen Oberfläche, ſondern ſie beſchäftigt ſich auch mit den Eigenſchaften der krummlinigen Figuren,

welche die Grundfläche des Durchſchnitts eines ſolchen Körpers begränzen, wenn er von einer ebenen Fläche geſchnitten wird; ſo wie mit den Eigenthümlichkeiten der Curven, welche den Durchſchnitt der Oberflächen zweier Körper bilden, wenn einer derſelben durch den andern hindurch geht.

Aus dieſen Angaben läßt ſich entnehmen, daß die höhere Stereometrie ſehr ſchwierige Probleme enthält, und daß eine Auflöſung derſelben ohne Beihülfe der höhern Analyſis nicht wohl möglich iſt. Die Anfangsgründe dieſer Wiſſenſchaft, in ſo fern ſie hier behandelt werden ſoll, enthalten vorzugsweiſe nur diejenigen Probleme, von welchen unmittelbar Gebrauch gemacht werden kann, und die mit Hülfe der einfachſten Sätze der Differential- und Integralrechnung ſich löſen laſſen.

Zuſatz. Bekanntlich kann die Theorie der Differentialrechnung auf mehrere verſchiedene Arten begründet werden, indem man hierbei entweder von dem Begriffe des Unendlichkleinen, oder von dem der Gränzverhältniſſe, oder auch von dem der abgeleiteten Functionen ausgehen kann. Indeſſen läßt ſich nachweiſen, wie auch in dem ſechsten Abſchnitte meines Lehrbegriffes der Differentialrechnung geſchehen iſt, daß alle dieſe Methoden zu einem und demſelben Reſultate führen müſſen. Nur in ſo fern es darauf ankommt, die Theorie ſtreng mathematiſch zu begründen, muß diejenige Methode gewählt werden, durch welche dieſer Zweck am vollſtändigſten erreicht wird, und man darf dabei nicht berückſichtigen, daß vielleicht auf dieſe Weiſe das Verfahren ſchwieriger und die ganze Auseinanderſetzung weitläufiger wird. Wenn aber von der Differentialrechnung auf irgend eine Weiſe Gebrauch gemacht werden ſoll, ſo wird hierbei natürlich die Theorie als bereits begründet vorausgeſetzt, und es iſt nun für die Anwendung diejenige Methode zu benutzen, durch welche der Zweck auf dem kürzeſten Wege erreicht werden kann. Dieſes iſt der Grund, weshalb in den hier folgenden Unterſuchungen in den meiſten Fällen der Begriff des Unendlichkleinen benutzt iſt. Für die Anwendung iſt dieſer Begriff unbedingt der bequemſte, wenn gleich er bei Begründung der Theorie manches zu wünſchen übrig läßt.

Erſter Abſchnitt.

Von den Kegelſchnitten überhaupt und von den Quadraturen und Rectificationen insbeſondere.

§. 106.

Aufgabe.

Ein Kegel wird durch eine Ebene geſchnitten; es ſoll die Gleichung für die krumme Linie angegeben werden, in welcher dieſe Ebene und die Oberfläche des Kegels ſich ſchneiden?

Auflöſung. Es ſei ecf, Fig. 63., der Axendurchſchnitt des Kegels, der hier zur Vereinfachung der Rechnung normal angenommen wird, ſo daß alſo ce = cf iſt; ab ſei die Durchſchnittslinie, in welcher dieſes Dreieck von der ſchneidenden Ebene ayz, welche normal auf ecf iſt, geſchnitten wird. Ferner ſei myn eine Ebene, die den Kegel parallel zu ſeiner Grundfläche ſchneidet, alſo ein Kreis, der ebenfalls normal iſt auf dem Axentriangel ecf; ſo ſteht auch die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie xy dieſes Kreiſes und der Ebene ayz ebenfalls normal auf ecf, und daher auch auf ab und eben ſo auf dem Durchmeſſer mn des Kreiſes myn; es iſt daher

$$(xy)^2 = (mx) \times (xn).$$

Wird ab als Abſciſſenlinie der Curve ayz angenommen, und die Ordinaten parallel zu xy, ſo ſchneiden dieſe die Abſciſſenlinie unter einem rechten Winkel, und es kommt nun darauf an, wenn a den Anfangspunkt der Abſciſſen bildet, eine Gleichung zu finden zwiſchen (ax) = x und (xy) = y, wozu blos erforderlich iſt, die Werthe von mx und xn durch x auszudrücken. Als gegeben kann hierbei angeſehen werden ca = q, der Winkel fab = β und dac = α, und es iſt dabei $\alpha = \frac{180^0 - \gamma}{2} = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$. Nun iſt

$$ax : xm = \sin\alpha : \sin\beta$$

$$\text{und } ax : am = \sin\alpha : \sin(\alpha + \beta),$$

und da (ax) = x, ſo folgt aus dieſen Proportionen

$$(xm) = \frac{x \sin \beta}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad (am) = \frac{x \sin(\alpha+\beta)}{\sin \alpha}.$$

Ferner iſt in dem gleichſchenkligen Dreiecke cmn

$$cm : mn = \sin\alpha : \sin\gamma,$$

oder $(ca+am) : mn = \sin\alpha : \sin\gamma$;

nämlich $\left(q + \frac{x\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}\right) : (mn) = \sin\alpha : \sin\gamma$;

folglich iſt $(mn) = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\left(q + \frac{x\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}\right)$.

Da nun (xn) = mn − mx, ſo iſt auch

$$(xn) = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\left(q + \frac{x\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}\right) - \frac{x \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{q \sin \gamma}{\sin \alpha} + \left[\frac{\sin\gamma \sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha} - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right] x,$$

und weil $\alpha = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$ und alſo $\sin\alpha = \cos\frac{1}{2}\gamma$, ſo iſt auch

$$(xn) = \frac{q \sin \gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma} + \left(\frac{\sin\gamma \sin(\alpha+\beta)}{\cos^2\frac{1}{2}\gamma} - \frac{\sin\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma}\right) x;$$

nämlich es iſt, weil $\sin\gamma = 2 \sin\frac{1}{2}\gamma \cos\frac{1}{2}\gamma$,

$$(xn) = 2q \sin\tfrac{1}{2}\gamma + \left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\gamma \sin(\alpha+\beta) - \sin\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma}\right) x.$$

Es iſt aber ganz allgemein

$$2 \sin p \sin q = \cos(p-q) - \cos(p+q);$$

alſo iſt auch

$$2\sin\tfrac{1}{2}\gamma \sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta-\tfrac{1}{2}\gamma) - \cos(\alpha+\beta+\tfrac{1}{2}\gamma)$$

$$= \cos(90^0 - \tfrac{1}{2}\gamma+\beta-\tfrac{1}{2}\gamma) - \cos(90^0-\tfrac{1}{2}\gamma+\beta+\tfrac{1}{2}\gamma)$$

$$= \cos[90^0-(\gamma-\beta)] - \cos(90^0+\beta)$$

$$= \sin(\gamma-\beta) + \cos(90^0-\beta)$$

$$= \sin(\gamma-\beta) + \sin\beta,$$

folglich iſt auch

$$(xn) = 2q \sin\tfrac{1}{2}\gamma + \frac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}\cdot x$$

und da $(mx) = \frac{x \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{x \sin\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma}$; ſo iſt nun

$$(mx)(xn) = (xy)^2 = y^2 =$$

$$\frac{x \sin\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma}\left[2q \sin\tfrac{1}{2}\gamma + \frac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}\cdot x\right];$$

nämlich es iſt

$$y^2 = 2qx \sin\beta \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma + \frac{\sin\beta\,(\gamma-\beta)}{\cos^2 \frac{1}{2}\gamma} \cdot x^2$$

die geſuchte Gleichung, deren genauere Beſtimmung von der Größe des Winkels β in Beziehung auf γ abhängt. Da dieſe Gleichung übrigens den Werth von y^2 angiebt, ſo geht aus derſelben unmittelbar hervor, daß jedem Werthe von x zwei gleich große einander entgegengeſetzte Werthe von y entſprechen; es iſt nämlich $y = \pm \sqrt{P}$, wenn einſtweilen zur Abkürzung der ganze, oben für y^2 erhaltene Ausdruck mit P bezeichnet wird. Hieraus folgt alſo, daß die Abſciſſenlinie ab eine Axe der Curve iſt.

§. 107.

Nähere Beſtimmungen.

Die gefundene Gleichung erhält einen beſtimmteren Werth erſt alsdann, wenn der Werth von β, oder, was daſſelbe iſt, wenn die Lage von ab näher angegeben wird. Es ſind hier aber folgende drei Fälle zu unterſcheiden: nämlich es iſt die Linie ab entweder parallel zu ce, oder ſie ſchneidet dieſelbe, wenn beide Linien hinreichend verlängert werden, oder ſie trifft rückwärts verlängert mit ce zuſammen. Es iſt alſo entweder $\beta = \gamma$, oder $\beta > \gamma$, oder es iſt $\beta < \gamma$.

1. Wenn $\beta = \gamma$ iſt, ſo wird $\sin(\gamma - \beta) = 0$, und die Gleichung iſt daher in dieſem Falle

$$y^2 = 2qx \sin\beta \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma$$

$$= 2qx \cdot \sin\gamma \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\gamma} = 2qx \cdot 2 \sin\tfrac{1}{2}\gamma \cos\tfrac{1}{2}\gamma \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma};$$

$$\text{alſo } y^2 = 4qx \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma,$$

und daher für $4q \sin^2 \frac{1}{2}\gamma = p$

$$y^2 = px.$$

Die durch dieſe Gleichung beſtimmte Curve wird die Parabel genannt, deren weſentlichſte Eigenſchaften darin beſtehen, daß die Abſciſſen derſelben wie die Quadrate der dazu gehörigen Ordinaten ſich verhalten, daß nur poſitiven Abſciſſen reelle Werthe von y entſprechen, und daß y um ſo größer wird, je größer man den Werth von x annimmt. Dieſe Curve hat daher, weil auch zu jedem Werthe von x zwei

gleich große einander entgegengeſetzte Werthe von y gehören, zwei ohne Ende fortlaufende Schenkel, die immer mehr und mehr von der Abſciſſenlinie ab ſich entfernen, und a iſt der Scheitel der Curve.

2. Wenn $\beta > \gamma$, ſo iſt $\sin(\gamma-\beta)$ negativ

$$= -\sin(\gamma-\beta),$$

und alſo die Gleichung

$$y^2 = 2q \cdot \sin\beta \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma \cdot x - \frac{\sin\beta \sin(\beta-\gamma)}{\cos^2\frac{1}{2}\gamma} \cdot x^2,$$

und es iſt alſo auch

$$y^2 = \frac{\sin\beta \sin(\beta-\gamma)}{\cos^2\frac{1}{2}\gamma}\left[\frac{2q \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma \cos^2\frac{1}{2}\gamma}{\sin(\beta-\gamma)} \cdot x - x^2\right]$$

$$= \frac{\sin\beta \sin(\beta-\gamma)}{\cos^2\frac{1}{2}\gamma}\left[\frac{q \sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)} \cdot x - x^2\right].$$

Da aber, wenn ab verlängert mit ce z. B. in B zuſammentrifft, die Proportion ſtatt findet

$$ca : aB = \sin(\beta-\gamma) : \sin\gamma,$$

ſo iſt, da man ca = q geſetzt hat,

$$(aB) = \frac{q \sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)},$$

es iſt daher, wenn man die gegebene Linie aB mit 2a bezeichnet,

$$y^2 = \frac{\sin\beta \sin(\beta-\gamma)}{\cos^2\frac{1}{2}\gamma}[2ax - x^2].$$

Dieſe Gleichung wird, wenn aB in x halbirt iſt, alſo für

$$(ax) = x = a,$$

$$y^2 = \frac{\sin\beta \sin(\beta-\gamma)}{\cos^2\frac{1}{2}\gamma} \cdot a^2$$

und daher $\frac{y^2}{a^2} = \frac{\sin\beta \sin(\beta-\gamma)}{\cos^2\frac{1}{2}\gamma}$.

Wird alſo die Ordinate, welche zu der Abſciſſe = a gehört, mit b bezeichnet, ſo iſt

$$\frac{\sin\beta \sin(\beta-\gamma)}{\cos^2\frac{1}{2}\gamma} = \frac{b^2}{a^2};$$

folglich iſt die Gleichung für die Curve auch

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

und die dieſer Gleichung entſprechende Curve wird die Elypſe genannt. In dieſer Curve gehören ebenfalls zu jedem Werthe von x zwei gleich große Ordinaten mit entgegengeſetzten Zeichen; es ſind aber die Ordinaten nur innerhalb gewiſſer Werthe von x reell: nämlich es iſt $y = o$, ſowohl für $x = o$, als auch für $x = 2a$, und y wird imaginair, ſobald $x < o$, alſo negativ, oder $x > 2a$ angenommen wird. Die Elypſe iſt daher eine geſchloſſene Curve, und da für $x = a \pm z$ wird

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,[2a\,(a \pm z) - (a \pm z)^2]$$

$$= \frac{b^2}{a^2}\,(a^2 - z^2),$$

alſo die Ordinate für $x = a + z$ und für $x = a - z$ gleiche Werthe erhält; ſo folgt, daß, wenn man in dem Mittelpunkte der Axe aB auf beiden Seiten derſelben eine Ordinate zieht, welche bekanntlich $= \pm\, b$ iſt, durch die beiden Linien, von welchen die eine $= 2a$ und die andere $= 2b$ iſt, die Elypſe in vier congruente Theile getheilt wird. Die Linien 2a und 2b werden die Axen der Elypſe genannt.

3. Wenn $\beta < \gamma$, ſo iſt $\sin(\gamma - \beta)$ poſitiv; alſo die Gleichung

$$y^2 = 2q \sin\beta \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma \cdot x + \frac{\sin\beta \sin(\gamma - \beta)}{\cos^2 \frac{1}{2}\gamma} \cdot x^2,$$

oder es iſt

$$y^2 = \frac{\sin\beta \sin(\gamma - \beta)}{\cos^2 \frac{1}{2}\gamma} \left[\frac{q \sin\gamma}{\sin(\gamma - \beta)}\; x + x^2\right].$$

In dieſem Falle aber trifft die Linie ba mit der rückwärts verlängerten ec, Fig. 64., in B′ zuſammen, und es iſt nun

$$ac : aB' = \sin(\gamma - \beta) : \sin\gamma,$$

$$\text{und daher } (aB') = \frac{q \sin\gamma}{\sin(\gamma - \beta)};$$

folglich iſt jetzt für $(aB') = 2a$ die Gleichung

$$y^2 = \frac{\sin\beta \sin(\gamma - \beta)}{\cos^2 \frac{1}{2}\gamma}\,(2ax + x^2),$$

woraus, wenn man hier eben ſo wie bei der Elypſe

$$\frac{\sin\beta \sin(\gamma - \beta)}{\cos^2 \frac{1}{2}\gamma} = \frac{b^2}{a^2}$$

ſetzt, die einfache Form für die Gleichung erhalten wird

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

welche von der für die Elypſe blos dadurch unterſchieden iſt, daß hier x^2 das entgegengeſetzte Zeichen hat; allein gerade hierdurch wird die durch dieſe Gleichung ausgedrückte Curve, welches die Hyperbel iſt, weſentlich verſchieden von der Elypſe. Die Eigenthümlichkeiten der Hyperbel beſtehen darin, daß nicht nur jedem poſitiven Werthe von x zwei gleichgroße, entgegengeſetzte Ordinaten entſprechen, und alſo ab eine Axe der Curve iſt, die nach der Richtung von ab zwei ohne Ende fortlaufende Schenkel hat; ſondern es entſprechen auch jedem negativen Werthe von x, ſobald $x > 2a$ genommen wird, ebenfalls zwei gleich große, reelle Ordinaten, und es hat daher auch nach der Richtung B′b′ die Curve zwei ohne Ende fortlaufende Schenkel. Nur für die Werthe von x zwiſchen o und $-2a$ werden die Werthe von y imaginair, und es ſind daher a und B′ die beiden Scheitel der Hyperbel, welche als die Curve mit vier ohne Ende fortlaufenden Schenkeln bezeichnet werden kann. Dieſe vier Schenkel laſſen ſich ſelbſt an dem, aus zwei Kegeln beſtehenden Körper darſtellen, von welchem eff′e′ der Axendurchſchnitt iſt.

Zuſatz 1. Wenn man in der allgemeinen Gleichung für die Kegelſchnitte

$$y^2 = 2q \sin\beta \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma \cdot x + \frac{\sin\beta \sin(\gamma-\beta)}{\cos^2 \frac{1}{2}\gamma} \cdot x^2$$

$q = o$ ſetzt, ſo wird für $\dfrac{\sin\beta \sin(\gamma-\beta)}{\cos^2 \frac{1}{2}\gamma} = k^2$

$$y = kx,$$

welches eine Gleichung für die gerade Linie iſt, weil, wie bekannt, jeder Schnitt durch die Spitze des Kegels ein geradliniges Dreieck ſein muß.

Setzt man aber $\beta = 180^0 - \alpha = 90^0 + \frac{1}{2}\gamma$, ſo wird

$$y^2 = 2q \cos\tfrac{1}{2}\gamma \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma \cdot x + \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma \cdot \sin(\frac{1}{2}\gamma - 90^0)}{\cos^2\frac{1}{2}\gamma} \cdot x^2$$

$$= 2q \sin\tfrac{1}{2}\gamma \cdot x - x^2.$$

Es iſt aber $ac : ad = 1 : 2 \sin\frac{1}{2}\gamma$;

alſo für ad = 2R

$$q : 2R = 1 : 2 \sin \tfrac{1}{2}\gamma;$$

folglich iſt $2q \sin \tfrac{1}{2}\gamma = 2R$,

und daher $y^2 = 2Rx - x^2$,

welches die Gleichung für den Kreis iſt, wenn der Endpunkt des Durchmeſſers als Anfangspunkt der Abſciſſen angenommen wird.

Zuſatz 2. Iſt $\alpha\beta\gamma\delta$, Fig. 65., der Axendurchſchnitt eines Cylinder und ab die Linie, in welcher eine den Cylinder ſchief ſchneidende Ebene dieſen Axendurchſchnitt normal ſchneidet, mn und de parallel zu $\delta\gamma$, und die letztere Linie durch den Mittelpunkt c der Linie ab gelegt, ſo iſt cd = ce der Radius der Grundfläche des Cylinders = R, und es iſt nun für

$$ac = cb = a \text{ und } ax = x$$

$$ac : cd = ax : xm; \text{ alſo } (xm) = \frac{Rx}{a}$$

$$bc : ce = bx : xn; \text{ „ } (xn) = \frac{R(2a-x)}{a};$$

$$\text{folglich iſt } (mx)(xn) = \frac{R^2}{a^2}(2ax - x^2).$$

Es iſt aber, wie leicht einzuſehen, $(mx)(xn) = y^2$ das Quadrat der zu ax = x gehörigen Ordinaten der Curve, von welcher ab den Durchſchnitt bildet; folglich iſt

$$y = \frac{R^2}{a^2}(2ax - x^2).$$

Dieſe Gleichung iſt mit der in No. 2. für die Elypſe gefundenen ganz übereinſtimmend; woraus ſich ergiebt, daß jeder Cylinderſchnitt, der nicht durch die Axe deſſelben geht, eine Elypſe oder ein Kreis iſt. Das letztere iſt der Fall, wenn a = R iſt.

Anmerkung. Es würde zu weit führen, ſelbſt nur die wichtigſten Eigenſchaften der drei Kegelſchnitte hier vollſtändig entwickeln zu wollen, da dieſe nicht in ein Werk über Stereometrie gehören. Die Gleichungen für dieſe Curven mußten aber hier abgeleitet werden, weil ſie als Körperſchnitte erſcheinen, und weil die durch dieſe Curven erzeugten Afterkegel häufig gebraucht werden. Uebrigens laſſen ſich die ſämmtlichen Eigenſchaften der Kegelſchnitte aus den hier angegebenen Gleichungen ableiten, und es werden von denſelben gelegentlich diejenigen angeführt werden, von welchen unmittelbar in der Stereometrie Gebrauch gemacht werden kann

§. 108.
Von den Quadraturen.

Man verſteht unter Quadratur überhaupt: die Verwandlung einer zum Theil oder ganz von einer krummen Linie begränzten Fläche in ein Quadrat, oder, was zu demſelben Reſultate führt, die Verwandlung derſelben in eine geradlinige Figur. Dieſer Erklärung kann daher eigentlich nur durch eine geometriſche Conſtruction Genüge geleiſtet werden; da eine ſolche Conſtruction aber nur in äußerſt wenigen Fällen möglich iſt, und überdies die geometriſche Conſtruction für den practiſchen Gebrauch bei weitem nicht ſo genaue Reſultate giebt, als durch Rechnung erhalten werden können, ſo wird die hier gegebene Erklärung bei vorkommenden Fällen, wo es wirklich darauf ankommt, den Inhalt einer von krummen Linien begränzten Fläche kennen zu lernen, wenig beachtet; ſondern man ſucht ſtatt deſſen eine Formel, durch welche entweder der Flächeninhalt einer ſolchen Figur vollſtändig, oder näherungsweiſe mit hinlänglicher Genauigkeit ausgedrückt wird. Das allgemeine Problem von der Quadratur iſt daher: Man kennt die Gleichung für eine Curve; es ſoll hieraus die Formel für den Flächeninhalt der, von einem Bogen dieſer Curve und den dazu gehörigen Coordinaten eingeſchloſſenen Figur abgeleitet werden. Für die Curve ba, Fig. 66., ſei a der Anfangspunkt der Abſciſſen, und die zu der Abſciſſe $ax = x$ gehörige Ordinate $xy = y$, die Fläche abyx werde mit Z bezeichnet, und es ſei $xm = \Delta x$, ſo iſt, wenn durch m die zu $am = x + \Delta x$ gehörige Ordinate $mn = y' = y + \Delta y$ gezogen wird, die Fläche $xynm = \Delta Z$, und es kann daher, für einen ſehr kleinen Werth von Δx, die Linie yn als gerade angeſehen werden; es iſt daher

$$\Delta Z = \left(\frac{y + y'}{2}\right) \Delta x$$

oder $$\Delta Z = \left(\frac{y + y + \Delta y}{2}\right) \Delta x;$$

alſo $$\Delta Z = y\,\Delta x + \tfrac{1}{2}\Delta y \cdot \Delta x.$$

Welche Function y aber auch von x ſein mag, ſo iſt doch immer

$$\Delta y = p\,\Delta x + q\,(\Delta x)^2 \ldots$$

folglich iſt auch

$$\Delta Z = y\,\Delta x + \tfrac{1}{2}p\,(\Delta x)^2 + \tfrac{1}{2}q\,(\Delta x)^3,$$

und hieraus folgt

$$\frac{\Delta Z}{\Delta x} = y + \tfrac{1}{2}p\,\Delta x + \tfrac{1}{2}q\,(\Delta x)^2 \ldots$$

und dieſes giebt für $\Delta x = o$ den Differentialquotient

$$\frac{dZ}{dx} = y;$$

$$\text{folglich iſt } dZ = ydx$$

$$\text{und daher } Z = \int ydx + C$$

die geſuchte Formel für die Quadratur. Bei dem Gebrauche dieſer Formel muß nun aus der gegebenen Gleichung für die Curve entweder für y der Werth durch x ausgedrückt werden, oder man muß den Werth von dx durch y und dy beſtimmen und ſubſtituiren, und es kommt alsdann blos noch darauf an, den auf dieſe Weiſe erhaltenen Differentialausdruck wirklich zu integriren. Kann dieſe Integration vollſtändig geſchehen, ſo erhält man unmittelbar eine brauchbare Formel; läßt ſich der Ausdruck aber nicht integriren, ſo muß man für das Integral eine convergirende Reihe zu erhalten ſuchen, durch welche der Zweck ebenfalls erreicht wird, wenn die erſten Glieder derſelben den vollſtändigen Werth hinreichend genau ausdrücken.

Zuſatz 1. Wenn der Ordinatenwinkel kein rechter iſt, wenn alſo $\angle axy = \alpha$, ſo wird

$$\Delta Z = \left(\frac{y + y'}{2}\right)\Delta x \sin\alpha,$$

und da hier $\sin\alpha$ ein conſtanter Factor iſt, ſo erhält man jetzt

$$dZ = ydx \cdot \sin\alpha,$$

$$\text{und es iſt daher } Z = \sin\alpha \cdot \int ydx + C,$$

eine Formel, die noch allgemeiner als die obige iſt, weil jene aus dieſer für $\alpha = 90^0$ erhalten wird.

Zuſatz 2. Iſt die Gleichung für die Curve durch einen veränderlichen Ordinatenwinkel gegeben, ſo daß man die Relation kennt zwiſchen dem Winkel bay $= \varphi$ und dem Leit-

ſtrahl ay = z, ſo iſt, wenn die Fläche bay = Z geſetzt wird, für $\angle$ yan = $\Delta\varphi$, die Fläche yan = ΔZ, und es iſt daher jetzt

$$\Delta Z > \tfrac{1}{2}z^2 \sin\Delta\varphi \text{ und } \Delta Z < \tfrac{1}{2}(z+\Delta z)^2 \sin\Delta\varphi,$$

und weil für einen ſehr kleinen Werth von $\Delta\varphi$

$$\sin\Delta\varphi = \Delta\varphi \text{ iſt,}$$

ſo erhält man die Bedingung

$$\Delta Z > \tfrac{1}{2}z^2\,\Delta\varphi \text{ und } \Delta Z < \tfrac{1}{2}z^2\,(z+\Delta z)^2\,\Delta\varphi,$$

und hieraus erhält man

$$dZ = \tfrac{1}{2}z^2 d\varphi;$$

folglich iſt in dieſem Falle

$$Z = \tfrac{1}{2}\int z^2 d\varphi + C,$$

wo ebenfalls bei dem Gebrauch entweder z durch φ oder $d\varphi$ durch z und dz ausgedrückt werden muß.

Zuſatz 3. Der Werth der Conſtante C muß in jedem beſonderen Falle aus der gegebenen Gleichung abgeleitet werden.

§. 109.

Quadratur der Parabel.

Die Gleichung für die Parabel iſt nach §. 107. No. 1.

$$y^2 = px; \text{ alſo } y = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}},$$

und es iſt daher die Formel für die Fläche Z der Figur axyn, Fig. 67., wenn a der Scheitel und ax die Axe der Parabel any iſt, für ax = x und xy = y,

$$Z = \int y dx = \int p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx + C;$$

$$\text{nämlich es iſt } Z = p^{\frac{1}{2}}\int x^{\frac{1}{2}}dx + C,$$

$$\text{und weil allgemein } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ ſo iſt hier}$$

$$Z = \frac{p^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \tfrac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{3}{2}} + C,$$

$$\text{oder } Z = \tfrac{2}{3}x\,\sqrt{px} + C,$$

und endlich, da $\sqrt{px} = y$,

$$Z = \tfrac{2}{3}xy + C.$$

Nun iſt aber, wenn die Fläche von axyn geſucht wird, für x = o auch Z = o; alſo iſt auch C = o und daher

$$Z = \tfrac{2}{3}xy.$$

Die Fläche des paraboliſchen Abſchnittes axy iſt alſo $\frac{2}{3}$ des Rechtecks, von welchem die Abſciſſe ax und die Ordinate xy die Seiten ſind.

Nun ſei am = m, mn = n, ax = M und xy = N, ſo iſt

$$\begin{array}{rl} axyn & = \tfrac{2}{3}MN \\ \text{und } amn & = \tfrac{2}{3}mn \\ \hline \text{alſo } mxyqn & = \tfrac{2}{3}(MN - mn). \end{array}$$

Weil aber aus der Gleichung für die Parabel folgt

$$x = \frac{y^2}{p}, \text{ ſo iſt auch } m = \frac{n^2}{p} \text{ und } M = \frac{N^2}{p},$$

und daher auch, wenn für M und m dieſe Werthe geſetzt werden,

$$mxyqn = \tfrac{2}{3}\left(\frac{N^3 - n^3}{p}\right).$$

Wird aber mx = h geſetzt, ſo iſt auch M = m + h, und daher

$$\frac{N^2}{p} = \frac{n^2}{p} + h;$$

$$\text{alſo } \frac{N^2 - n^2}{h} = p;$$

folglich iſt, wenn man für p dieſen Werth ſetzt, die Formel für die Fläche mxyqn =

$$\frac{2h}{3}\left(\frac{N^3 - n^3}{N^2 - n^2}\right) = \frac{2h}{3}\left(\frac{N^2 + Nn + n^2}{N + n}\right).$$

Da ferner die Fläche des Paralleltrapezes

$$mnyx = \frac{(n + N)\,h}{2},$$

ſo erhält man, wenn dieſes von der vorigen Formel abgezogen wird, den Inhalt des Segmentes nqy =

$$\frac{2h}{3}\left(\frac{N^2 + Nn + n^2}{N + n}\right) - \frac{h}{2}\,(N + n);$$

nämlich es iſt die Fläche des Segmentes

$$nqy = \frac{h}{6}\left(\frac{(N - n)^2}{N + n}\right),$$

eine Formel, die zwar einfach iſt, bei der aber vorausgeſetzt wird, daß man die Ordinaten der Punkte n und y in Be=

ziehung auf die Axe kennt. Es läßt ſich hieraus aber eine Formel ableiten, die nur ſolche Größen enthält, welche unmittelbar bei dem Segmente nqy gemeſſen werden können, und zwar auf folgende Art: Man halbire ny in r, und ziehe durch dieſen Punkt die Linie αrz parallel zu der Axe ax, ſetze $\alpha r = \alpha$, $rn = ry = \beta$ und $\angle \alpha rn = \varphi$, ſo iſt

$$\alpha\beta = rS = \frac{N+n}{2} \text{ und}$$

$$rk = \frac{N+n}{2} - n = \frac{N-n}{2}.$$

Da nun $rn : rk = 1 : \cos(rnk)$,

ſo iſt auch $\beta : \frac{N-n}{2} = 1 : \sin\varphi$

alſo $\beta \sin\varphi = \frac{N-n}{2}$.

Ferner iſt $(am) = \frac{(mn)^2}{p} = \frac{n^2}{p}$ und $(mS) = \frac{1}{2}h$;

alſo $(aS) = \frac{h}{2} + \frac{n^2}{p}$

und $(a\beta) = \frac{(\alpha\beta)^2}{p} = \frac{(N+n)^2}{4p}$,

daher iſt $(\beta S) = \frac{h}{2} + \frac{n^2}{p} - \frac{(N+n)^2}{4p}$;

nämlich es iſt $(\alpha r) = \alpha =$

$$\frac{h}{2} - \frac{(N+n)^2 - 4n^2}{4p} = \frac{h}{2} - \frac{(N+3n)(N-n)}{4p}$$

und weil, wie bereits oben gefunden worden iſt,

$p = \frac{N^2 - n^2}{h}$, ſo iſt

$$\alpha = \frac{h}{2} - \frac{h(N+3n)}{4(N+n)},$$

es iſt alſo $\alpha = \frac{h(N-n)}{4(N+n)}$,

und da $\beta \sin\varphi = \frac{N-n}{2}$,

ſo iſt $\alpha\beta \sin\varphi = \frac{h(N-n)^2}{8(N+n)}$;

alſo

$$\text{alſo } \tfrac{2}{3}\alpha\beta \sin\varphi = \frac{h}{6} \cdot \frac{(N-n)^2}{N+n}.$$

Dieſer letzte Ausdruck aber iſt für die Fläche des Abſchnittes aby gefunden worden; folglich iſt auch

$$nqy = \tfrac{4}{3}\alpha\beta \sin\varphi = \tfrac{2}{3}\alpha \cdot 2\beta \sin\varphi$$
$$= \tfrac{2}{3}(\alpha r)(ny) \sin\varphi,$$

nämlich der Abſchnitt beträgt $\frac{2}{3}$ des Parallelogramms, das durch die Linien αr und ny und den von denſelben gebildeten Winkel beſtimmt iſt. Dieſe Formel wird unmittelbar gefunden, wenn man weiß, daß die für die Axe mit ſenkrechten Ordinaten gefundene Gleichung für die Parabel auch für die Abſciſſenlinie az, wenn die Ordinaten parallel zu ny ſind, und alſo von der Abſciſſenlinie halbirt werden, Gültigkeit hat.

Zuſatz. Werden von m aus, Linien an zwei Punkte n und y der Parabel gezogen, und ſoll die Fläche des Ausſchnitts nmyq berechnet werden, ſo braucht man zu der Fläche des Abſchnitts nqy nur die des Dreiecks nmy zu addiren. Es läßt ſich auch für dieſe Abſchnitte eine directe Formel ableiten, wenn man die Gleichung für die Parabel, für den veränderlichen Winkel nmy $= \varphi$ und den Leitſtrahl my $=$ z ſucht. Doch kommt man auf dieſe Weiſe zu keinem bequemeren Ausdruck.

§. 110.

Die Quadratur der Elypſe.

Wenn ab, Fig. 68., die Axe und adb die halbe Fläche der Elypſe iſt, ſo findet für ac $=$ cb $=$ a, cd $=$ b, am $=$ x und mn $=$ y die Gleichung ſtatt, nach §. 107. No. 2.,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

und da die Fläche des von der Abſciſſe am, der Ordinate mn und dem Bogen an eingeſchloſſenen Dreiecks, nach §. 108., ausgedrückt wird durch $Z = \int y dx$, ſo iſt hier

$$Z = \frac{b}{a}\int dx \sqrt{(2ax - x^2)},$$

Es iſt aber nach Meier Hirſch's Integraltafeln für

$$X = \alpha x - \beta x^2 \text{ nach Seite 173.}$$

$$\int dx \sqrt{X} = \left(\frac{x}{2} - \frac{\alpha}{4\beta}\right)\sqrt{X} + \frac{\alpha^2}{8\beta}\int\frac{3x}{\sqrt{X}};$$

alſo iſt auch hier, wo $\alpha = 2a$ und $\beta = 1$ iſt,

$$\int dx \sqrt{(2ax - x^2)} = \left(\frac{x-a}{2}\right)\sqrt{(2ax - x^2)} + \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

und nach S. 164. iſt

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{2}{\sqrt{\beta}}\text{ Arc sin}\sqrt{\frac{\beta x}{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\beta}}\text{ Arc tg}\sqrt{\left(\frac{\beta x}{\alpha - \beta x}\right)};$$

folglich iſt hier

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}} = 2\text{ Arc sin}\sqrt{\frac{x}{2a}} = 2\text{ Arc tg}\sqrt{\left(\frac{x}{2a - x}\right)}$$

und ſonach auch

$$\int dx \sqrt{(2ax - x^2)}$$

$$= \left(\frac{x-a}{2}\right)\sqrt{(2ax - x^2)} + a^2\text{ Arc sin}\sqrt{\frac{x}{2a}}$$

$$= \left(\frac{x-a}{2}\right)\sqrt{(2ax - x^2)} + a^2\text{ Arc tg}\sqrt{\left(\frac{x}{2a - x}\right)},$$

ein Ausdruck, den man auch unmittelbar in Unger's Integralrechnung §. 17. No. VIII. findet; wobei es übrigens einerlei iſt, ob man ſetzt

$$\text{Arc sin}\sqrt{\frac{x}{2a}} \quad \text{oder} \quad \text{Arc tg}\sqrt{\left(\frac{x}{2a - x}\right)},$$

da jeder dieſer beiden Ausdrücke ſich unmittelbar aus dem andern ableiten läßt.

Hiernach iſt die Formel für den elyptiſchen Triangel $amn = Z =$

$$\frac{b\,(x-a)}{2a}\sqrt{(2ax - x^2)} + ab\text{ Arc sin}\sqrt{\left(\frac{x}{2a}\right)} + C,$$

und weil für $x = o$ auch $Z = o$ wird, ſo iſt die Conſtante C ebenfalls $= o$.

Die beſonderen Werthe für die Fläche der einzelnen Stücke einer Elypſe laſſen ſich aus dieſem allgemeinen Ausdrucke nun auf folgende Art ableiten:

1. Setzt man $x = 2a$, ſo wird Z der Inhalt der halben Elypſe, und es iſt jetzt, weil der erſte Theil der Formel den Factor $2ax - x^2 = o$ enthält,

$$Z = ab \text{ Arc sin } 1;$$

es iſt aber $\text{Arc sin } 1 = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$,

alſo iſt $Z = \frac{1}{2} ab\pi$,

und daher $2Z = ab\pi = \varrho^2\pi$ für $\sqrt{ab} = \varrho$.

Die ganze Elypſe iſt alſo einem Kreiſe gleich, der die mittlere Proportionale zwiſchen a und b, alſo zwiſchen beiden Halbaxen, zum Radius hat.

2. Für $x = a$ verſchwindet ebenfalls der erſte Theil der Formel, weil ſie für dieſen Fall den Factor $x - a = o$ enthält, und es wird Z der Ausdruck für den elyptiſchen Quadranten

$$Z = ab \text{ Arc sin } \sqrt{\tfrac{1}{2}} = ab \text{ Arc sin } (\tfrac{1}{2}\sqrt{2}),$$

und weil $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin 45^\circ$, ſo iſt

$$\text{Arc sin } \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 45^\circ = \tfrac{1}{4}\pi, \text{ und daher}$$

$$Z = \tfrac{1}{4} ab\pi;$$

die ganze Elypſe wird alſo durch beide Axen in vier gleiche Quadranten zerlegt.

3. Soll der Flächeninhalt des zwiſchen mn und cd enthaltenen Trapezes, deſſen eine Seite nd ein elyptiſcher Bogen iſt, berechnet werden, ſo braucht man nur amn von acd abzuziehen, und es gilt dieſe Regel für jeden Werth von ac, alſo wenn auch ac größer oder kleiner als die halbe große Axe iſt. Für $ac = X$ und $am = x$ iſt $nmcd = Z =$

$$\frac{b(X-a)}{2a}\sqrt{(2aX-X^2)} + ab \text{ Arc sin } \sqrt{\left(\frac{X}{2a}\right)} -$$
$$\left[\frac{b(x-a)}{2a}\sqrt{(2ax-x^2)} + ab \text{ Arc sin } \sqrt{\frac{x}{2a}}\right],$$

oder es iſt, weil $\frac{b}{a}\sqrt{(2aX-X^2)} = Y = cd$

und $\frac{b}{a}\sqrt{(2ax-x^2)} = y = mn$,

$$nmcd = Z = \frac{(X-a)Y-(x-a)y}{2}$$

$$+ ab\left[\text{Arc sin }\sqrt{\left(\frac{X}{2a}\right)} - \text{Arc sin }\sqrt{\left(\frac{x}{2a}\right)}\right].$$

Nun ſei $p = \sin\varphi$ und $q = \sin\psi$; alſo $\varphi = \text{Arc sin } p$ und $\psi = \text{Arc sin } q$, ſo iſt

$$\sin(\varphi - \psi) = p\sqrt{(1-q^2)} - q\sqrt{(1-p^2)};$$

alſo für $p = \sqrt{\frac{X}{2a}}$ und $q = \sqrt{\frac{x}{2a}}$ wird

$$\sin(\varphi - \psi) = \frac{\sqrt{X(2a-x)}}{2a} - \frac{\sqrt{x(2a-X)}}{2a};$$

folglich iſt $\varphi - \psi = \text{Arc sin} \sqrt{\left(\frac{X}{2a}\right)} - \text{Arc sin} \sqrt{\left(\frac{x}{2a}\right)} =$

$$\text{Arc sin}\left[\frac{\sqrt{X}\ (2a - x) - \sqrt{x}\ (2a - X)}{2a}\right]$$

und es iſt daher auch

$$nmcd = Z =$$

$$\frac{(X-a)Y-(x-a)y}{2} + ab\ \text{Arc sin}\left(\frac{\sqrt{X(2a-x)}-\sqrt{x(2a-X)}}{2a}\right).$$

4. Wird die Sehne nd gezogen, ſo iſt die Fläche des geradlinigen Paralleltrapezes mcdn =

$$\frac{(Y + y)\ (X - x)}{2}$$

und dieſes von dem in No. 3. für Z erhaltenen Werthe abgezogen, giebt die Fläche des von der Sehne nd und dem Bogen nd eingeſchloſſenen elyptiſchen Abſchnitts. Für dieſen Abſchnitt läßt ſich übrigens auch noch auf eine andere Art eine Formel ableiten: Halbirt man nämlich nd in e, Fig. 69., zieht durch dieſen Punkt und den Mittelpunkt c der Axe ab die Linie αc, und $c\beta$ parallel zu nd, ſo findet, wie leicht aus der aufgeſtellten Gleichung für die Elypſe abgeleitet werden kann, für die Abſciſſenlinie αc, wenn man ſetzt

$$\alpha c = \alpha,\ c\beta = \beta,\ \alpha e = x \text{ und } ed = en = y,$$

die Gleichung ſtatt

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(2\alpha x - x^2)$$

und es iſt nun, wenn der Abſchnitt $d\alpha n = 2Z$ geſetzt wird, und der Winkel $\alpha c\beta = \varphi$,

$$Z = \sin\varphi \int y dx;$$

folglich iſt auch, weil hier ganz derſelbe Ausdruck zu integriren iſt, als wenn die Axe die Abſciſſenlinie bildet,

$$Z = \frac{\beta\ (x - \alpha)\ \sin\varphi}{2\alpha}\sqrt{(2\alpha x - x^2)}$$

$$+ \alpha\beta \sin\varphi\ \text{Arc sin} \sqrt{\left(\frac{x}{2\alpha}\right)},$$

und es iſt $\alpha c d = \alpha e n = Z$.

Uebrigens folgt aus dieſer Gleichung für $x = \alpha$

$$Z = \alpha\beta \sin\varphi \cdot \text{Arc} \sin \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \alpha\beta \sin\varphi \cdot \text{Arc } 45^0$$
$$= \tfrac{1}{4}\alpha\beta \sin\varphi \cdot \pi.$$

Nun iſt leicht nachzuweiſen, daß dieſer Ausdruck ebenfalls den vierten Theil der ganzen elyptiſchen Fläche beträgt, woraus zugleich folgt, daß

$$\tfrac{1}{4}\alpha\beta \sin\varphi \cdot \pi = \tfrac{1}{4}ab\pi;$$

alſo $\alpha\beta \sin\varphi = ab$ ſein muß.

5. Will man, Fig. 68., den Flächeninhalt des elyptiſchen Ausſchnitts nmd berechnen, ſo braucht man blos das geradlinige Dreieck nmd zu dem Abſchnitte nd zu addiren. Uebrigens läßt ſich auch für einen ſolchen Ausſchnitt direct eine Formel auffinden, wenn man aus der gegebenen Gleichung für die Elypſe eine andere ableitet zwiſchen dem veränderlichen Winkel nmd $= \varphi$ und dem Leitſtrahle md $= z$, und hierauf die Fläche Z des Ausſchnitts mit Hülfe der Formel §. 108., Zuſatz 2. beſtimmt

$$Z = \tfrac{1}{2}\int z^2 d\varphi.$$

§. 111.

Die Quadratur der Hyperbel.

Die für die Hyperbel gefundene Gleichung iſt

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

und es iſt daher, wenn a, Fig. 67., der Scheitel einer Hyperbel iſt, für $ax = x$, $xy = y$ und die Fläche $axy = Z$,

$$Z = \frac{b}{a}\int dx \sqrt{(2ax + x^2)}.$$

Es iſt aber nach Meier Hirſch, Taf. 53.,

$$\int dx \sqrt{(2ax+x^2)} = \left(\frac{x+a}{2}\right)\sqrt{(2ax+x^2)} - \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(2ax+x^2)}}$$

und nach Taf. 48. iſt

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(2ax+x^2)}} = 2\log\left(\frac{\sqrt{(2a+x)}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}}\right);$$

alſo, wenn man dieſen Werth ſetzt,

$$\int dx\sqrt{(2ax+x^2)} = \left(\frac{x+a}{2}\right)\sqrt{(2ax+x^2)} - a^2\log\left(\frac{\sqrt{(2a+x)}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}}\right)$$

wie auch in Unger's Integralrechnung, §. 17. No. VII. die Formel angegeben iſt, die ſich hier nur durch den Nenner $\sqrt{a}$ unterſcheidet, der übrigens eigentlich zur Conſtante gehört, da man den Nenner $\sqrt{a}$ weglaſſen, und dafür — log $\sqrt{a}$ hinzufügen kann.

Es iſt alſo Z =

$$\frac{b}{a}\left(\frac{x+a}{2}\right)\sqrt{(2ax+x^2)} - ab \log\left[\frac{\sqrt{(2a+x)} + \sqrt{x}}{\sqrt{2a}}\right]$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil für x = o dieſe Formel bereits Z = o giebt, wie es ſein muß. Da übrigens

$$\frac{b}{a}\sqrt{(2ax + x^2)} = y,$$

ſo kann man auch ſetzen

$$Z = \left(\frac{x+a}{2}\right)y - ab \log\left[\frac{\sqrt{(2a+x)} + \sqrt{x}}{\sqrt{2a}}\right].$$

Es iſt aber auch

$$\frac{\sqrt{(2a + x)} + \sqrt{x}}{\sqrt{2a}} = \frac{\sqrt{(2ax + x^2)} + x}{\sqrt{2ax}}$$

$$= \frac{\frac{ay}{b} + x}{\sqrt{2ax}} = \frac{ay + bx}{b\sqrt{2ax}},\text{ alſo auch}$$

$$Z = \left(\frac{x + a}{2}\right) y - ab \log\left[\frac{ay + bx}{b\sqrt{2ax}}\right]$$

$$= \left(\frac{x + a}{2}\right) y - \frac{ab}{2} \log\left(\frac{ay + bx}{b \cdot \sqrt{2ax}}\right)^2$$

und weil

$$\left(\frac{ay + bx}{b\sqrt{2ax}}\right)^2 = \frac{a^2y^2 + 2abxy + b^2x^2}{2ab^2x}$$

$$= \frac{b^2(2ax + x^2) + 2abxy + b^2x^2}{2ab^2x}$$

$$= \frac{ab + bx + ay}{ab},\text{ ſo iſt endlich auch}$$

$$Z = \left(\frac{x + a}{2}\right) y - \frac{ab}{2} \log\left(\frac{ab + bx + ay}{ab}\right).$$

Setzt man nun, Fig. 67., am = x, mn = y, die Fläche amn = z und ax = X, xy = Y und die Fläche axy = Z, ſo erhält man für die Fläche mxyqn = Z — z den Ausdruck =

$$\left(\frac{X+a}{2}\right)Y-\left(\frac{x+a}{2}\right)y-\frac{ab}{2}\left[\log\left(\frac{ab+bX+aY}{ab}\right)-\log\left(\frac{ab+bx+ay}{ab}\right)\right]$$

$$=\frac{XY-xy+a(Y-y)}{2}-\frac{ab}{2}\log\left(\frac{ab+bX+aY}{ab+bx+ay}\right)$$

und zieht man von dieſem Ausdrucke die Fläche des geradlinigen Trapezes nmxy $= \frac{(y+Y)(X-x)}{2}$ ab, ſo bleibt die Formel für den Inhalt des hyperboliſchen Abſchnitts nqy übrig, für welchen übrigens eben ſo, wie für den elyptiſchen Abſchnitt unmittelbar eine Formel gefunden werden kann.

Addirt man zu dem Abſchnitte nqy die Fläche eines geradlinigen Dreiecks nmy, ſo wird der Flächeninhalt eines hyperboliſchen Ausſchnittes nmy gefunden.

Zuſatz. Sowohl bei den Formeln für die Theile der elyptiſchen Fläche, als auch bei den für die Theile der Fläche einer Hyperbel, kommen die conſtanten Größen a und b vor, und es werden dieſelben alſo als bekannt vorausgeſetzt. Sind aber für einen Bogen einer dieſer Curven die Abſciſſen zweier Punkte und die dazu gehörigen Ordinaten bekannt, ſo laſſen ſich hieraus immer die Werthe von a und b berechnen; denn iſt die zu der Abſciſſe x gehörige Ordinate = y und die zu X gehörige = Y, ſo hat man die beiden Gleichungen

$$a^2y^2 = b^2\,(2ax \pm x^2) \text{ und } a^2Y^2 = b^2\,(2aX \pm X^2),$$

wo das obere Zeichen für die Hyperbel und das untere für die Elypſe gilt. Aus dieſen beiden Gleichungen aber folgt

$$\frac{a^2y^2}{2ax \pm x^2} = \frac{a^2Y^2}{2aX \pm X^2}$$

und hieraus findet man durch Reduction

$$2a = \frac{\pm\,(y^2X^2 - x^2Y^2)}{xY^2 - Xy^2},$$

und ein ähnlicher Ausdruck wird auch für b gefunden.

§. 112.

Von den mechaniſchen Quadraturen.

Iſt eine Curve gegeben, von welcher das Geſetz, alſo deren Gleichung nicht bekannt iſt, und kennt man ſtatt deſſen blos die, einigen Abſciſſen derſelben entſprechenden Ordinaten,

ſo läßt ſich aus dieſen eine Näherungsformel für die Fläche des Vierecks auffinden, welches von einem Bogen der Curve, den beiden Ordinaten ihrer Endpunkte und dem zwiſchen denſelben liegenden Stücke der Abſciſſenlinie eingeſchloſſen iſt; die auf dieſe Weiſe erhaltene Formel iſt um ſo genauer, je größer die Anzahl der für dieſen Bogen bekannten Ordinaten, oder je kleiner das dazu gehörige Stück der Abſciſſenlinie iſt. Im Allgemeinen beſteht das, bei der Ableitung einer ſolchen Näherungsformel gebräuchliche Verfahren in folgendem: Man nimmt an, es ſei die gegebene Curve durch ein ſolches Geſetz beſtimmt, daß die Ordinaten $= y$ von den Abſciſſen $= x$ durch die Gleichung abhängen

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \cdots,$$

was um ſo mehr erlaubt iſt, da, welche Function y von x auch immer ſein mag, dieſe Function ſich doch immer in eine ohne Ende fortlaufende Reihe von der angegebenen Form auflöſen läßt. Setzt man nun in dieſer Gleichung nach und nach für x die Werthe, für welche die entſprechenden Ordinaten bekannt ſind, ſo erhält man eben ſo viele Gleichungen, als Ordinaten bekannt ſind, und es laſſen ſich durch dieſe eben ſo viele von den Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$ beſtimmen. Iſt die Anzahl der auf dieſe Weiſe gefundenen Coefficienten $= n$, ſo erhält man für die Curve die Gleichung

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \cdots + \nu x^{n-1}.$$

Da nun, wenn die zu berechnende Fläche $= Z$ geſetzt wird,

$$Z = \int y dx$$

ſein muß, ſo iſt auch

$$Z = \int (\alpha + \beta x + \gamma x^2 \cdots + \nu x^{n-1})\, dx,$$

und daher $Z = \alpha x + \frac{\beta}{2} x^2 + \frac{\gamma}{3} x^3 \cdots + \frac{\nu}{n} x^n$,

und dieſes würde eine Näherungsformel für die geſuchte Quadratur ſein.

Dieſes Verfahren iſt nur in ſo fern weitläufig, als in jedem Falle beſonders erſt die Werthe der Coefficienten berechnet werden müſſen; man hat, um dieſe Weitläufigkeit zu vermeiden, ſogleich in der allgemeinen Formel ſtatt der Coefficienten die Werthe derſelben, durch die gegebenen Ordinaten

ausgedrückt, einzuführen geſucht, und iſt hierdurch, indem man dabei alle Ordinaten als gleichweit von einander abſtehend annahm, auf ſehr einfache Reſultate gekommen. Bezeichnet man nämlich das, zu dem ganzen Bogen by, Fig. 66., der zu quadrirenden Fläche abyx gehörige Stück ax der Abſciſſenlinie mit P, ſetzt die Summe der erſten und letzten oder nten Ordinate, alſo $ab + xy = A$, die der zweiten und $(n-1)$ten $= B$, der dritten und $(n-2)$ten $= C$, ſo daß, wenn n eine gerade Zahl iſt, der letzte Buchſtab die Summe der beiden mittelſten Ordinaten bedeutet, und wenn n ungerade iſt, der letzte Buchſtab blos Eine Ordinate bedeutet, nämlich die mittelſte von allen, ſo iſt

für den Werth von n.	der entſprechende Werth von Z.
$n = 3$	$Z = \frac{P}{6}(A + 4B)$
$n = 4$	$Z = \frac{P}{8}(A + 3B)$
$n = 5$	$Z = \frac{P}{90}(7A + 32B + 12C)$
$n = 6$	$Z = \frac{P}{288}(19A + 75B + 50C)$
$n = 7$	$Z = \frac{P}{840}(41A + 216B + 27C + 272D)$
$n = 8$	$Z = \frac{P}{17280}(751A + 3577B + 1323C + 2989D)$,

und man braucht um ſo weniger die Formeln für größere Werthe von n zu berechnen, da bei einer großen Ausdehnung der Curve, wo mehr Ordinaten erforderlich ſind, die Fläche in einzelne Theile zerlegt werden kann, von welchen jeder beſonders berechnet wird.

Es würde zu weit führen, die vollſtändige Ableitung der hier mitgetheilten Formeln zu zeigen, und es mag daher nur noch die Bemerkung Platz finden, daß die Gleichung

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \cdots + \nu x^{n-1}$$

der Ausdruck iſt für das allgemeine Glied einer arithmetiſchen Reihe vom $(n-1)$ten Range, und daß daher die obigen Formeln mittelſt der Differenzreihen gefunden werden können.

Gewöhnlich giebt man für die Berechnung der Vierecke, wie nmxy, Fig. 67., die Regel, es werde ny als ein Bogen einer Parabel angeſehen, und daher zu dem geradlinigen Trapez nmxy noch das paraboliſche Segment addirt, deſſen Fläche, nach §. 109., zwei Drittel des Parallelogramms iſt, von welchem ny und *αr* die Seiten ſind und *αrn* der Winkel. Dieſe Regel hängt übrigens genau mit dem obigen Verfahren, wodurch die Werthe von Z gefunden wurden, zuſammen. Nämlich es iſt nicht nur die Gleichung für die Parabel

$$y^2 = px,$$

ſondern auch, wenn man den Anfangspunkt der Abſciſſe um ein Stück = a zurückrückt,

$$y^2 = a + px,$$

und es folgt hieraus $x = -\frac{a}{p} + \frac{1}{p} y^2$,

oder, wenn y und x mit einander verwechſelt werden, wenn man alſo z. B. Sq, Fig. 67., als Abſciſſenlinie annimmt, und die Ordinate parallel zu Sa zieht,

$$y = \alpha + \gamma x^2;$$

es entſpricht alſo auch dieſe Gleichung einem paraboliſchen Bogen, und es iſt daſſelbe auch der Fall mit der Gleichung von der Form

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

indem dieſe aus der vorigen erhalten wird, wenn man den Anfangspunkt der Abſciſſen verrückt, alſo z. B. x + n ſtatt x ſetzt. Zwar kann man nun bei einer gewöhnlichen Parabel zu keiner höhern, als zur zweiten Potenz von x kommen, es werden aber alle Curven, die der Gleichung entſprechen

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots$$

zu der Gattung der Parabeln gerechnet, und man nennt ſie, in ſo fern höhere Potenzen von x vorkommen, Parabeln der höhern Ordnung. Hieraus geht alſo hervor, daß die für Z gefundenen Werthe durch die Vorausſetzung erhalten worden ſind, es gehöre die Curve zu der Gattung der Parabeln.

Soll die Fläche ACcba, Fig. 70., berechnet werden, und nimmt man den Bogen abc als zu einer Parabel gehörig an und b für den Scheitel irgend eines Diameters bB, der ſo gelegen iſt, daß die Abſciſſen AB und BC einander gleich ſind,

alſo auch $a\beta = \beta c$, ſo iſt, wenn man durch b eine Parallele zu ac zieht, die Linie $\alpha\gamma$ eine Tangente an dem Punkte b und es iſt nun der paraboliſche Raum abca = $\frac{2}{3}$ von dem Parallelogramme $ac\gamma\alpha$, alſo = $\frac{2}{3}\mu$, wenn $ac\gamma\alpha = \mu$ geſetzt wird. Außerdem ſei das Trapez ACca = m, $AC\gamma\alpha = M$ und die zu berechnende Fläche ACcba = Z, ſo iſt

$$Z = m + \tfrac{2}{3}\mu = \frac{3m + 2\mu}{3},$$

oder weil $\mu = M - m$, ſo iſt

$$Z = \frac{3m + 2(M - m)}{3} = \frac{m + 2M}{3}.$$

Wird nun geſetzt Aa = a, Cc = c, Bb = B, $A\alpha = \alpha$, $C\gamma = \gamma$ und AC = P, ſo iſt

$$M = \left(\frac{A\alpha + C\gamma}{2}\right) P = \left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) P = BP,$$

und $m = \left(\frac{a + c}{2}\right) P$, oder wenn man a + c als die Summe der beiden äußeren Ordinaten = A ſetzt,

$$m = \tfrac{1}{2}AP; \text{ daher iſt auch}$$

$$Z = \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{2}AP + 2BP\right]$$

$$\text{nämlich es iſt } Z = \frac{P}{6}(A + 4B)$$

was mit der oben angegebenen Formel für n = 3 vollkommen übereinſtimmt.

Auch wenn vier gleichweit von einander abſtehende Ordinaten gegeben ſind, und man berechnet die Fläche unter der Vorausſetzung, daß die begränzende Curve ein Bogen einer Parabel ſei, erhält man eine Formel, die mit der oben für n = 4 angegebenen übereinſtimmt. Es ſei, Fig. 71., AB = BC = CD, BC in K halbirt, akd der Bogen einer Parabel und kK, welche zu den Ordinaten Aa, Bb, Cc und Dd parallel iſt, ein Diameter derſelben. Da nun AD in K halbirt iſt, ſo muß auch ad in n und bc in m ebenfalls halbirt ſein, und weil ad und bc Sehnen des paraboliſchen Bogens ſind, ſo folgt, daß ſie die Lage der zu kK als Abſciſſenlinien gehörigen Ordinaten haben: daher iſt bc zu ad parallel. Ferner folgt für Aa = a, Dd = d, Kk = x

und AD = P, wenn a + d = A geſetzt wird, daß die Formel für die Fläche AakdD = Z ausgedrückt werden kann durch

$$Z = \frac{P}{6}(A + 4x).$$

Da nun bei einer Parabel, wenn ein Diameter die Abſciſſenlinie bildet, die Abſciſſen wie die Quadrate der Ordinaten ſich verhalten, ſo iſt auch für Bb = b, Cc = c und b + c, als die Summe der beiden mittlern Ordinaten, = B,

$$\begin{aligned} km : kn &= (mb)^2 : (na)^2 \\ &= (n\beta)^2 : (na)^2 \\ &= (KB)^2 : (KA)^2; \end{aligned}$$

weil aber KB : KA = 1 : 3, ſo iſt

$$(km) : (kn) = 1 : 9$$

und daher (kn) = 9 (km).

Es iſt aber

$$kn = kK - nK = x - \frac{Aa + Dd}{2} = x - \frac{a + d}{2} = x - \frac{A}{2}$$

und

$$(km) = kK - mK = x - \frac{Bb + Cc}{2} = x - \frac{b + c}{2} = x - \frac{B}{2}$$

und folglich iſt auch

$$x - \frac{A}{2} = 9\left(x - \frac{B}{2}\right)$$

und daher $x = \frac{9B - A}{16}$.

Setzt man dieſen Werth für x in der Gleichung

$$Z = \frac{P}{6}(A + 4x),$$

ſo wird $Z = \frac{P}{6}\left(A + \frac{9B - A}{4}\right)$

und hieraus erhält man endlich

$$Z = \frac{P}{8}(A + 3B)$$

wie auch bei den obigen Formeln der Werth von Z für n = 4 angegeben iſt.

§. 113.

Beiſpiele als Normen für das Rechnen nach den bisher abgeleiteten Formeln für die Quadraturen.

1. Es ſoll die Fläche des Vierecks nmxyq, Fig. 67., berechnet werden für nm = 8, xy = 12 und mx = 10, wenn man weiß, daß nqy der Bogen einer Parabel iſt, von welcher mx einen Theil der Axe bildet.

Nach §. 109., iſt für mn = n, xy=N und mx = h, die Fläche $Z = \frac{2h}{3}\left(\frac{N^2 + Nn + n^2}{N + n}\right)$ und es iſt daher $Z = 101\frac{1}{3}$.

2. Es iſt ab, Fig. 68., die große Axe einer Elypſe, und man kennt die zu der Abſciſſe am = 5 gehörige Ordinate mn = 7 und die zu der Abſciſſe ac = 12 gehörige Ordinate cd = 10; es ſoll hieraus die Fläche des elyptiſchen Vierecks nmcd berechnet werden.

Für am = x, mn = y, ac = X und cd = Y iſt, wenn die beiden Halbaxen der Elypſe mit a und b bezeichnet werden, nach dem Zuſatze zu §. 111.

$$2a = \frac{y^2X^2 - x^2Y^2}{Xy^2 - xY^2}.$$

Da nun hier x = 5, y = 7, X = 12 und Y = 10, ſo findet man $2a = 51\,\frac{17}{22}$ und daher $a = 25\,\frac{39}{44} = 25{,}89$.

Die Gleichung für die Elypſe iſt

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

und es iſt daher $b^2 = \frac{a^2y^2}{2ax - x^2}$

alſo $b = \frac{ay}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = 11{,}86.$

Die allgemeine Formel für das elyptiſche Viereck nmcd = Z iſt, nach §. No. 3., Z =

$$\frac{(X-a)Y-(x-a)y}{2} + ab\,\mathrm{Arc\,sin}\left[\frac{\sqrt{X(2a-x)} - \sqrt{x(2a-X)}}{2a}\right].$$

Nun iſt $\sqrt{X(2a - x)} = 23{,}69$
und $\sqrt{x(2a - X)} = 14{,}10$
$9{,}59$

$$\text{und } \frac{9,59}{2a} = \frac{9,59}{51,77} = 0,18524.$$

Es iſt alſo auch

$$Z = \frac{-13,89 \cdot 10 + 20,89 \cdot 7}{2} + ab \text{ Arc sin } 0,18524,$$

und weil $0,18524 = \sin 10^0\ 40'\ 30''$, ſo iſt auch

$$Z = 3,675 + ab \text{ Arc } 10^0\ 40'\ 30''.$$

$$\begin{aligned} \text{Nun iſt Arc } 10^0 &= 0,17453293 \\ \text{Arc } 40' &= 0,01163553 \\ \text{Arc } 30'' &= 0,00014544 \\ \hline \text{alſo Arc } 10^0\ 40'\ 30'' &= 0,18631390 \end{aligned}$$

folglich iſt auch

$$Z = 3,675 + 25,89 \cdot 11,86 \cdot 0,1863$$

$$\text{und daher } Z = 60,879.$$

Die Fläche des geradlinigen Tarapezes nmed iſt

$$= \frac{(y+Y)\ (X-x)}{2} = \frac{(7+10)\ (12-5)}{2} = \frac{17 \cdot 7}{2} = 59,5;$$

folglich iſt die Fläche des durch die Sehne nd abgeſchnittenen elyptiſchen Segments $= 60,879 - 59,5 = 1,379$.

3. Es iſt ax, Fig. 67., die Axe einer Hyperbel, von welcher die eine halbe Axe $a = 24$ und die andere $b = 20$ iſt; es ſoll die von der Abſciſſe $ax = x = 36$, der dazu gehörigen Ordinate $xy = y$ und dem hyperboliſchen Bogen aqy eingeſchloſſene Fläche berechnet werden.

Die Gleichung für die Hyperbel iſt

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$$

$$\text{und es iſt alſo } y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax + x^2)}.$$

Da nun hier $a = 24$, $b = 20$ und $x = 36$, ſo iſt

$$y = \frac{5}{6}\sqrt{(48 \cdot 36 + 36^2)} = 5\sqrt{(48 + 36)} = 5\sqrt{84}$$

$$= 5 \cdot 9,16 = 45,8.$$

Die Formel für die hyperboliſche Fläche $axyq = Z$ aber iſt nach §. 111.

$$Z = \left(\frac{x+a}{2}\right) y - \frac{ab}{2} \log\left(\frac{ab + bx + ay}{ab}\right)$$

wo, wie bei allen durch Integration gefundenen Formeln, natürliche Logarithmen verſtanden werden. Es iſt alſo auch

$$Z = \left(\frac{36+24}{2}\right) \cdot 45{,}8 - \frac{24 \cdot 20}{2} \log nat \left(\frac{24 \cdot 20 + 20 \cdot 36 + 24 \cdot 45{,}8}{24 \cdot 20}\right)$$

$$= 30 \cdot 45{,}8 - 240 \log nat\ 4{,}79.$$

Es iſt aber $\log nat\ 479 = 6{,}17170060$

$\log nat\ 100 = 4{,}60517019$

alſo $\log nat \frac{479}{100} = \log nat\ 4{,}79 = 1{,}56653041$

und daher iſt

$$Z = 1374 - 240 \cdot 1{,}5665$$

$$= 1374 - 375{,}96 = 998{,}04.$$

Denkt man die Linie ay gezogen, und zieht das geradlinige Dreieck axy von dem gefundenen Reſultate ab, ſo bleibt die Fläche des durch die Sehne ay abgeſchnittenen hyperboliſchen Segments. Dieſe Fläche iſt alſo

$$= 998{,}04 - \frac{xy}{2} = 998{,}04 - 18 \cdot 45{,}8$$

$$= 998{,}04 - 824{,}4 = 173{,}64.$$

4. Es ſoll die Fläche eines Trapezes gefunden werden, deſſen Grundlinie = 40 iſt; die beiden Seitenlinien deſſelben, welche normal auf der Grundlinie ſtehen, ſind 32 und 26, und die vierte Linie des Trapezes iſt eine Curve, deren Form durch 5 Ordinaten beſtimmt iſt, die gleichweit von einander abſtehen, ſo daß alſo der Abſtand einer jeden von der folgenden 10 beträgt. Die beiden äußern Ordinaten ſind die bereits angeführten a = 32 und e = 26, und die zwiſchen ihnen liegenden ſind b = 40, c = 44 und d = 36.

Nach §. 112. iſt die Näherungsformel für Z bei 5 Ordinaten, alſo für n = 5

$$Z = \frac{P}{90}(7A + 32B + 12C)$$

und es iſt hier $A = a + e = 32 + 26 = 58$

$B = b + d = 40 + 36 = 76$

$C = c = 44$ und $P = 40$,

folglich iſt $Z = \frac{4}{9}(7 \cdot 58 + 32 \cdot 76 + 12 \cdot 44)$

$$= \frac{4 \cdot 3466}{9} = 1540\tfrac{4}{9}.$$

Verbindet man die Endpunkte je zweier nebeneinander liegenden Ordinaten durch Sehnen, berechnet die Fläche der 4 auf dieſe Weiſe durch 5 Ordinaten gebildeten geradlinigen Paralleltrapeze, und zieht die Fläche derſelben von dem erhaltenen Reſultate ab, ſo bleibt der Inhalt der 4, durch die Verbindungslinien abgeſchnittenen Segmente der Curve; dieſer Inhalt iſt, da der Abſtand je zweier Ordinaten 10 beträgt, =

$$V = Z - \left[\frac{10(a+b)}{2} + \frac{10(b+c)}{2} + \frac{10(c+d)}{2} + \frac{10(d+e)}{2}\right]$$
$$= Z - 5\,(a + 2b + 2c + 2d + e)$$
$$= 1540\tfrac{4}{9} - 1490 = 50\tfrac{4}{9}.$$

§. 114.

Von den Rectificationen.

Man verſteht unter der Rectification einer Curve: die Zurückführung derſelben auf eine gerade Linie, und die Rectificationsformel iſt ein mathematiſcher Ausdruck, welcher für jeden Werth der Abſciſſenlinie die Länge des entſprechenden Bogens der Curve angiebt. Die Differentialrechnung bietet ein einfaches Mittel dar, dieſe Formel zu finden; die Benutzung derſelben aber iſt in den meiſten Fällen ſehr ſchwierig, weil die Formel nicht unmittelbar die Abhängigkeit eines Bogens S der Curve von den dazu gehörigen Coordinaten x und y ausdrückt, ſondern ſtatt deſſen blos die zwiſchen den Differentialien dieſer Größen, und es iſt daher immer eine Integration erforderlich, um den Werth von S zu erhalten. Dieſe Integration nun kann nur in ſehr wenigen Fällen wirklich ausgeführt werden, und es iſt meiſtentheils ſelbſt ſchwierig, auch nur eine hinreichend convergirende Näherungsreihe für daſſelbe zu ermitteln.

Iſt $a\beta$, Fig. 67., = x, $\beta\alpha$ = y und wird die Länge des Bogens $a\alpha$ = S geſetzt, ſo iſt die Gleichung für die Rectification

$$(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

eine Gleichung, deren Ableitung in jeder Differentialrechnung ge=

gefunden wird. Mit Hülfe des Begriffs von dem Unendlich-kleinen erhält man dieſe Formel ganz einfach auf folgende Art:

Es ſei $\beta s = \alpha r = dx$, ſo iſt $rq = dy$; und $\alpha q = dS$ kann, weil βs ſehr klein iſt, als eine gerade Linie angeſehen werden. Daher iſt in dem rechtwinkligen Dreieck $\alpha r q$

$$(\alpha q)^2 = (\alpha r)^2 + (rq)^2$$

nämlich $(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$.

Hiernach iſt

$$dS = dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$

$$\text{und } S = \int dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$

die Formel für die Länge des Bogens S.

Man kann aus dieſer Gleichung auch leicht die für den Fall ableiten, wenn die Abſciſſen von einem Punkte ausgehen, und alſo die Gleichung für die Curve durch einen veränderlichen Winkel und den dazu gehörigen Leitſtrahl gegeben iſt; wenn nämlich, Fig. 66., $\angle bay = \varphi$, $ay = z$ und die Abhängigkeit dieſer beiden Größen von einander gegeben iſt, und man zieht am normal auf die unveränderliche ab und yx parallel zu derſelben, ſo iſt auch, für $ax = x$, $xy = y$ und Bogen $by = S$,

$$(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2.$$

Es iſt aber jetzt $ay : yx = 1 : \cos\varphi$ und $ay : ax = 1 : \sin\varphi$

alſo $y = z \cos\varphi$ und $x = z \sin\varphi$,

folglich iſt $dy = dz \cos\varphi - zd\varphi \sin\varphi$

und $dx = dz \sin\varphi + zd\varphi \cos\varphi$.

es iſt alſo auch

$$(dy)^2 = (dz)^2 \cos^2\varphi - 2z \sin\varphi \cos\varphi\, dz d\varphi + z^2 (d\varphi)^2 \sin^2\varphi$$

$$(dx)^2 = (dz)^2 \sin^2\varphi + 2z \sin\varphi \cos\varphi\, dz d\varphi + z^2 (d\varphi)^2 \cos^2\varphi$$

und daher, wenn man beide Gleichungen addirt

$$(dS)^2 = (dz)^2 + z^2 (d\varphi)^2$$

folglich iſt $dS = \sqrt{[(dz)^2 + z^2 (d\varphi)^2]}$

$$\text{und } S = \int d\varphi \sqrt{\left[\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + z^2\right]}$$

die Gleichung für die Länge des Bogens.

§. 115.

Die Rectification der paraboliſchen Bogen.

Die Gleichung für die Parabel iſt

$$y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$$

und es iſt daher $dy = \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{p^{\frac{1}{2}} dx}{2x^{\frac{1}{2}}}$

$$\text{alſo } (dy)^2 = \frac{p(dx)^2}{4x}$$

$$\text{und } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{p}{4x}.$$

$$\text{Da nun } S = \int dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)},$$

ſo iſt für die paraboliſchen Bogen

$$S = \int dx \sqrt{\left(1 + \frac{p}{4x}\right)} = \int dx \sqrt{\left(\frac{4x + p}{4x}\right)},$$

$$\text{nämlich es iſt } S = \int \frac{dx \sqrt{(4x^2 + px)}}{2x},$$

$$\text{oder } S = \frac{1}{2} \int \frac{dx \sqrt{(4x^2 + px)}}{x}.$$

Nach Meier Hirſch's Integraltafeln, Taf. 54., iſt für $X = ax + bx^2$

$$\int \frac{dx \sqrt{X}}{x} = \sqrt{X} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

und nach Taf. 43., $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{2}{\sqrt{b}} \log \left[\frac{\sqrt{(a + bx)} + \sqrt{bx}}{\sqrt{a}}\right]$

$$\text{alſo } \int \frac{dx \sqrt{X}}{x} = \sqrt{X} + \frac{a}{\sqrt{b}} \log \left[\frac{\sqrt{(a + bx)} + \sqrt{bx}}{\sqrt{a}}\right].$$

Hier aber iſt $X = px + 4x^2$, alſo $a = p$ und $b = 4$, folglich iſt

$$\int \frac{dx \sqrt{X}}{x} = \sqrt{(px + 4x^2)} + \frac{p}{2} \log \left[\frac{\sqrt{(p + 4x)} + 2\sqrt{x}}{p^{\frac{1}{2}}}\right]$$

und daher die Länge des paraboliſchen Bogens

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(px + 4x^2)} + \frac{p}{4} \log \left[\frac{\sqrt{(p + 4x)} + 2\sqrt{x}}{\sqrt{p}}\right],$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil für $x = 0$ dieſer Ausdruck auch $S = 0$ giebt, wie es ſein muß. Da übrigens

$$\frac{\sqrt{(p + 4x)} + 2\sqrt{x}}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{(px + 4x^2)} + 2x}{\sqrt{px}}$$

$$= \frac{\sqrt{(px + 4x^2)} + 2x}{y}, \text{ ſo iſt auch}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(px + 4x^2)} + \frac{p}{4}\log\left[\frac{\sqrt{(px + 4x^2)} + 2x}{y}\right].$$

Zuſatz. Mit Hülfe dieſer Formel iſt nun auch leicht die Länge eines jeden Bogens der Parabel zu berechnen, deſſen Anfangspunkt nicht im Scheitel iſt. Soll z. B. die Länge von nq, Fig. 67., ermittelt werden, ſo braucht man nur für am = x und mn = y die Länge von an zu berechnen und eben ſo für as = X und sq = y die von aq, und beide von einander abzuziehen. Uebrigens verdient hierbei erinnert zu werden, daß der Werth von p durch x, y, X und Y, wie auch bereits §. 109. angegeben worden, vollkommen beſtimmt iſt; nämlich es iſt

$$p = \frac{Y^2 - y^2}{X - x}.$$

§. 116.

Die Rectification der elyptiſchen Bogen.

Wenn man in der Gleichung für die Elypſe

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

a + x ſtatt x ſetzt, den Anfangspunkt der Abſciſſen alſo in dem Mittelpunkte der großen Axe annimmt, ſo verwandelt ſich dieſelbe in

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

$$\text{und hieraus folgt } a^2 \cdot 2ydy = -b^2 \cdot 2xdx;$$

$$\text{es iſt alſo } \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$\text{und daher } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)},$$

$$\text{folglich iſt } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = \frac{b^2x^2 + a^4 - a^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}$$

$$= \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)} = \frac{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)x^2}{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)\left(\frac{x}{a}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Es iſt alſo, wenn man ſetzt $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = m$ und $\frac{x}{a} = z$,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = \frac{1 - mz^2}{1 - z^2}.$$

Nun iſt $dS = dx \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}$,

alſo iſt auch für jeden Bogen S der Elypſe von dem Endpunkte der kleinen Axe an gerechnet

$$dS = adz \sqrt{\left[\frac{1 - mz^2}{1 - z^2}\right]}$$

ein Ausdruck, der ſich zwar nicht unmittelbar vollſtändig integriren läßt, wovon der Werth aber auf mehrere verſchiedene Arten durch eine convergirende Reihe ausgedrückt werden kann.

Das erſte Mittel, welches ſich hier darbietet, beſteht darin, daß man das Binom $\sqrt{(1 - mz^2)}$ in eine Reihe auflöſet, was ſehr leicht geſchehen kann. Setzt man nun

$$\sqrt{(1 - mz^2)} =$$
$$1 + A_1\ mz^2 + A_2\ m^2z^4 + A_3\ m^3z^6 \dots + A_r\ m^r z^{2r} \dots$$

ſo wird

$$dS = \frac{adz}{\sqrt{(1 - z^2)}}\ [1 + A_1mz^2 + A_2m^2z^4 \dots];$$

das allgemeine Glied dieſer Reihe iſt alſo

$$\frac{aA_r m^r z^{2r} dz}{\sqrt{(1 - z^2)}}$$

und daher iſt, wenn man jedes Glied für ſich integrirt, das allgemeine Glied der Reihe, durch welche der Werth von S ausgedrückt wird, =

$$aA_r m^r \int \frac{z^{2r} dz}{\sqrt{(1 - z^2)}}.$$

Der Werth dieſes Integrals aber wird in den Integraltafeln

Meier Hirſch's, Taf. 25. gefunden; es läßt ſich alſo auch der Werth von S auf dieſe Weiſe ausdrücken. Da übrigens jedes dieſer einzelnen Integralien beſonders aus mehreren Gliedern beſteht, ſo iſt es ſchwer, auf dieſe Weiſe das allgemeine Geſetz der Reihe, welche den Werth von S angiebt, aufzufinden; man hat daher den zu integrirenden Ausdruck auf eine andere Form zu bringen verſucht, durch welche der Zweck leichter erreicht wird.

Setzt man $$\sqrt{\left(\frac{1-mz^2}{1-z^2}\right)} = Z =$$
$$1 + Az^2 + Bz^4 + Cz^6 \;\ldots\; + A_r z^{2r} \ldots$$
ſo wird
$$\frac{dZ}{dz} = 2Az + 4Bz^3 + 6Cz^5 \;\ldots\; + 2rA_r z^{2r-1} \ldots$$

Weil aber $Z^2 = \dfrac{1-mz^2}{1-z^2}$

ſo iſt
$$2Z\,dZ = \frac{(1-z^2)\,(-2mz\,dz) - (1-mz^2)\,(-2z\,dz)}{(1-z^2)^2}$$
$$= \frac{2z\,(1-m)\,dz}{(1-z^2)^2},$$

daher iſt $\dfrac{Z^2 \cdot dZ}{dz} = \dfrac{z\,(1-m)}{(1-z^2)^2} \cdot Z$

und alſo auch
$$\frac{1-mz^2}{1-z^2}\left(\frac{dZ}{dz}\right) = \frac{z\,(1-m)}{(1-z^2)^2}Z;$$

folglich iſt $(1-mz^2)\,(1-z^2)\left(\dfrac{dZ}{dz}\right) = z\,(1-m)\,Z$

oder $(1-(1+m)\,z^2 + mz^4)\left(\dfrac{dZ}{dz}\right) = z\,(1-m)\,Z,$

alſo, wenn zur Abkürzung $1 + m = p$ und $1 - m = q$ geſetzt wird,
$$(1 - pz^2 + mz^4)\left(\frac{dZ}{dz}\right) = qzZ.$$

Wird nun in dieſer Gleichung für Z die dafür angenommene und für $\left(\dfrac{dZ}{dz}\right)$ die für dieſen Ausdruck gefundene Reihe geſetzt, ſo erhält man

$$(1 - pz^2 + mz^4)\,[2Az + 4Bz^3 + 6Cz^5 \ldots + 2r\,A_r z^{2r-1} \ldots]$$
$$= qz\,[1 + Az^2 + Bz^4 + Cz^6 \ldots + A_r Z^r \ldots].$$

Aus dieſer Gleichung laſſen ſich nun die Werthe der einzelnen Coefficienten leicht beſtimmen, und man findet mit Hülfe des bekannten Verfahrens

$$A = \frac{q}{2} = \frac{1 - m}{2},$$

$$B = \frac{(2p + q)A}{4} = \frac{(3 + m)A}{4},$$

$$C = \frac{(4p + q)B - 2mA}{6} = \frac{(5 + 3m)B - 2mA}{6},$$

$$D = \frac{(6p + q)C - 4mB}{8} = \frac{(7 + 5m)C - 4mB}{8},$$

$$E = \frac{(8p + q)D - 6mC}{10} = \frac{(9 + 7m)D - 6mC}{10},$$

und ganz allgemein iſt

$$A_r = \frac{[(2r - 2)p + q]\,A_{r-1} - (2r - 4)\,mA_{r-2}}{2r}$$
$$= \frac{[(2r - 1) - (2r - 3)m]\,A_{r-1} - (2r - 4)mA_{r-2}}{2r}.$$

Die Werthe der Coefficienten laſſen ſich alſo ſehr leicht berechnen, wenn $m = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ gegeben iſt, und es iſt hier jeder Coefficient blos von den beiden nächſt vorhergehenden abhängig. Man kann hiernach dieſe Coefficienten als bekannt annehmen, und es iſt nun

$$\sqrt{\left(\frac{1 - mz^2}{1 - z^2}\right)} = Z =$$
$$1 + Az^2 + Bz^4 + Cz^6 + Dz^8 \ldots + A_r z^{2r} \ldots$$

Da nun $dS = adz\sqrt{\left(\frac{1 - mz^2}{1 - z^2}\right)}$, ſo iſt auch

$$dS = a\,[dz + Az^2dz + Bz^4dz + Cz^6dz \ldots]$$

und folglich iſt, wenn man integrirt,

$$S = az + \frac{aA}{3}z^3 + \frac{aB}{5}z^5 + \frac{aC}{7}z^7 \ldots$$
$$+ \frac{aA_r}{2r + 1}z^{2r+1} \ldots$$

wo nun nur noch für z der Werth $= \frac{x}{a}$ geſetzt zu werden braucht. Eine Conſtante kommt hier nicht hinzu, wenn der Bogen von dem Endpunkte der kleinen Axe an gerechnet wird, weil alsdann für $x = o$ auch $S = o$ werden muß, was dieſe Reihe unmittelbar giebt.

Zuſatz. Die elyptiſchen Bogen ſind für die ganze Analyſis von bedeutender Wichtigkeit, beſonders deswegen, weil ſie eben ſo wie Kreisbogen oder Logarithmen als Hülfsmittel bei der Integration verwickelter Formen benutzt werden können; man kann mit ihrer Hülfe viele Ausdrücke integriren, zu deren Integration Kreisbogen oder Logarithmen nicht hinreichen. Man findet daher auch vielfach verſchiedene Methoden angegeben, um für die Länge der elyptiſchen Bogen ſchnell convergirende Reihen zu erhalten, von welchen hier die folgende noch angeführt zu werden verdient:

Es iſt in dem Ausdrucke

$$dS = adz \sqrt{\left(\frac{1 - mz^2}{1 - z^2}\right)},$$

$z = \frac{x}{a}$, und da der Anfangspunkt der Abſciſſen in dem Mittelpunkte der großen Axe iſt, ſo kann x nie größer als a werden; es kann daher auch z den Werth von 1 nicht überſteigen: folglich iſt es auch erlaubt, für alle Fälle zu ſetzen $z = \sin\varphi$, alſo $1 - z^2 = \cos^2\varphi$ und $dz = \cos\varphi \cdot d\varphi$. Hierdurch wird die obige Gleichung

$$dS = ad\varphi \cos\varphi \sqrt{\left(\frac{1 - m\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)},$$

nämlich es iſt nun

$$dS = ad\varphi \sqrt{(1 - m\sin^2\varphi)}$$

und alſo auch, wenn für $\sin\varphi$ der Werth $= z$ einſtweilen wieder geſetzt wird,

$$dS = ad\varphi \sqrt{(1 - mz^2)}$$

$$= ad\varphi \left[1 - \frac{1}{2}mz^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}m^2z^4 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}m^3z^6 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}m^4z^8 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}m^5z^{10} \ldots\right].$$

Es ſind alſo die ſämmtlichen Coefficienten bekannt, wenn man ſetzt

$$dS = ad\varphi\,[1 - Az^2 - Bz^4 - Cz^6 - Dz^8 \cdots]$$

und es iſt daher auch

$$dS = a\,[d\varphi - Ad\varphi \sin^2\varphi - Bd\varphi \sin^4\varphi - Cd\varphi \sin^6\varphi - Dd\varphi \sin^8\varphi \cdots].$$

Nun iſt aber allgemein, wie aus Unger's Integralrechnung, §. 74. II., ſich ergiebt,

$$\int \sin^{2n} v dv = \cos v \cdot f(\sin v) + Mv;$$

es iſt nämlich dieſes Integral ein Produkt aus cos v, mit einer Reihe der ungeraden Potenzen von sin v multiplicirt, dem der Bogen v, mit einem bekannten Coefficienten multiplicirt, beigefügt iſt: folglich iſt man auch berechtigt anzunehmen, daß S eine Reihe geben wird von der Form

$$S = a\,[\alpha\varphi + \beta \sin\varphi \cos\varphi + \gamma \sin^3\varphi \cos\varphi + \delta \sin^5\varphi \cos\varphi + \varepsilon \sin^7\varphi \cos\varphi \cdots].$$

Hieraus aber erhält man, wenn differenzirt und $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$ geſetzt wird,

$$dS = ad\varphi\,[\alpha + \beta + 3\gamma \sin^2\varphi + 5\delta \sin^4\varphi + 7\varepsilon \sin^6\varphi \cdots] - ad\varphi\,[2\beta \sin^2\varphi + 4\gamma \sin^4\varphi + 6d \sin^6\varphi \cdots].$$

Es iſt aber auch gefunden worden

$$dS = ad\varphi\,[1 - A \sin^2\varphi - B \sin^4\varphi - C \sin^6\varphi \cdots]$$

wo die Coefficienten ſämmtlich bekannt ſind: es laſſen ſich alſo auch durch das Gleichſetzen der beiden Werthe von dS die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. beſtimmen, und man findet

$$\alpha + \beta = 1, \quad \text{alſo } \beta = 1 - \alpha,$$

$$3\gamma - 2\beta = -A, \quad : \quad \gamma = \frac{2\beta - A}{3},$$

$$5\delta - 4\gamma = -B, \quad : \quad \delta = \frac{4\gamma - B}{5},$$

$$7\varepsilon - 6d = -C, \quad : \quad \varepsilon = \frac{6\delta - C}{7} \text{ etc.}$$

Es ſind alſo die Coefficienten ſämmtlich beſtimmt, wenn man den Werth von α kennt, und für dieſen findet man die Reihe

$$\alpha = 1 - \tfrac{1}{2}A - \frac{1\cdot3}{2\cdot4}B - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}C \cdots$$

oder, wenn für A, B, C ꝛc. ihre Werthe geſetzt werden,

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2^2}\,m - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2}\,m^2 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\,m^3 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2}\,m^4 \ldots$$

und es iſt nun endlich

$$S = a\alpha\varphi + a\,[\beta \sin\varphi + \gamma \sin^3\varphi + \delta \sin^5\varphi + \varepsilon \sin^7\varphi \cdots]\cos\varphi;$$

weil aber $\sin\varphi = z = \frac{x}{a}$, ſo iſt $\cos\varphi = \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}$

und $\varphi = \text{Arc sin}\,\frac{x}{a}$; folglich iſt auch

$$S = a\alpha\,\text{Arc sin}\,\frac{x}{a} + \left(\frac{\beta x}{a} + \frac{\gamma x^3}{a^3} + \frac{\delta x^5}{a^5} + \frac{\varepsilon x^7}{a^7} \cdots\right)\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Will man nun die Länge des elyptiſchen Quadranten haben, ſo muß $x = a$ geſetzt werden, wodurch der Factor $\sqrt{(a^2 - x^2)} = 0$ wird, und es iſt daher die Länge Q des Quadranten, da

$$\text{Arc sin}\,\frac{x}{a} = \text{Arc sin } 1 = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$Q = a\alpha \cdot \tfrac{1}{2}\pi$; nämlich es iſt

$$Q = \frac{a\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2}\,m - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2}\,m^2 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\,m^3 \cdots\right)$$

und $m = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$.

Für $a = b$ erhält man den Quadranten eines Kreiſes, deſſen Radius $= a$ iſt, $Q = \frac{1}{2}a\pi$, da in dieſem Falle $m = 0$ wird.

§. 117.

Die Rectification der hyperboliſchen Bogen.

Die Gleichung für die Hyperbel

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(2ax + x^2)$$

wird, wenn man $x - a$ ſtatt x ſetzt, alſo den Mittelpunkt der erſten Axe als Anfangspunkt der Abſciſſen annimmt,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(x^2 - a^2);$$

es iſt alſo $a^2 y\,dy = b^2 x\,dx$,

und daher $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} = \frac{b^2 x^2}{a^2(x^2 - a^2)}$

$$\text{alſo } 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(a^2 + b^2)\,x^2 - a^4}{a^2\,(x^2 - a^2)}$$

$$= \frac{x^2 - \frac{a^4}{a^2+b^2}}{\frac{a^2}{a^2+b^2}\,(x^2-a^2)} = \frac{x^2 - n^2a^2}{n^2\,(x^2 - a^2)}$$

wenn man $\frac{a^2}{a^2+b^2} = n^2$ ſetzt. Da nun

$$dS = dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)},$$

ſo iſt für hyperboliſche Bogen auch

$$dS = \frac{dx}{n} \sqrt{\left(\frac{x^2 - n^2a^2}{x^2 - a^2}\right)}$$

und es laſſen ſich zur Integration dieſes Ausdrucks ebenfalls verſchiedene Methoden angeben, die jedoch in allen Fällen zu ohne Ende fortlaufenden Reihen führen. Das ſich hier zunächſt darbietende Verfahren beſteht in folgendem: Es iſt

$$\sqrt{(x^2 - n^2a^2)} = x - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{n^2a^2}{x} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{n^4a^4}{x^3} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{n^6a^6}{x^5} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{n^8a^8}{x^7} \cdots$$

und daher iſt auch dS =

$$\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}\left(\frac{x}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{na^2x}{x} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{n^3a^4}{x^3} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{n^5a^6}{x^5} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{n^7a^8}{x^7} \cdots\right)$$

und es kommt nun bei Integration blos darauf an, den Werth eines Integrals von der Form zu beſtimmen

$$\int \frac{P dx}{x^m \sqrt{(x^2 - a^2)}}.$$

Es iſt aber $\int \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = \sqrt{(x^2 - a^2)}$,

und nach Meier Hirſch's Integraltafeln, Taf. 26., für

$$x^2 - a^2 = X$$

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{x \sqrt{X}}$$

$$\int\frac{dx}{x^5\sqrt{X}} = \left(\frac{1}{4a^2x^4}+\frac{3}{8a^4x^2}\right)\sqrt{X}+\frac{3}{8a^4}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$$

$$\int\frac{dx}{x^7\sqrt{X}} = \left(\frac{1}{6a^2x^6}+\frac{5}{24a^4x^4}+\frac{5}{16a^6x^2}\right)\sqrt{X}+\frac{5}{16a^6}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$$

u. ſ. w.

Hiernach iſt, wenn man dieſe Werthe ſubſtituirt,

$$S = \left[\frac{1}{n}-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}\cdot\frac{n^3a^2}{2x^2}-\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{n^5}{4}\left(\frac{a^4}{x^4}+\frac{3a^2}{2x^2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{n^7}{6}\left(\frac{a^6}{x^6}+\frac{5a^4}{4x^4}+\frac{15a^2}{8x^2}\right)\cdots\right]\sqrt{X}$$
$$-\left[\frac{1}{2}\cdot na^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot1}{2\cdot4}n^3a^2+\frac{3}{8}\cdot\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}n^5a^2\right.$$
$$\left.+\frac{15}{48}\cdot\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}n^7a^2\cdots\right]\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}.$$

Es iſt aber

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arc\,sec}\left(\frac{x}{a}\right);$$

folglich iſt endlich

$$S = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)}}{n}\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot1}{2\cdot4}\cdot\frac{n^4a^2}{x^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot n^6\left(\frac{a^4}{x^4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2}{x^2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{6}\cdot\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot n^8\left(\frac{a^6}{x^6}+\frac{5}{4}\cdot\frac{a^4}{x^4}+\frac{5\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{a^2}{x^2}\right)\cdots\right]$$
$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot1}{2\cdot4}\cdot n^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}n^4+\frac{3\cdot5}{6\cdot8}\cdot\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\right.$$
$$\left.\cdot\, n^6\cdots\right)\times na\ \mathrm{Arc\,sec}\,\frac{x}{a}.$$

§. 118.

Von der Rectification der Curven durch Näherung.

So wie man verſchiedene Näherungsmethoden für die Quadraturen hat, ſo hat man dergleichen auch für die Rectificationen, und zwar insbeſondere zu der Berechnung der Länge einzelner Theile einer Curve, deren Gleichung entweder gar nicht bekannt iſt, oder die zu einem Werthe von dS führt, deſſen Integration viele Schwierigkeiten hat. Von den verſchiedenen Methoden, die man zu dieſem Behufe angegeben hat, verdient hier vorzugsweiſe die von Euler angeführt zu

werden, weil ſie mit Hülfe einiger leichten Sätze zu einer in vielen Fällen brauchbaren, ganz einfachen Formel führt. Dieſe Methode beſteht in Folgendem: Es ſei aDb, Fig. 72., ein Bogen einer Curve, ad und bd ein paar Tangenten an den Endpunkten derſelben, die ſich in d ſchneiden, ac und bc normal auf dieſen Tangenten, und es ſchneiden ſich dieſelben unter einem Winkel acb $=\varphi$. Zieht man nun die Sehne ab und die Linie ce, welche den Winkel acb halbirt, ſetzt ca $=$ A, cb $=$ B und ab $=$ C, ſo iſt

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\varphi,$$

oder weil $\sin^2\frac{1}{2}\varphi + \cos^2\frac{1}{2}\varphi = 1$ und $\cos^2\frac{1}{2}\varphi - \sin^2\frac{1}{2}\varphi = \cos\varphi$,

$$C^2 = (A^2+B^2)(\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi + \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi) - 2AB(\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi - \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi)$$
$$= (A+B)^2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi + (A-B)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi;$$

folglich iſt $C > (A+B)\sin\frac{1}{2}\varphi$.

Da nun der Bogen aDb $=$ S größer iſt als die Sehne C, ſo iſt um ſo mehr

$$1.\quad S > (A+B)\sin\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Da ce den Winkel φ halbirt, ſo iſt

$$bc : ca = be : ea,$$

und daher auch $bc + ca : bc = be + ea : be$;

nämlich es iſt $A + B : (bc) = C : (be)$

und $A + B : C = (bc) : (be)$.

Nun iſt aber $bc : be = \sin(\alpha + \frac{1}{2}\varphi) : \sin\frac{1}{2}\varphi$;

alſo auch $A + B : C = \sin(\alpha + \frac{1}{2}\varphi) : \sin\frac{1}{2}\varphi$.

Es iſt aber $\frac{1}{2}\varphi = 90^\circ - \dfrac{\alpha + \beta}{2}$;

alſo $\alpha + \frac{1}{2}\varphi = 90^\circ - \dfrac{\beta - \alpha}{2}$

und daher $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\varphi) = \cos\left(\dfrac{\beta - \alpha}{2}\right)$; folglich iſt

$$A + B : C = \cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) : \sin\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Hiernach iſt $C = \dfrac{(A + B)\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}(\beta - \alpha)}$.

Setzt man aber bd $=$ a; da $=$ b und $\angle d = \psi$, ſo iſt auch

$$C = \frac{(a + b)\sin\frac{1}{2}\psi}{\cos\frac{1}{2}(\delta - \gamma)}.$$

Da nun $\varphi + \psi = 180^0$, ſo iſt $\sin \frac{1}{2}\psi = \cos \frac{1}{2}\varphi$
und $\delta - \gamma = (90^0 - \beta) - (90^0 - \alpha) = \alpha - \beta$;
alſo $\cos \frac{1}{2}(\delta - \gamma) = \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$;
ſo iſt auch

$$C = \frac{(a + b) \cos \frac{1}{2}\varphi}{\cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}.$$

Werden nun beide Werthe von C einander gleichgeſetzt, ſo erhält man

$$\frac{(A + B) \sin \frac{1}{2}\varphi}{\cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha)} = \frac{(a + b) \cos \frac{1}{2}\varphi}{\cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}$$

und dieſes giebt

$$(a + b) = (A + B) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Da nun $S < (ad + db)$, alſo $S < a + b$, ſo iſt auch

$$2. \quad S < (A + B) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Hiernach hat man für den Bogen S die beiden Bedingungen
1) $S > (A + B) \sin \frac{1}{2}\varphi$ und 2) $S < (A + B) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$;
es iſt aber auch

$$\tfrac{1}{2}\varphi > \sin \tfrac{1}{2}\varphi \text{ und } \tfrac{1}{2}\varphi < \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi,$$

alſo liegen S und $(A+B) \cdot \frac{1}{2}\varphi$ innerhalb derſelben Gränzen. Iſt alſo der Bogen φ ſo klein, daß die Differenz zwiſchen $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$ und $\sin \frac{1}{2}\varphi$ unbedeutend wird, ſo kann man ſetzen

$$S = (A + B) \tfrac{1}{2}\varphi = \left(\frac{A + B}{2}\right) \cdot \varphi,$$

nämlich es iſt S beinahe der Länge eines Kreisbogens gleich, der mit dem Radius $\frac{A + B}{2}$ beſchrieben, das Maaß des Winkels φ bildet.

Für welche Werthe von φ man durch dieſe Formel einen noch hinlänglich genauen Werth von S erhält, läßt ſich auf folgende Art einſehen: Es iſt

$$\delta = (A+B)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi - (A+B)\sin\tfrac{1}{2}\varphi = (A+B)\sin\tfrac{1}{2}\varphi\left(\frac{1-\cos\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi}\right)$$
$$= (A + B) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi \, (1 - \cos \tfrac{1}{2}\varphi),$$

und weil $1 - \cos \frac{1}{2}\varphi = 2 \sin^2 \frac{1}{4}\varphi$, ſo iſt

$$\delta = (A + B) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi \cdot 2 \sin^2 \tfrac{1}{4}\varphi,$$

$$\text{daher iſt } \frac{\delta}{a + b} = \frac{\delta}{(A+B) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi} = 2\sin^2\tfrac{1}{4}\varphi.$$

Es drückt alſo $2\sin^2\frac{1}{4}\varphi$ aus: um den wievielten Theil von a+b die beiden Gränzen, zwiſchen welchen S liegen muß, von einander verſchieden ſind, und es iſt daher der Werth von $S = \frac{1}{2}(A + B)\varphi$ nicht ganz um $2\sin^2\frac{1}{4}\varphi \times S$ zu klein. Nun iſt für $\varphi = 10^0$

$$\sin\tfrac{1}{4}\varphi < 0{,}044, \text{ und daher } 2\sin^2\tfrac{1}{4}\varphi < 0{,}004;$$

folglich fehlt man bei Anwendung dieſer Formel, wenn der Winkel $\varphi = 10^0$ iſt, um weniger als um $\frac{1}{250}$ der Länge des zu berechnenden Bogens; bei einem Winkel von 15^0 iſt der Fehler noch immer kleiner als $\frac{1}{125}$ des Bogens.

Tobias Meyer hat der Formel für die Länge des Bogens

$$S = \left(\frac{A + B}{2}\right)\varphi$$

eine für die Rechnung bequemere Einrichtung gegeben in dem fünften Bande ſeiner praktiſchen Geometrie, §. 58. No. XII. u. f., die hier um ſo mehr angeführt zu werden verdient, da dieſe Formel hierdurch auch für größere Bogen brauchbar wird, für welche φ eine bedeutende Größe hat.

Soll nämlich die Länge des Bogens as, Fig. 73., wo die zu den Endpunkten a und s gehörigen Normalen an und sn unter einem großen Winkel ſich ſchneiden, berechnet werden, ſo denke man die Punkte B, C, D ꝛc. in der Curve ſo gewählt, daß je zwei zu neben einanderliegenden Punkten gehörige Ordinaten unter gleichen Winkeln ſich ſchneiden, alſo

$$\angle a\alpha B = \angle B\beta C = \angle C\gamma D = \angle D\delta s \text{ oder}$$
$$\alpha = \beta = \gamma = \delta.$$

Da nun $\angle acC = \alpha + \beta$
$\angle adD = \angle acC + \gamma$
und $\angle\varphi = \angle adD + \delta,$
ſo iſt auch $\varphi = \alpha + \beta + \gamma + \delta \cdots$

alſo $\varphi = n\alpha$, wenn der Bogen as durch die Punkte B, C, D ꝛc. in n Theile getheilt iſt. Da nun immer für n ein ſolcher Werth angenommen werden kann, daß α ein hinreichend kleiner Winkel wird, ſo iſt auch nun hinreichend genau

$$\text{der Bogen } aB = \left(\frac{a\alpha + B\alpha}{2}\right)\cdot\alpha$$

$$BC = \left(\frac{B\beta + C\beta}{2}\right) \cdot \alpha$$

$$CD = \left(\frac{C\gamma + D\gamma}{2}\right) \cdot \alpha$$

und $$Ds = \left(\frac{D\delta + s\delta}{2}\right) \cdot \alpha.$$

Man ſetze $a\alpha = A$, $B\alpha = B$, $Cc = C$, $Dd = D$, $sn = E$, $\alpha c = b$, $cd = c$ und $dn = d$, ſo iſt nun auch

1. der Bogen $aB = \left(\frac{A + B}{2}\right) \cdot \alpha.$

2. der Bogen $BC = \left(\frac{B + C}{2}\right) \cdot \alpha + \left(\frac{\alpha\beta + c\beta}{2}\right) \cdot \alpha;$

da nun wegen $\angle\alpha = \angle\beta$, auch $c\beta = \alpha c = b$ iſt, und

$$c\alpha : \alpha\beta = \sin\alpha : \sin 2\alpha, \text{ alſo } \alpha\beta = \frac{b \sin 2\alpha}{\sin\alpha},$$

ſo iſt auch

der Bogen $BC = \left(\frac{B + C}{2}\right) \alpha + \frac{b(\sin 2\alpha + \sin\alpha)}{2} \cdot \alpha.$

3. der Bogen $CD = \left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \alpha + \left(\frac{c\gamma + d\gamma}{2}\right) \cdot \alpha;$

es iſt aber

$cd : d\gamma = \sin\alpha : \sin 2\alpha$ und $cd : c\gamma = \sin\alpha : \sin 3\alpha$,

alſo $d\gamma = \frac{c \sin 2\alpha}{\sin\alpha}$ und $c\gamma = \frac{c \sin 3\alpha}{\sin\alpha}$; alſo iſt auch

der Bogen $CD = \left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \alpha + \frac{c(\sin 3\alpha + \sin 2\alpha)}{\sin\alpha} \cdot \alpha.$

4. Eben ſo findet man

Bogen $Ds = \left(\frac{D + E}{2}\right) \cdot \alpha + \frac{d(\sin 4\alpha + \sin 3\alpha)}{\sin\alpha} \cdot \alpha$

u. ſ. w.

Es iſt daher auch, wenn dieſe Werthe der einzelnen Bogen ſummirt werden,

die ganze Länge der Curve $A = S$

$$= \tfrac{1}{2}[(A+B) + (B+C) + (C+D) + (D+E)\cdots] \cdot \alpha$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{b(\sin\alpha + \sin 2\alpha)}{\sin\alpha} + \frac{c(\sin 2\alpha + \sin 3\alpha)}{\sin\alpha} + \frac{d(\sin 3\alpha + \sin 4\alpha)}{\sin\alpha}\cdots\right]\alpha$$

$$= \left[\frac{A + E}{2} + B + C + D\right]\alpha +$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{[b+c+d-(c+d)](\sin\alpha+\sin 2\alpha)}{\sin\alpha}+\frac{(c+d-d)(\sin 2\alpha+\sin 3\alpha)}{\sin\alpha}\right.$$
$$\left.+\frac{d\,(\sin 3\alpha+\sin 4\alpha)}{\sin\alpha}\right)\cdot\alpha =$$
$$\left(\frac{A+E}{2}+B+C+D\right)\alpha+\left(\frac{b+c+d}{2}\right)\cdot\alpha+$$
$$\left[\left(\frac{b+c+d}{2}\right)\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}+\left(\frac{c+d}{2}\right)\left(\frac{\sin 3\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha}\right)+\frac{d}{2}\left(\frac{\sin 4\alpha-\sin 3\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]\alpha;$$

nämlich es iſt, wenn man
$an = A + b + c + d = N'$, $\alpha n = b + c + d = N''$,
$cn = c + d = N'''$ und $dn = d = N''''$ ſetzt,

$$S = \left(\frac{N'+E}{2}+B+C+D\right)\cdot\alpha$$
$$+\left[N''\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}+N'''\left(\frac{\sin 3\alpha-\sin\alpha}{2\sin\alpha}\right)+N''''\left(\frac{\sin 4\alpha-\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]\cdot\alpha.$$

Da nun allgemein

$$\frac{\sin m\alpha+\sin(m-2)\alpha}{2\sin\alpha}=\cos(m-1)\alpha,$$

ſo iſt endlich

$$S=\left[\frac{N'+E}{2}+B+C+D\right]\alpha+$$
$$[N''\cos\alpha+N'''\cos 2\alpha+N''''\cos 3\alpha]\,\alpha.$$

Es kommt nun noch darauf an, zu zeigen, wie es möglich iſt, nach dieſer Formel wirklich zu rechnen. Zu dieſer Abſicht nehme man an, es ſei a der Anfangspunkt der Abſciſſe und an die Abſciſſenlinie, (ſollte dieſe eine andere Lage haben, ſo kann ſie, wie bekannt, auf an verlegt werden) ſo iſt, wenn die Länge des Bogens as=S berechnet werden ſoll, die zu dem Punkte s gehörige Abſciſſe $ax = x$ bekannt, und da durch die gegebene Gleichung für die Curve auch bekannt iſt, wie die Ordinate $xs = y$ von der Abſciſſe abhängt, ſo kennt man auch dieſe; xn iſt nun die Subnormale und Sn die Normale des Punktes S. Da aber allgemein der Werth der Subnormale von den Coordinaten durch die Gleichung abhängt: Subnormale $= \frac{ydy}{dx}$, ſo iſt hierdurch der Werth von xn beſtimmt, und alſo auch der von $an = xa + xn = N'$, und eben ſo iſt auch der Werth von $sn = E$ bekannt.

Ferner

Ferner ſei nun für einen andern Punkt D die Abſciſſenlinie az = x, die Ordinate zD = y, die Subnormale zd = z und der Winkel zDd = ψ, ſo iſt, wenn man φ kennt, und die Anzahl n der Theile, in welche die Curve getheilt iſt, hierdurch ψ beſtimmt: denn es iſt $\psi + d = 90^0$ und $d = \varphi - \alpha$ oder auch $d = \varphi - m\alpha$, wenn, von s an gerechnet, D der mte Theilpunkt der Curve iſt.

Nun iſt Dz : zd = 1 : cos ψ,

alſo auch y : z = 1 : cos ψ und z = y cos ψ;

es iſt aber auch $z = \frac{ydy}{dx}$, ſolglich iſt

$$\frac{dy}{dx} = \cos\psi \text{ bekannt.}$$

Aus der gegebenen Gleichung für die Curve

$$y = f(x)$$

läßt ſich aber ebenfalls der Werth von

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

ableiten; folglich erhält man die Gleichung

$$f'(x) = \cos\psi,$$

aus welcher der Werth von az = x gefunden werden kann, und es iſt alsdann auch zD = y und zd = z ebenfalls bekannt. Hierdurch lernt man nun auch den Werth von Dd = D und von du = N'''' kennen; es iſt alſo leicht einzuſehen, daß ſich auf gleiche Weiſe für den Theilpunkt C auch die Werthe finden laſſen von Cc = C und von cu = N''' ꝛc. Man lernt alſo hierdurch die Werthe aller der Größen kennen, von welchen die Länge des Bogens S abhängt, die um ſo genauer erhalten wird, je kleiner man α annimmt, und dieſe Annahme iſt ganz der Willkühr überlaſſen, da man nur φ in eine hinreichende Anzahl gleicher Theile zu theilen braucht.

Zuſatz. Die hier mitgetheilte Rectificationsmethode kann als diejenige angeſehen werden, die den größten praktiſchen Werth hat, da jede andere nur für Bogen von unbedeutender Länge brauchbar iſt. Indeſſen verdient doch hier beiläufig noch die Lambert'ſche Formel angeführt zu werden. Iſt nämlich aDb, Fig. 72., ein Bogen von nicht bedeutender

Länge, ſind ad = a und bd = B die Tangenten der Endpunkte deſſelben, und ſetzt man die Sehne ab = c, ſo iſt hinreichend genau die Länge des Bogens

$$aDb = S = \frac{a + b + 2c}{3}.$$

Die Ableitung dieſer Formel findet man in dem zweiten Theile von Lambert's Beiträgen zu dem Gebrauche der Mathematik p. 250 u. f.

§. 119.

Von der Berechnung des Inhalts und der Oberfläche der Prismen überhaupt.

Der Kubikinhalt eines jeden Prisma wird gefunden, wenn man die Grundfläche und die Höhe deſſelben mit einander multiplicirt. Iſt nun die Grundfläche eine geradlinige Figur, ſo bietet die Berechnung des Flächeninhalts derſelben durchaus keine Schwierigkeit dar, und iſt die Grundfläche krummlinig, ſo findet man ihren Inhalt = G entweder mit Hülſe der Formel

$$G = \int ydx,$$

oder mittelſt der Formeln für die Quadraturen. (§. 112.) Die Höhe iſt entweder der Seite des Prisma gleich, wenn daſſelbe normal iſt, oder es iſt, wenn die Seite a unter einem Winkel φ gegen die Grundfläche geneigt iſt, die Höhe $H = a \sin \varphi$. Da ſonach in allen Fällen die Grundfläche und die Höhe des Prisma wenigſtens durch einen Näherungswerth hinreichend genau gefunden werden können, ſo läßt ſich auch in jedem Falle der Kubikinhalt dieſer Körper berechnen.

Die ganze Oberfläche eines Prisma beſteht aus den beiden gleichen und congruenten Grundflächen = 2G und aus der krummen Seitenfläche Z; dieſe letztere aber iſt immer einem Rechteck gleich, welches den Umfang U des normalen Querſchnittes des Körpers zur Grundlinie und die Seite deſſelben zur Höhe hat, und es iſt daher die ganze Oberfläche

$$F = 2G + Ua.$$

Der Werth von U aber wird entweder durch unmittelbare Meſſung gefunden, oder mit Hülſe der Rectificationsformel, §. 114.,

$$S = \int dx \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}$$

oder es wird der Werth durch Näherung beſtimmt, und da der Werth von G bereits bei der Ermittelung des Kubikinhalts gefunden wird, ſo läßt ſich auch in allen Fällen die Oberfläche eines Prisma entweder vollſtändig oder wenigſtens hinreichend genau berechnen.

§. 120.

Noch einige Aufgaben.

1. Es iſt Axya, Fig. 72., die Grundfläche eines normalen Prisma, ſo daß die begränzende Curve ay eine logarithmiſche Linie iſt; man ſoll für die gegebene Höhe = H den Inhalt und die Oberfläche dieſes Prisma berechnen.

Auflöſung. Die Eigenthümlichkeit der logarithmiſchen Linie beſteht darin, daß, während die Abſciſſen in arithmetiſcher Progreſſion zunehmen, die Ordinaten in geometriſcher Progreſſion wachſen; es iſt daher, wenn Ax die Abſciſſenlinie bildet, und A der Anfangspunkt der Abſciſſe iſt, für $Aa = a$, $AB = BC = b$ und $Bb = qa$, $Cc = q^2 a$ ꝛc.; alſo, wenn man $(ax) = nb$ ſetzt, $(xy) = q^n a$, nämlich es iſt

$$\text{für } x = nb, \text{ alſo } n = \frac{q}{b},$$

$$y = aq^n = aq^{\frac{x}{b}}$$

und dieſes iſt die Gleichung für die logarithmiſche Linie. Aus dieſer Gleichung aber folgt

$$dy = ad\left(q^{\frac{x}{b}}\right) = a \cdot q^{\frac{x}{b}} \log q \cdot \frac{dx}{b}$$

und es iſt daher auch

$$dy = \frac{\log q}{b} \cdot y dx.$$

Nun iſt, wenn die Fläche Aayx = Z geſetzt wird,

$$Z = \int y dx,$$

$$\text{folglich iſt hier } Z = \frac{b}{\log q} \cdot \int dy + C;$$

$$\text{alſo } Z = \frac{by}{\log q} + C.$$

und weil für $x = o$ auch $Z = o$ ſein muß, aber $y = a$ wird, ſo iſt

$$o = \frac{ab}{\log q} + C, \text{ und daher } C = -\frac{ab}{\log q}$$

und es iſt daher die Fläche

$$Aayx = Z = \frac{b\,(y-a)}{\log\,q}.$$

Hierdurch iſt nun der Kubikinhalt P des Prisma beſtimmt, welches Aayx zur Grundfläche hat, nämlich es iſt

$$P = HZ = \frac{Hb\,(y-a)}{\log\,q}.$$

Ferner folgt aus der Gleichung $dy = \frac{\log\,q}{b} \cdot ydx$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log\,q}{b} \cdot y = my,$$

wenn zur Abkürzung $\frac{\log\,q}{b} = m$ geſetzt wird.

Nun wird aber die Länge des Bogens $ay = S$ durch die Gleichung ausgedrückt

$$S = \int dx\,\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)},$$

alſo iſt auch $S = \int dx\,\sqrt{(1 + m^2y^2)} + C$,

oder weil $dx = \frac{dy}{my}$, ſo wird

$$S = \int \frac{dy\,\sqrt{(1 + m^2y^2)}}{my} = \frac{1}{m}\int \frac{dmy\,\sqrt{[1 + (my)^2]}}{my}$$

$$= \frac{1}{m}\int \frac{dz\,\sqrt{(1 + z^2)}}{z} \text{ für } my = z.$$

Nun iſt nach Meier Hirſch's Integraltafeln, Taf. 35.,

$$\int \frac{dz\,\sqrt{(1+z^2)}}{z} = \sqrt{(1 + z^2)} + \int \frac{dz}{z\,\sqrt{(1+z^2)}}$$

und nach Seite 145.

$$\int \frac{dz}{z\,\sqrt{(1+z^2)}} = \log\left(\frac{\sqrt{(1+z^2)} - 1}{z}\right) + C,$$

und daher iſt auch

$$S = \frac{1}{m}\left[\sqrt{(1+z^2)} + \log\left(\frac{\sqrt{(1+z^2)} - 1}{z}\right) + C\right]$$

$$= \frac{1}{m}\left[\sqrt{(1+m^2y^2)} + \log\left(\frac{\sqrt{(1+m^2y^2)}-1}{my}\right)\right] + C,$$

weil aber $m = \frac{\log q}{b}$, wofür man ſetzen kann $\frac{\alpha}{b}$, ſo wird

$$S = \frac{b}{\alpha}\left[\frac{\sqrt{(b^2+\alpha^2y^2)}}{b} + \log\left(\frac{\sqrt{(b^2+\alpha^2y^2)}-b}{\alpha y}\right)\right] + C,$$

wofür man auch ſetzen kann

$$S = \frac{\sqrt{(b^2+\alpha^2y^2)}}{\alpha} - \frac{b}{\alpha}\log\left(\frac{\alpha y}{\sqrt{(b^2+\alpha^2y^2)}-b}\right) + C$$

$$= \frac{\sqrt{(b^2+\alpha^2y^2)}}{\alpha} - \frac{b}{\alpha}\log\left(\frac{\sqrt{(b^2+\alpha^2y^2)}+b}{\alpha y}\right) + C,$$

und weil für $y = a$ die Länge des Bogens $S = o$ wird, ſo iſt $C = \frac{b}{\alpha}\log\left(\frac{\sqrt{(b^2+\alpha^2a^2)}+b}{\alpha a}\right) - \frac{\sqrt{(b^2+\alpha^2a^2)}}{\alpha}$, es iſt daher die Länge des Bogens S

$$= \frac{\sqrt{(b^2+\alpha^2y^2)}-\sqrt{(b^2+\alpha^2a^2)}}{\alpha} - \frac{b}{\alpha}\log\left[\frac{a\sqrt{(b^2+\alpha^2y^2)}+ba}{y\sqrt{(b^2+\alpha^2a^2)}+by}\right];$$

wo, wie bei allen Integrationen, natürliche Logarithmen zu verſtehen ſind.

Die krumme Oberfläche des Prisma iſt $= UH$, und weil $U = Aa + Ax + xy + ay$, ſo iſt auch

$$U = a + x + y + S,$$

und die ganze Oberfläche F wird alſo ausgedrückt durch die Formel

$$F = 2Z + H\,(a + x + y + S).$$

Zuſatz. Iſt die eine Seite der Grundfläche eines Prisma zwar die Curve ay, ſind die übrigen Seiten derſelben aber z. B. az und zy, ſo braucht man von dem oben für Z gefundenen Werthe nur die Fläche aAxz abzuziehen, um die Grundfläche zu erhalten ꝛc.

2. Es iſt adb, Fig. 75., ein Halbkreis und an dem Endpunkte b des Durchmeſſers iſt eine Tangente bc und von a aus, irgend eine Secante $a\alpha$ gezogen, auf dieſer aber iſt $ar = \alpha\varrho$ genommen. Der auf dieſe Weiſe beſtimmte Punkt r liegt in einer Curve, für welche mehrere Punkte dadurch gefunden werden können, daß von a aus verſchiedene Secanten an die Tangente gezogen werden: es ſoll die Fläche des Dreiecks amr,

daß von den geraden Linien am, mr und dem Bogen ar der Curve eingeſchloſſen iſt, berechnet werden.

Auflöſung. Zieht man aus r und ϱ die Normalen auf ab, ſo ſind dieſe Linien parallel zu der Tangente bc, und weil ar = $\alpha\varrho$, ſo iſt auch am = bμ. Setzt man alſo den Durchmeſſer ab = D und am = x, ſo iſt auch bμ = x, aμ = D − x und $\mu\varrho = \sqrt{x\,(D-x)}$. Da nun

$$am : mr = a\mu : \mu\varrho,$$

ſo iſt auch, weil mr = y die zu am = x gehörige Ordinate iſt,

$$x : y = D - x : \sqrt{x\,(D-x)}$$

und folglich iſt auch

$$x^2 : y^2 = (D-x)^2 : x\,(D-x);$$

und dieſes giebt die Gleichung für die Curve, welche die Ciſſoide genannt wird:

$$y^2 = \frac{x^3}{D-x}, \text{ alſo } y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(D-x)}}$$

$$\text{und daher auch } y = \frac{x^2}{\sqrt{(Dx-x^2)}}.$$

Wird nun die Fläche amr = Z geſetzt, ſo iſt

$$dZ = ydx$$

$$\text{und es iſt daher auch } dZ = \frac{x^2dx}{\sqrt{(Dx-x^2)}},$$

$$\text{alſo } Z = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{(Dx-x^2)}}.$$

Nach Meier Hirſch's Integraltafeln, Taf. 44., iſt für $X = ax + bx^2$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x}{2b} - \frac{3a}{4b^2}\right)\sqrt{X} + \frac{3a^2}{8b^3}\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

alſo iſt hier, weil a = D und b = − 1,

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{X}} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{3D}{4}\right)\sqrt{X} + \frac{3D^2}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

$$\text{Da nun } \int\frac{dx}{\sqrt{(Dx-x^2)}} = \text{Arc sinvers } \frac{2x}{D}, \text{ ſo iſt}$$

$$Z = -\left(\frac{2x+3D}{4}\right)\sqrt{(Dx-x^2)} + \frac{3D^2}{8}\text{ Arc sinvers }\frac{2x}{D}$$

und da hier bereits Z = o wird, wenn man x = o ſetzt, wie es auch ſein muß, ſo kommt keine Conſtante hinzu.

Zuſatz 1. Vermöge der Conſtruction iſt, wenn man in dem Mittelpunkte c des Kreiſes den Radius cd normal auf ab errichtet, d ein Punkt der Curve, und es iſt die Fläche ardc dem Werthe gleich, welchen der obige Ausdruck für $x = \frac{1}{2}D$ erhält. Setzt man alſo dieſe Fläche = F, ſo iſt

$$F = -D\sqrt{\frac{D^2}{4}} + \frac{3D^2}{8} \text{ Arc sinvers } 1,$$

und weil $1 = \text{sinvers } 90°$, ſo iſt Arc sinvers $1 = \frac{1}{2}\pi$, und daher

$$F = -\frac{1}{2}D^2 + \frac{3}{16}D^2\pi.$$

$$\text{Der Quadrant acdk des Kreiſes iſt} = \frac{D^2}{16}\pi,$$

folglich iſt die von dem Kreisquadranten akd und dem ciſſoidiſchen Bogen ard eingeſchloſſene Fläche

$$= \frac{D^2}{16}\pi + \frac{1}{2}D^2 - \frac{3}{16}D^2\pi$$

$$= \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{8}D^2\pi = \frac{1}{2}\left[D^2 - \tfrac{1}{4}D^2\pi\right];$$

dieſe Fläche iſt alſo der Hälfte der Differenz gleich, welche erhalten wird, wenn man von dem Quadrate des Durchmeſſers die Fläche des Kreiſes abzieht. Nun iſt, wenn an a und d die Tangenten ag und dg gezogen werden, die Fläche akdg der vierte Theil jener Differenz, folglich iſt

$$\text{ardk} = 2 \times \text{akdg}.$$

Zuſatz 2. Für $x = D$ wird $g = \infty$ und es iſt daher die Tangente ac eine Aſſymptote der Curve; die unendlich ausgedehnte Fläche zwiſchen dieſer Aſſymptote der Curve und ab wird erhalten, wenn man $x = D$ in dem Ausdrucke für Z ſetzt; es iſt dieſelbe daher

$$Z = \frac{3D^2}{8} \text{ Arc sinvers } 2,$$

und weil $2 = \text{sinvers } 180°$, ſo iſt

$$Z = \frac{3D^2}{8}\pi.$$

3. Es ſoll die Länge eines Bogens der Ciſſoide, von welcher oben die Gleichung angegeben iſt, gefunden werden.

Aufloͤſung. Aus der Gleichung für die Ciſſoide

$$y^2 = \frac{x^3}{D-x}$$

folgt $2ydy = \frac{(D-x)\cdot 3x^2dx + x^3dx}{(D-x)^2} = \frac{x^2(3D-2x)\,dx}{(D-x)^2}$

und es iſt daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2(3D-2x)}{2y(D-x)^2}$$

und $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^4(3D-2x)^2}{4y^2(D-x)^4} = \frac{x^4(3D-2x)^2}{4(D-x)^4} \cdot \left(\frac{D-x}{x^3}\right)$

$$= \frac{x}{4}\left(\frac{(3D-2x)^2}{(D-x)^3}\right).$$

Da nun $(dS)^2 = \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right](dx)^2$, ſo iſt

$$(dS)^2 = \frac{x(3D-2x)^2 + 4(D-x)^3}{4(D-x)^3} \cdot (dx)^2$$

$$= \frac{D^2(4D-3x)}{4(D-x)^3} \cdot (dx)^2,$$

und es iſt daher

$$dS = \frac{Ddx}{2(D-x)} \sqrt{\left(\frac{4D-3x}{D-x}\right)}.$$

Um dieſen Ausdruck bequem integriren zu können, ſetze man

$$\frac{4D-3x}{D-x} = z^2,$$

alſo $x = \frac{D(z^2-4)}{z^2-3}$, $D-x = \frac{D}{z^2-3}$ und $dx = \frac{2Dzdz}{(z^2-3)^2}$.

Setzt man dieſe Werthe in dem Ausdrucke für dS, ſo wird derſelbe

$$dS = \frac{D}{2} \cdot \frac{2Dzdz}{(z^2-3)^2} \cdot \frac{z^2-3}{D} \cdot z = \frac{Dz^2dz}{z^2-3}$$

$$= Ddz + \frac{3Ddz}{z^2-3}$$

und es iſt daher

$$S = \int Ddz + \int \frac{3Ddz}{z^2-3} + C;$$

nämlich es iſt

$$S = Dz + 3D \int \frac{dz}{z^2-3} + C.$$

Nun iſt nach Meier Hirſch's Integraltafeln. p. 47.

$$\int \frac{dx}{-a+bx^2} = -\int \frac{dx}{a-bx^2} = -\frac{1}{2\sqrt{ab}} \log\left(\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}\right)$$

und es iſt daher

$$\int \frac{dz}{-3+z^2} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \log\left(\frac{\sqrt{3}+z}{\sqrt{3}-z}\right)$$

$$= +\frac{1}{2\sqrt{3}} \log\left(\frac{\sqrt{3}-z}{\sqrt{3}+z}\right)$$ und es iſt daher

$$S = Dz + \frac{D\sqrt{3}}{2} \log\left(\frac{\sqrt{3}-z}{\sqrt{3}+z}\right) + C.$$

Weil aber für x = o auch S = o ſein muß, und für x = o z = 2 wird, ſo iſt

$$o = 2D + \frac{D\sqrt{3}}{2} \log\left(\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}\right) + C$$

und es iſt daher

$$C = -2D - \frac{D\sqrt{3}}{2} \log\left(\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}\right);$$

folglich iſt der vollſtändige Werth von S =

$$D(z-2) + \frac{D\sqrt{3}}{2}\left[\log\left(\frac{\sqrt{3}-z}{\sqrt{3}+z}\right) - \log\left(\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}\right)\right] =$$

$$D(z-2) + \frac{D\sqrt{3}}{2} \log\left(\frac{(\sqrt{3}-z)(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}+z)(\sqrt{3}-2)}\right) =$$

$$D(z-2) + \frac{D\sqrt{3}}{2} \log\left(\frac{(z-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(z+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\right) =$$

$$D(z-2) + \frac{D\sqrt{3}}{2} \log\left(\frac{(z-\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3})^2}{(z^2-3)}\right) =$$

$$D(z-2) + D\sqrt{3} \log\frac{(z-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{\sqrt{(z^2-3)}}$$

die geſuchte Gleichung für die Länge des Bogens.

Zuſatz. Soll die Länge des Bogens ard, Fig. 75., gefunden werden, ſo muß man ſetzen x = (ac) = $\frac{1}{2}$D, und weil

$$z = \sqrt{\left(\frac{4D-3x}{D-x}\right)},$$

ſo wird für dieſen Werth von x

$$z = \sqrt{\frac{\frac{5}{2}D}{\frac{1}{2}D}} = \sqrt{5},$$

und es iſt daher der Bogen

$$(adr) = 2(\sqrt{5}-2) + D\sqrt{3}\,\log\left(\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\right)$$

§. 121.

Uebungen.

1. Es iſt die allgemeine Formel für die Quadratur

$$Z = \int y dx \text{ und } dZ = y dx,$$

und hieraus folgt $y = \frac{dZ}{dx}$.

Wird alſo für Z irgend eine Function angenommen, und man differenzirt dieſelbe, ſo läßt ſich hieraus die Gleichung für eine Curve ableiten, welche quadrirbar iſt, und da hier für Z jede beliebige Function gewählt werden kann, ſo läßt ſich auch durch die einfache Formel $y = \frac{dZ}{dx}$ die Gleichung für eine Curve auffinden, deren Fläche beſtimmte Eigenſchaften zukommen. Soll z. B. die Gleichung für eine Curve gefunden werden, von welcher jeder Theil der Fläche, der ganzen Oberfläche eines Kegels von gegebener Höhe gleich iſt, und der die entſprechende Abſciſſe zum Radius der Grundfläche hat, ſo muß ſein

$$Z = x\pi\,[\sqrt{(h^2 + x^2)} + x],$$

und daher iſt $dZ = \pi\left(\frac{h^2 + 2x^2}{\sqrt{(h^2+x^2)}} + 2x\right) dx$

und die Gleichung für die entſprechende Curve iſt alſo

$$y = \frac{dZ}{dx} = \frac{(h^2+2x^2)\pi}{\sqrt{(h^2+x^2)}} + 2x\pi.$$

2. Es ſoll die Gleichung für eine Curve von der Art aufgefunden werden, daß die Fläche eines jeden, von einer Abſciſſe, der dazu gehörigen Ordinate und dem entſprechenden Bogen eingeſchloſſenen Stückes zu dem Rechtecke der Abſciſſe und Ordinate ein gegebenes Verhältniß hat.

Setzt man den Verhältnißnamen = q, ſo daß die Bedingung wird

$$qZ = xy,$$

ſo findet man durch eine ganz einfache Operation die Gleichung für die entſprechende Curve

$$y = \sqrt[q]{x^{1-q}},$$

welche alſo zu der Gattung der Parabeln gehört.

3. Man ſoll die Gleichung für die Curve angeben, der die Eigenſchaft zukommt, daß die Fläche eines jeden, durch Abſciſſe, Ordinate und Bogen beſtimmten Stückes dem Quadrate der Sehne gleich iſt, welche den Anfangspunkt der Abſciſſen mit dem Endpunkte der Ordinate verbindet.

Setzt man dieſe Sehne $= v$, ſo iſt $v^2 = x^2 + y^2$,

alſo ſoll $Z = x^2 + y^2$ ſein,

und daher $ydx = 2xdx + 2ydy$

und für $y = xz$ wird

$$xzdx = 2xdx + 2xz(xdz + zdx)$$

und daher $$zdx = 2dx + 2zxdz + 2z^2dx$$

$$(z - 2z^2 - 2)dx = 2zxdz,$$

und es wird daher $$\frac{dx}{x} = \frac{-2zdz}{2z^2 - z + 2};$$

alſo $$\log x = -\int \frac{2zdz}{2z^2 - z + 2} \text{ ꝛc.}$$

4. In wie fern iſt es möglich, Gleichungen für Curven aufzufinden, deren Bogen rectificabel ſind?

5. Es iſt ecf, Fig. 63., der Axentriangel eines normalen Kegels; man ſoll den Punkt a in der Seite cf desſelben ſo annehmen, daß, wenn ab die Abſciſſenlinie einer Parabel iſt, die Fläche des paraboliſchen Abſchnittes bis b gleich ſei der Grundfläche des Kegels, die ef zum Durchmeſſer hat.

6. Aus den Punkten c und γ, Fig. 76., ſind mit dem Radius cd $= \gamma\delta$ die Kreisbogen ab und $\alpha\beta$ ſo beſchrieben, daß ad $=$ db $= \alpha\delta = \delta\beta$, und aus den Punkten m und n, deren Lage durch die verlängerten ac und $\alpha\gamma$, die ſich in m ſchneiden, und durch die verlängerten bc und $\beta\gamma$, welche in n zuſammentreffen, beſtimmt iſt, die Bogen aα und bβ; es ſollen die Formeln für die Fläche des ganzen Ovals und für die Länge des Umfanges desſelben gefunden werden. Als gegeben ſoll hierbei angeſehen werden der Radius ca $= \varrho$, ma $=$ R und cγ $=$ C.

7. Die Curve, deren Eigenthümlichkeit von der Gleichung abhängt

$$y = \left(\frac{b + x}{x}\right)\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

führt zu der Quadratur

$$Z = \frac{a^2}{2} \text{Arc cos} \frac{x}{a} - (b + \tfrac{1}{2}x)\sqrt{(a^2 - x^2)} + ab \log\left[\frac{a + \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x}\right].$$

8. Wenn die Gleichung für eine Curve iſt

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2},$$

ſo iſt die Länge eines jeden Bogens dieſer Curve durch die Gleichung beſtimmt

$$S = \tfrac{3}{2} \sqrt[3]{ax^2}.$$

Zweiter Abſchnitt.

Von den durch Axendrehung erzeugten Körpern.

§. 122.

Aufgabe.

Die Lage der Curve byn, Fig. 66., gegen die Abſciſſenlinie am iſt dadurch vollkommen beſtimmt, daß die Gleichung zwiſchen den Abſciſſen und Ordinaten gegeben iſt; nun dreht ſich die ganze Fläche amnb um am als um eine Axe: man ſoll die Formel für den Kubikinhalt des dadurch erzeugten Körpers angeben.

Auflöſung. Iſt die zu der Abſciſſe ax = x gehörige Ordinate xy = y, und ſetzt man xm = Δx, ſo wird mn = y + Δ y, und bei der Erzeugung des Körpers wird durch xmny eine Scheibe deſſelben gebildet, die = ΔX geſetzt werden kann, wenn man den ganzen Körper mit X bezeichnet. Für jeden endlichen Werth von Δx aber iſt ΔX größer, als der Cylinder, welcher Δx zur Höhe hat, und von deſſen Grundfläche der Radius = y iſt; ΔX aber iſt kleiner als ein Cy-

linder, der dieſelbe Höhe hat, und von deſſen Grundfläche der Radius = $y + \Delta y$ iſt. Es iſt alſo

$$\Delta X > y^2\pi \cdot \Delta x \text{ und } \Delta X < (y + \Delta y)^2\pi \cdot \Delta x,$$

und daher iſt auch

$$\frac{\Delta X}{\Delta x} > y^2\pi \text{ und } \frac{\Delta X}{\Delta x} < y^2\pi + 2y\Delta y\pi + (\Delta y)^2\pi$$

$$< y^2\pi + (2y + \Delta y)\pi \cdot \Delta y,$$

oder weil in jedem Falle geſetzt werden kann $\Delta y = P\Delta x$, wo P irgend eine Function von x iſt, ſo erhält man die Bedingungen

$$\frac{\Delta X}{\Delta x} > y^2\pi \text{ und } \frac{\Delta X}{\Delta x} < y^2\pi + P\pi \cdot \Delta x$$

und hieraus folgt für $\Delta x = o$

$$\frac{dX}{dx} = y^2\pi;$$

folglich iſt $X = \pi \int y^2 dx$

die Formel für den Inhalt des erzeugten Körpers, und es hat dieſe Formel für alle Fälle Gültigkeit, wenn der Körper durch eine Fläche erzeugt wird, die ſich um eine feſte Linie dreht.

Zuſatz. Wenn die Curve in irgend einem Punkte die Drehungsaxe ſchneidet, und die Ordinaten nehmen mit den Abſciſſen zu, ſo nennt man den Körper gewöhnlich ein Konoid; ſo hat man ein paraboliſches und ein hyperboliſches Konoid: dagegen verſteht man unter einem Sphäroid einen ſolchen Körper, der durch eine Curve erzeugt wird, von welcher die Axe zweimal geſchnitten iſt, wie dieſes z. B. bei einer halben Elypſe der Fall iſt. Jeden, von einer Curve erzeugten Körper, welche die Axe gar nicht ſchneidet, rechnet man zu der Gattung der Cylindroiden.

§. 123.

Von den durch die Kegelſchnitte erzeugten Körpern.

1. Wenn $a\alpha y$, Fig. 67., eine Parabel iſt, die ſich um ihre Axe ax dreht, ſo iſt für ax = x und xy = y die Gleichung

$$y^2 = px,$$

und es iſt daher $y^2 dx = pxdx;$

folglich iſt der paraboliſche Kegel

$$P = \pi \int pxdx = \pi \, . \, \frac{px^2}{2} = \tfrac{1}{2}x \cdot px\pi,$$

und weil $px = y^2$, ſo iſt endlich

$$P = \tfrac{1}{2}xy^2\pi,$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil für $x = o$ auch $P = o$ werden muß, was die Formel bereits giebt.

Die Formel $xy^2\pi$ drückt den Inhalt eines Cylinders aus, der die Abſciſſe x zur Höhe hat, und von deſſen Grundfläche die Ordinate y der Radius iſt; der paraboliſche Kegel iſt alſo der Hälfte eines Cylinders gleich, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

2. Wenn die halbe Elypſe adb, Fig. 68., ſich um die große Axe $ab = 2a$ dreht, ſo wird ein elyptiſches Sphäroid erzeugt, und da für $am = x$ und $mn = y$ die Gleichung ſtatt findet

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

$$\text{ſo iſt } y^2dx = \frac{b^2}{a^2}(2axdx - x^3dx),$$

der bei der Umwälzung um ab durch den Bogen an erzeugte Körper X hat einen Inhalt

$$X = \frac{b^2}{a^2}\pi \int (2axdx - x^2dx)$$

$$= \frac{b^2}{a^2}\pi \left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right)$$

$$\text{und es iſt alſo } X = \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 \left(a - \tfrac{1}{3}x\right)\pi,$$

wo ebenfalls die Conſtante = o iſt.

Nimmt man in dieſer Gleichung $x = 2a$, ſo wird der Inhalt des ganzen elyptiſchen Sphäroids erhalten

$$E = \frac{b^2}{a^2} \cdot 4a^2 \left(a - \tfrac{2}{3}a\right)\pi,$$

$$\text{nämlich es iſt } E = \frac{4ab^2\pi}{3}.$$

Nun iſt der Inhalt der mit dem Radius $ac = a$ beſchriebenen Kugel $G = \frac{4a^3\pi}{3}$;

folglich iſt $E : G = b^2 : a^2$.

Das durch Umwälzung der halben Elypſe um die große Axe erzeugte Elypſoid verhält ſich alſo zu der Kugel G, von welcher ab der Durchmeſſer iſt, wie das Quadrat der kleinen Axe der Elypſe zu dem Quadrate der großen Axe derſelben.

3. Dreht der elyptiſche Quadrant dna, Fig. 68., ſich um die halbe kleine Axe dc, ſo kann auch für dieſen Körper der Inhalt leicht berechnet werden. In dieſem Falle muß man dc als Abſciſſenlinie annehmen, und die Ordinaten parallel zu ab. Nun iſt für $ak = z$ und $kh = v$ die Gleichung

$$v^2 = \frac{b^2}{a^2}(2az - z^2),$$

ſetzt man alſo $dg = x$ und $gh = y$, und daher

$$z = ac - gh = a - y \text{ und}$$
$$v = dc - dg = b - x,$$

ſo wird dieſe Gleichung

$$(b - x)^2 = \frac{b^2}{a^2}[2a(a - y) - (a - y)^2],$$

woraus durch Reduction erhalten wird

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2),$$

und es iſt daher, wenn dna um dc ſich dreht, der durch den Bogen anh erzeugte Körper

$$X = \frac{a^2}{b^2}\pi \int (2bxdx - x^2dx)$$

$$= \frac{a^2}{b^2}\pi\left(bx^2 - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{a^2}{b^2}x^2(b - \tfrac{1}{3}x)\pi,$$

wo ebenfalls keine Conſtante vorkommt. Für $x = 2b$ giebt dieſe Formel den Inhalt E′ des abgeplatteten Sphäroids, welches entſteht, wenn die halbe Elypſe um ihre kleine Axe ſich dreht; nämlich es iſt

$$E' = \frac{a^2}{b^2} \cdot 4b^2 (b - \tfrac{2}{3}b)\pi = \frac{4a^2b\pi}{3}.$$

Da nun, nach No. 2., der durch die Umdrehung der halben Elypſe um die große Axe ab gebildete Körper,

$$E = \frac{4ab^2\pi}{3} \text{ iſt,}$$

ſo findet die Proportion ſtatt

$$E : E' = b : a = 2b : 2a;$$

das längliche, elyptiſche Sphäroid verhält ſich alſo zu dem abgeplatteten, wie die kleine Axe der Elypſe zu ihrer großen Axe.

4. Iſt $a\alpha y$, Fig. 67., ein Schenkel der Hyperbel, der ſich um die Axe ax derſelben dreht, ſo iſt die Gleichung für $ax = x$ und $xy = y$,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

und es iſt daher der Inhalt des bei der Umwälzung durch den Bogen ay gebildeten hyperboliſchen Konoids

$$X = \frac{b^2}{a^2}\pi \int (2axdx + x^2dx)$$

$$= \frac{b^2}{a^2}\pi(ax^2 + \tfrac{1}{3}x^3) = \frac{b}{a^2}(a + \tfrac{1}{3}x)x^2\pi,$$

wo eben ſo, wie bei den übrigen bisher betrachteten Körpern, die Conſtante = o iſt.

Aus dieſer Formel folgt

$$2X = \frac{b^2}{a^2}(2ax + \tfrac{2}{3}x^2)x\pi$$

$$= \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2 - \tfrac{1}{3}x^2)x\pi$$

$$= \left(y^2 - \frac{1}{3}\frac{b^2}{a^2}x^2\right)x\pi = xy^2\pi - \frac{b^2x^3\pi}{3a^2},$$

und für $b = a$ giebt dieſe Formel

$$X = \tfrac{1}{2}\left(xy^2\pi - \frac{x^3\pi}{3}\right).$$

Man erhält alſo für das, durch die gleichſeitige Hyperbel, deren Axen alſo beide gleich ſind, erzeugte Konoid die Regel: daſſelbe iſt der halben Differenz zwiſchen einem Cylinder und einem Kegel gleich, von welchen der erſtere mit dem Hyperboloid gleiche Grundfläche und Höhe, und der Kegel die Axe des Hyperboloid zum Radius der Grundfläche und zur Höhe hat.

§. 124.

§. 124.

Von einigen durch Kreisbogen gebildeten Körpern.

1. Auf dem Durchmeſſer ab des Halbkreiſes adb, Fig. 77., iſt die Normale $p\alpha$ errichtet, welche den Bogen $a\alpha$ abſchneidet, und es dreht ſich die Fläche αnap um αp; man ſoll den Inhalt des hierdurch erzeugten Körpers beſtimmen.

Aufloſung. Es wird hier angenommen, daß der Bogen $a\alpha < 90°$ und daher, wenn man $ca = R$ und $cp = a$ ſetzt, $ap = R - a$ wird. Setzt man nun $pm = x$ und $mn = y$, alſo $qn = a + y$, ſo iſt, weil

$$(qn)^2 = R^2 - (cq)^2,$$
$$(y + a)^2 = R^2 - x^2,$$
$$\text{alſo } y = -a + \sqrt{(R^2 - x^2)}$$
$$\text{und } y^2 = a^2 + R^2 - x^2 - 2a\sqrt{(R^2 - x^2)}.$$

Wird nun der durch apmn erzeugte Körper $= X$ geſetzt, ſo iſt

$$X = \pi\int y^2 dx = \pi\int(a^2+R^2-x^2)\,dx - 2a\pi\int dx\sqrt{(R^2-x^2)}$$
$$= \left(a^2x + Rx - \frac{x^3}{3}\right)\pi - 2a\pi\int dx\sqrt{(R^2-x^2)}.$$

Nun iſt aber

$$\int dx\sqrt{(R^2-x^2)} = \frac{x}{2}\sqrt{(R^2-x^2)} + \frac{R^2}{2}\text{Arc tg}\sqrt{\left(\frac{x^2}{R^2-x^2}\right)};$$

folglich iſt

$$X = (a^2 + R^2 - \tfrac{1}{3}x^2)x\pi - ax\pi\sqrt{(R^2-x^2)}$$
$$- aR^2\pi\ \text{Arc tg}\sqrt{\left[\frac{x^2}{R^2-x^2}\right]}$$

und es kommt hier keine Conſtante hinzu, weil $X = o$ werden muß, wenn man $x = o$ ſetzt, und die Formel wirklich dieſen Werth giebt.

Soll nun aus dieſem Ausdrucke der Inhalt des ganzen, durch αnap erzeugten Konoids berechnet werden, ſo muß man ſetzen $x = (p\alpha) = \sqrt{(R^2 - a^2)}$, und es wird daher für $p\alpha = h$

$$X = \left[a^2 + R^2 - \frac{R^2-a^2}{3}\right]h\pi - a^2h\pi - aR^2\pi\ \text{Arc tg}\frac{h}{a}$$
$$= \left(\frac{2R^2+a^2}{3}\right)h\pi - aR^2\pi\ \text{Arc tg}\frac{h}{a}.$$

Zuſatz 1. Wenn $p\alpha = R$ wird, ſo fällt ſie mit cd zuſammen, und es iſt alsdann $a = o$, alſo in dieſem Falle

$$X = \frac{2R^3\pi}{3},$$

es iſt nämlich der Körper alsdann die Halbkugel.

Zuſatz 2. Dreht die Fläche αnap ſich um ap, ſo wird ein Kugelabſchnitt erzeugt, für welchen die Formel bereits §. 81. angegeben iſt; es läßt ſich dieſelbe aber auch auf folgende Art ableiten: Man ſetze $pr = x$ und $rn = y$, ſo erhält man für $cp = a$

$$y^2 = (ar) \times (rb) = [R - (a+x)]\,[R + (a+x)],$$

$$\text{alſo } y^2 = R^2 - (a+x)^2 = R^2 - a^2 - 2ax - x^2,$$

und der Inhalt des Körpers iſt daher

$$X = \pi\int y^2dx = \pi\int[R^2 - a^2 - 2ax - x^2]dx$$

$$= \left(R^2x - a^2x - ax^2 - \frac{x^3}{3}\right)\pi$$

$$= (R^2 - a^2)x\pi - \left(\frac{3a + x}{3}\right)x^2\pi$$

ꝛc., woraus leicht die §. 81. angegebene Formel abgeleitet werden kann.

2. Die Fläche $tan\alpha$, Fig. 77., dreht ſich um die Tangente at; es ſoll der Inhalt des hierdurch erzeugten Konoids angegeben werden.

Aufloſung. Man ſetze $a\mu = x$, $\mu n = y$; da nun

$ar : rn = rn : rb$ oder $\mu n : a\mu = a\mu : rb$,

ſo iſt auch $y : x = x : 2R - y$

und daher $2Ry - y^2 = x^2$,

alſo $(R - y)^2 = R^2 - x^2$,

und daher $y = R - \sqrt{(R^2 - x^2)}$

und $y^2 = 2R^2 - x^2 - 2R\sqrt{(R^2 - x^2)}$,

daher iſt der Inhalt des Konoids

$$X = \pi\int y^2dx = \pi\int(2R^2 - x^2)dx - 2R\pi\int dx\sqrt{(R^2 - x^2)};$$

nämlich es iſt

$$X = \left(2R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\pi - 2R\pi\int dx\sqrt{(R^2 - x^2)},$$

und da $\int dx\sqrt{(R^2 - x^2)} = \frac{x\sqrt{(R^2 - x^2)}}{2} +$

$$\frac{R^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}} = \frac{x}{2}\sqrt{(R^2 - x^2)} + \frac{R^2}{2}\,\text{Arc tg}\sqrt{\left(\frac{x^2}{R^2 - x^2}\right)}$$

ſo iſt $X = \left(2Rx - \frac{x^3}{3}\right)\pi - Rx\pi\sqrt{(R^2 - x^2)}$

$$- R^3\pi \text{ Arc tg} \sqrt{\left(\frac{x^2}{R^2 - x^2}\right)}$$

die Formel für das Konoid für jeden Theil $a\mu$ der Tangente at.

Zuſatz. Für $a\mu = x = R$ iſt die beſchreibende Fläche ein Dreieck, von welchem zwei Seiten Radien ſind und die dritte ein Quadrant des Kreiſes; für dieſen Fall iſt der Kubikinhalt

$$X = \left(2R^3 - \frac{R^3}{3}\right)\pi - R^3\pi \text{ Arc tg} \sqrt{\frac{R^2}{0}}$$

$$= \frac{5R^3\pi}{3} - R^3\pi \text{ Arc tg } \infty$$

und weil Arc tg $\infty = 90^0 = \frac{1}{2}\pi$, ſo iſt

$$X = \frac{5R^3\pi}{3} - \tfrac{1}{2}R^3\pi \cdot \pi$$

$$= (\tfrac{5}{3} - \tfrac{1}{2}\pi)R^3\pi = \frac{10 - 3\pi}{6} R^3\pi$$

$$= 0{,}09587 \times R^3\pi.$$

3. Die Linie AT iſt parallel zu der Tangente at, und es dreht ſich die Fläche $Aan\alpha T$ um AT; man ſoll den Inhalt des hierdurch beſtimmten Körpers angeben.

Auflöſung. Für $Aa = p$, $AN = x$ und $Nn = y$ iſt $\mu n = y - p = (ar)$, und da

$$ar : rn = rn : rb,$$

$$\text{ſo iſt } y - p : x = x : 2R - (y - p);$$

alſo, wenn einſtweilen $y - p = z$ geſetzt wird,

$$2Rz - z^2 = x^2$$

und $(R - z)^2 = R^2 - x^2$, alſo $z = R - \sqrt{(R^2 - x^2)}$, und es iſt daher auch

$$y - p = R - \sqrt{(R^2 - x^2)};$$

folglich iſt

$$y^2 = (R + p)^2 + R^2 - x^2 - 2(R + p)\sqrt{(R^2 - x^2)},$$

und daher, wenn der Inhalt des Körpers mit Z bezeichnet wird,

$$Z = \pi \int [(R + p)^2 + R^2 - x^2]\,dx - 2(R + p)\pi \int dx \sqrt{(R^2 - x^2)}$$

$$= \left[(R+p)^2 + R^2 - \frac{x^2}{3}\right] x\pi - 2(R+p)\pi\left[\frac{x}{2}\sqrt{(R^2-x^2)}\right.$$
$$\left. + \frac{R^2}{2} \text{ Arc tg} \sqrt{\left(\frac{x^2}{R^2-x^2}\right)}\right];$$

nämlich es iſt

$$Z = \left(2R^2+2Rp+p^2-\frac{x^2}{3}\right) x\pi - (R+p)x\pi\sqrt{(R^2-x^2)}$$
$$- (R^3 + R^2p)\pi \text{ Arc tg}\sqrt{\left(\frac{x^2}{R^2-x^2}\right)}.$$

Zuſatz. Der durch ATta bei der Umwälzung um AT erzeugte Cylinder hat einen Inhalt $p^2x\pi$, folglich iſt der Inhalt des Körpers, welcher von $at\alpha n$ erzeugt wird, indem dieſe Fläche um AT ſich dreht, = V =

$$\left(2R^2+2Rp-\frac{x^2}{3}\right)x\pi - (R+p)x\pi\sqrt{(R^2-x^2)}$$
$$-(R^3+R^2p)\pi \text{ Arc tg}\sqrt{\left(\frac{x^2}{R^2-x^2}\right)}.$$

Wenn die Fläche $at\alpha n$ um at ſich dreht, ſo iſt, nach No. 2., der Inhalt des erzeugten Körpers X =

$$\left(2R^2-\frac{x^2}{3}\right)x\pi - Rx\pi\sqrt{(R^2-x^2)} - R^3\pi \text{ Arc tg}\sqrt{\left(\frac{x^2}{R^2-x^2}\right)}$$

folglich iſt der Unterſchied V—X der von $at\alpha n$ erzeugten Körper, wenn dieſe Fläche ſich einmal um AT und einmal um at dreht,

$$V-X = 2Rpx\pi - px\pi\sqrt{(R^2-x^2)} - R^2p\pi \text{ Arc tg}\sqrt{\left(\frac{x^2}{R^2-x^2}\right)}$$

und für x = R wird dieſer Unterſchied =

$$2R^2p\pi - R^2p\pi \cdot \tfrac{1}{2}\pi = (2-\tfrac{1}{2}\pi)R^2p\pi.$$

Uebrigens geht aus dieſen Formeln hervor, daß der Unterſchied mit der Größe von Aa = p proportionirt wächſt; es wird nämlich der Unterſchied gefunden zwiſchen dem Körper, welchen $at\alpha n$ beſchreibt, indem dieſe Fläche um at ſich dreht, und dem, welcher von ihr beſchrieben wird, wenn ſie ſich um AT dreht, wenn man den Abſtand Aa = p mit

$$2Rx\pi - x\pi\sqrt{(R^2-x^2)} - R^2\pi \text{ Arc tg}\sqrt{\left(\frac{x^2}{R^2-x}\right)}$$

multiplicirt.

Anmerkung. Wenn die Fläche $a\delta\alpha p$, wo der Bogen αp größer als ein Quadrant iſt, um αp ſich dreht, ſo wird ein oben von α bis δ eingedrückter Körper erzeugt, deſſen Inhalt ſich ebenfalls mittelſt der allgemeinen Formel finden läßt. Dieſer Körper gehört übrigens zu der §. 128. vorkommenden Gattung.

§. 125.

Von einigen beſonderen, durch Bogen von Kegelſchnitten erzeugten Körpern.

1. Iſt ax, Fig. 67., die Axe und ay ein Bogen einer Parabel, ſo iſt für $ax = X$ und $xy = Y$ der durch axy erzeugte Körper

$$P = \tfrac{1}{2}XY^2\pi,$$

und eben ſo iſt der durch $a\beta\alpha$ erzeugte Körper p' für $a\beta = x$ und $\beta\alpha = y$

$$p' = \tfrac{1}{2}xy^2\pi,$$

und hieraus folgt für den durch $\alpha\beta xy$ beſchriebenen Körper

$$\begin{aligned} P - p' &= \tfrac{1}{2}(XY^2 - xy^2)\pi \\ &= \tfrac{1}{2}(X^2 - x^2)p\pi \\ &= \tfrac{1}{2}(X + x)(X - x)p\pi. \end{aligned}$$

Wird alſo die Höhe $\beta x = X - x$ des abgeſtumpften Konoids $= h$ geſetzt, ſo erhält man

$$P - p' = \tfrac{1}{2}(X + x)hp\pi = \tfrac{1}{2}(Xp + xp)h\pi,$$

und daher endlich

$$P - p' = \left(\frac{Y^2 + y^2}{2}\right)h\pi = \left(\frac{Y^2\pi + y^2\pi}{2}\right)h.$$

Das abgeſtumpfte paraboliſche Konoid iſt alſo einem Cylinder gleich, der mit demſelben gleiche Höhe hat, und deſſen Grundfläche das arithmetiſche Mittel iſt zwiſchen der oberen und unteren Fläche des Konoids.

2. Zieht man durch α, Fig. 67., den Diameter αz der Parabel, welcher alſo parallel zu der Axe ax iſt, und ſoll nun der Inhalt des Körpers angegeben werden, welcher entſteht, wenn die Fläche acy um ac ſich dreht, ſo kann dies auf folgende Art geſchehen: Man ſetze $a\beta = a$, $\beta\alpha = b$, $\alpha c = x$ und $cy = y$. Da nun

$$(xy)^2 = p \cdot (ax),$$

ſo iſt auch $(b + y)^2 = p(a + x)$,

wo übrigens, weil auch $(\beta\alpha)^2 = p(a\beta)$ oder $b^2 = pa$,

$$p = \frac{b^2}{a} \text{ iſt.}$$

Es iſt alſo $(b+y)^2 = \frac{b^2}{a}(a+x) = b^2 + \frac{b^2x}{a}$.

$$\text{und daher } y = -b + \sqrt{\left(b^2 + \frac{b^2x}{a}\right)}$$

$$y^2 = 2b^2 + \frac{b^2x}{a} - 2b\sqrt{\left(b^2 + \frac{b^2x}{a}\right)}$$

und hieraus erhält man für den Inhalt Z des durch $\alpha c y$ erzeugten Konoids

$$Z = \pi\int y^2dx = \pi\int\left(2b^2+\frac{b^2x}{a}\right)dx - 2b\pi\int dx\sqrt{\left(b^2+\frac{b^2x}{a}\right)}$$

$$= \left(2b^2x + \frac{b^2x^2}{2a}\right)\pi - 2b\pi\left(\frac{\left(b^2+\frac{b^2x}{a}\right)\sqrt{\left(b^2+\frac{b^2x}{a}\right)}}{\frac{b^2}{a}\cdot\frac{3}{2}}\right)$$

$$= b^2\left(\frac{4a+x}{2a}\right)x\pi - \frac{4a\pi}{3b}\left[\frac{b^2(a+x)}{a}\cdot b\sqrt{\left(\frac{a+x}{a}\right)}\right];$$

nämlich es iſt

$$Z = b^2\pi\left(\frac{4a+x}{2a}\right)x - \frac{4b^2\pi(a+x)}{3}\sqrt{\left(\frac{a+x}{a}\right)} + C,$$

und weil für $x = o$ auch $Z = o$ werden muß, ſo hat man

$$o = -\frac{4ab^2\pi}{3} + C, \text{ alſo } C = \frac{4ab^2\pi}{3};$$

der vollſtändige Werth von Z iſt daher

$$Z = \frac{4ab^2\pi}{3} + b^2\pi\left(\frac{4a+x}{2a}\right)x - \frac{4b^2\pi(a+x)}{3}\sqrt{\left(\frac{a+x}{a}\right)}.$$

3. Es iſt a, Fig. 78., der Scheitel des paraboliſchen Bogens $a\beta m$ und at eine Tangente an a; man ſoll den Inhalt des durch die Fläche $a\beta mt$ erzeugten Körpers beſtimmen, wenn dieſelbe um at gedreht wird.

Aufloſung. Für $ab = c\beta = x$ und $b\beta = ac = y$ iſt die Gleichung

$$x^2 = py, \text{ alſo } y^2 = \frac{x^4}{p^2}$$

und daher der Inhalt Z des Körpers

$$Z = \pi \int \frac{x^4 dx}{p^2} = \frac{\pi}{p^2} \cdot \frac{x^5}{5},$$

und weil $p^2 = \frac{x^4}{y^2}$, ſo iſt

$$Z = \frac{y^2 \pi \cdot x}{5} = \tfrac{1}{5} x \cdot y^2 \pi.$$

Da nun der Inhalt des durch $ab\beta c$ erzeugten Cylinders, wenn das Rechteck um ab ſich dreht, $= x \cdot y^2 \pi$ iſt, ſo folgt, daß das durch $a\beta m t$ erzeugte paraboliſche Konoid der fünfte Theil eines Cylinders iſt, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

4. Es dreht die Fläche $a\beta m t$, Fig. 78., ſich um mt; man ſoll den Inhalt des hierdurch erzeugten Körpers beſtimmen.

Aufloſung. Für $at = a$, $t\alpha = x$ und $\alpha\beta = y$ iſt $c\beta = a - y$, und da $(c\beta)^2 = p \cdot (ac)$; ſo iſt

$$(a - y)^2 = px,$$

alſo $y = a - \sqrt{px}$ und $y^2 = a^2 + px - 2a\sqrt{px}$; folglich iſt der Inhalt V des erzeugten Körpers

$$V = \pi \int (a^2 + px - 2ax^{\frac{1}{2}} \sqrt{p}) dx;$$

$$\text{alſo } V = \pi \left(a^2 x + \frac{px^2}{2} - \frac{2ax^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}}{\frac{3}{2}} \right)$$

$$= (a^2 x + \tfrac{1}{2} px^2 - \tfrac{4}{3} ax \sqrt{px}) \pi, \text{ wo } C = 0 \text{ iſt,}$$

und weil $px = (a - y)^2$, ſo wird

$$V = \left[a^2 x + \frac{x}{2} (a-y)^2 - \tfrac{4}{3} ax (a-y) \right] \pi$$

$$= \frac{x(a^2 + 2ay + 3y^2)\pi}{6}.$$

Um nun den Inhalt K des ganzen, durch atm erzeugten Konoids zu erhalten, muß $x = tm$, alſo $y = 0$ genommen werden, und es iſt daher dieſes Konoid

$$K = \frac{a^2 x \pi}{6}.$$

Weil aber $(dm)^2 = a^2 = p(dc) = px$, ſo iſt auch

$$K = \frac{px^2 \pi}{6}.$$

Nimmt man nun ad = x = p, ſo wird auch a = p und

$$K = \frac{p^3\pi}{6}.$$

Uebrigens geht hieraus hervor, daß in allen Fällen das durch alm, indem dieſe Fläche um at ſich dreht, erzeugte Konoid der Hälfte eines Kegels gleich iſt, der mit dem Konoid gleiche Grundfläche und Höhe hat.

5. Der Bogen aβm, Fig. 78., iſt ein elyptiſcher Quadrant, alſo tm = ad die halbe große Axe derſelben = a und at = dm die halbe kleine Axe = b; es ſoll der Inhalt des Konoids berechnet werden, welches entſteht, indem die Fläche aβmt um mt ſich dreht.

Aufløſung. Setzt man mα = x und αβ = y, ſo iſt cβ = b—y, und weil für dc = x und cδ = z die Gleichung für die Elypſe iſt

$$z^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

ſo wird hier auch $(b - y)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$,

$$\text{alſo } y = b - \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$\text{und } y^2 = b^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) - \frac{2b^2}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$= 2b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{2b^2}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

und es iſt daher der Inhalt X des Konoids durch die Gleichung beſtimmt

$$X = \pi\int\left(2b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}\right)dx - \frac{2b^2\pi}{a}\int dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$= \left(2b^2x - \frac{b^2x^3}{3a^2}\right)\pi - \frac{2b^2\pi}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{(a^2 - x^2)} + \frac{a^2}{2}\,\text{Arc tg}\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2 - x^2}\right)}\right],$$

nämlich es iſt

$$X = b^2x\left(\frac{6a^2 - x^2 - 3a\sqrt{(a^2 - x^2)}}{3a^2}\right)\pi - ab^2\pi\,\text{Arc tg}\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2 - x^2}\right)},$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil hier bereits X = o wird, wenn man x = o ſetzt.

Das ganze, durch mtaβ erzeugte Konoid wird hieraus erhalten, wenn man x = (mt) = a ſetzt, und es iſt daſſelbe daher

$$K = b^2a\left(\frac{6a^2 - a^2}{3a^2}\right)\pi - ab^2\pi \text{ Arc tg}\infty$$

$$= \frac{5ab^2}{3}\pi - ab^2\pi \times \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\text{alſo } K = ab^2\pi\left(\frac{5}{3} - \tfrac{1}{2}\pi\right) = ab^2\pi\left(\frac{10 - 3\pi}{6}\right)$$

$$= 0{,}09587 \times ab^2\pi;$$

was für b = a = R die bereits §. 124. No. 2. abgeleitete Formel für das durch den Kreisquadranten erzeugte Konoid giebt.

Anmerkung. Wenn der elyptiſche Quadrant aβm um at ſich dreht, wird eine ähnliche Formel erhalten.

6. Es iſt am, Fig. 79., ein Bogen einer Hyperbel, a der Scheitel, cab die Axe und ca = a die halbe erſte Axe derſelben; man ſoll den Inhalt des Körpers beſtimmen, welcher entſteht, wenn die Fläche camx um cx ſich dreht.

Auflöſung. Für ab = z und bm = v iſt, wie bekannt, die Gleichung für die Hyperbel

$$v^2 = \frac{b^2}{a^2}(2az + z^2) = \frac{b^2}{a^2} \cdot z\,(2a + z).$$

Setzt man nun cx = x und xm = y, ſo wird

$$v = x \text{ und } z = y - a, \text{ alſo iſt}$$

$$x^2 = \frac{b^2}{a^2}(y - a)(y + a) = \frac{b^2}{a^2}(y^2 - a^2)$$

und hieraus erhält man

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}x^2 + a^2,$$

der Inhalt des durch camx erzeugten Körpers iſt daher

$$Z = \pi\int\left(\frac{a^2x^2}{b^2} + a^2\right)dx$$

$$= \pi\left(\frac{a^2x^3}{3b^2} + a^2x\right) = a^2\pi\left(\frac{x^3}{3b^2} + x\right).$$

Hieraus findet man für die gleichſeitige Hyperbel alſo, wenn a = b iſt,

$$Z = \pi(\tfrac{1}{3}x^3 + a^2x) = \left(\frac{x^2 + 3a^2}{3}\right)x\pi,$$

und es wird daher nun für $x = a$

$$Z = \frac{4a^3\pi}{3},$$

der Inhalt des Körpers iſt alſo in dieſem Falle dem einer Kugel gleich, deren Radius $= a$ iſt.

§. 126.

Von einigen, durch andere Curven erzeugten Körpern.

1. Für die Ciſſoide ard, Fig. 75. iſt, wenn $am = x$ und $rm = y$ geſetzt wird, die Gleichung, nach §. 120. No. 2.,

$$y^2 = \frac{x^3}{D-x} = \frac{D^3}{D-x} - (x^2 + Dx + D^2).$$

Der Inhalt des Körpers, welcher entſteht, wenn die Fläche arde um ac ſich dreht, iſt daher

$$Z = \pi\int\left(\frac{D^3}{D-x} - (x^2 + Dx + D^2)\right)dx$$

$$= D^3\pi\int\frac{dx}{D-x} - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{Dx^2}{2} + D^2x\right)\pi,$$

und weil $\int\frac{dx}{D-x} = -\log(D-x)$, ſo iſt

$$Z = -D^3\pi\log(D-x) - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{Dx^2}{2} + D^2x\right)\pi + C.$$

Da aber $Z = o$ werden muß für $x = o$, ſo iſt

$$C = D^3\pi\log D,$$

und daher iſt der vollſtändige Werth für den Inhalt des Konoids

$$Z = D^3\pi[\log D - \log(D-x)] - \left(\frac{2x^3 + 3Dx^2 + 6D^2x}{6}\right)\pi$$

$$= D^3\pi\log\left(\frac{D}{D-x}\right) - \left[\frac{2x^2 + 3Dx + 6D^2}{6}\right]x\pi,$$

und für $x = ac = \frac{1}{2}D$ wird hieraus

$$Z = D^3\pi\log 2 - \frac{2D^3\pi}{3} = D^3\pi\left[\frac{3\log 2 - 2}{3}\right].$$

2. Das Viereck Aayx, Fig. 74., von welchem die eine Seite ay eine logarithmiſche Linie iſt, und wo Aa und xy

normal auf Ax ſind, dreht ſich um Ax; es ſoll der Inhalt des hierdurch erzeugten Körpers angegeben werden.

Aufloͤſung. Für Aa = a, AB = BC = b, Bb = aq, Ax = x und xy = y iſt, nach §. 120. No. 1., die Gleichung für die logarithmiſche Linie

$$y = aq^{\frac{x}{b}}$$

und es iſt daher $y^2 = a^2 q^{\frac{2x}{b}}$;

alſo der Inhalt des erzeugten Körpers

$$X = a^2\pi \int dx q^{\frac{2x}{b}},$$

oder, für $\frac{2x}{b} = z$, alſo $dx = \frac{b}{2} dz$,

$$X = \frac{a^2 b\pi}{2} \int dz \cdot q^z.$$

Da nun allgemein iſt $\int dz \cdot q^z = \frac{1}{\log q} \cdot q^z$, ſo iſt auch

$$X = \frac{q^z}{\log q} \cdot \frac{a^2 b\pi}{2} + C$$

$$= \frac{1}{\log q} \cdot q^{\frac{2x}{b}} \cdot \frac{a^2 b\pi}{2} + C,$$

und weil für x = o auch X = o werden muß, ſo iſt

$$o = \frac{a^2 b\pi}{2 \log q} + C, \text{ und daher } C = -\frac{a^2 b\pi}{2 \log q},$$

und es iſt hiernach der vollſtändige Werth von

$$X = \left(\frac{q^{\frac{2x}{b}} - 1}{2 \log q}\right) \cdot a^2 b\pi.$$

Zuſatz. Für q = o wird der Coefficient

$$\frac{q^{\frac{2x}{b}} - 1}{2 \log q} = \frac{o}{o};$$

es iſt alſo der wahre Werth dieſes Ausdruckes

$$= \frac{d\left(q^{\frac{2x}{b}} - 1\right)}{2d \log q},$$

wobei q als die veränderliche Größe angeſehen werden muß, und es iſt daher hier

$$\frac{o}{o} = \frac{\frac{2x}{b} \cdot q^{\frac{2x}{b}-1} dq}{\frac{2dq}{q}} = \frac{x}{b} q^{\frac{2x}{b}} = \frac{x}{b}$$

für q = 1; folglich iſt für q = 1

$$X = a^2 x\pi,$$

wie ſich von ſelbſt verſteht, da in dieſem Falle die den Körper erzeugende Fläche ein Rechteck iſt, und alſo der Körper ſelbſt ein Cylinder, der a zum Radius der Grundfläche hat, und deſſen Höhe = x iſt.

3. Die Linie kx, Fig. 80., wird normal von der Linie ca in b geſchnitten, und es iſt die Größe der Stücke cb = a, und ba = R gegeben. Durch a iſt eine Curve gezogen, deren Geſetz dadurch beſtimmt iſt, daß, wenn man von c aus eine gerade Linie cy an irgend einen Punkt y der Curve zieht, immer my = ab = R iſt. Es ſoll der Inhalt des Körpers beſtimmt werden, welcher entſteht, wenn das rechtwinklige Trapez abxy, von welchem die obere Seite ay ein Bogen der Curve iſt, um bx ſich dreht.

Auflöſung. Setzt man bx = x und xy = y, ſo läßt ſich die Gleichung für dieſe Curve, welche die Conchoide oder Muſchellinie genannt wird, auf folgende Art auffinden: Es iſt

$$cb : bm = xy : xm,$$

und daher, wenn man xm = z, alſo bm = x − z ſetzt,

$$a : x - z = y : z,$$

und hieraus folgt $z = \frac{xy}{a+y}$.

Da nun $(mx)^2 + (xy)^2 = (my)^2$,

ſo iſt auch $z^2 + y^2 = R^2$,

alſo $\frac{x^2y^2}{(a+y)^2} = R^2 - y^2$,

und hieraus erhält man

$$x = \left(\frac{a+y}{y}\right) \sqrt{(R^2-y^2)}.$$

Hiernach iſt $dx = -\frac{a(R^2+y^3)dy}{y^2\sqrt{(R^2-y^2)}}$

Da nun der Inhalt des erzeugten Körpers X ausgedrückt wird durch

$$X = \pi \int y^2 dx,$$

ſo iſt auch, wenn man für dx den gefundenen Werth ſetzt,

$$X = -\pi \int \frac{(aR^2 + y^2)dy}{\sqrt{(R^2 - y^2)}}$$

$$= -aR^2\pi \int \frac{dy}{\sqrt{(R^2-y^2)}} - \pi \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(R^2-y^2)}}.$$

Nun iſt nach Meier Hirſch's Integraltafeln, Taf. 42.,

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{2a}{3b^2}\right)\sqrt{X}, \text{ für } X = a + bx^2$$

und es iſt daher auch

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(R^2-y^2)}} = -\left(\frac{y^2}{3} + \frac{2R^2}{3}\right)\sqrt{(R^2-y^2)}$$

$$\text{und} \int \frac{dy}{\sqrt{(R^2-y^2)}} = \text{Arc sin} \frac{y}{R}; \text{ folglich iſt auch}$$

$$X = -aR^2\pi \,\text{Arc sin} \frac{y}{R} + \left(\frac{y^2+2R^2}{3}\right)\pi \sqrt{(R^2-y^2)} + C,$$

und weil X = o werden muß, wenn man y = ab = R ſetzt, ſo wird auch

$$o = -aR^2\pi \,\text{Arc sin}\, 1 + C,$$

und daher iſt $C = aR^2\pi \cdot \frac{1}{2}\pi$, alſo wird

$$X = \left(\tfrac{1}{2}\pi - \text{Arc sin}\frac{y}{R}\right)aR\pi^2 + \left(\frac{y^2+2R^2}{3}\right)\pi\sqrt{(R^2-y^2)}.$$

Nun folgt aber, wenn $z = \sin \varphi$, auch $z = \cos(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$, alſo iſt, wenn $\text{Arc sin}\, z = \varphi$, $\text{Arc cos}\, z = \frac{1}{2}\pi - \varphi$, und daher $\text{Arc cos}\, z = \frac{1}{2}\pi - \text{Arc sin}\, z$.

Man kann alſo auch für $\frac{1}{2}\pi - \text{Arc sin}\frac{y}{R}$ ſetzen $\text{Arc cos}\frac{y}{R}$; folglich iſt auch

$$X = aR^2\pi \,\text{Arc cos} \frac{y}{R} + \left(\frac{y^2+2R^2}{3}\right)\pi\sqrt{(R^2-y^2)}.$$

§. 127.

Von den ringförmigen Körpern.

Die Lage der Curven αmn und αMN, Fig. 81., zu der unverrückbaren Axe apq iſt gegeben; man ſoll den Inhalt des Körpers beſtimmen, welcher erzeugt wird, wenn nmαMN

um aq ſich dreht, ſo daß hierbei die Entfernungen $a\alpha$, qn und nN unverändert bleiben: es ſoll alſo der Inhalt des bei der Umdrehung von $n\alpha N$ um aq gebildeten ringförmigen Körpers beſtimmt werden.

Aufloſung. Setzt man $ap = x$, $pm = y$ und den bei der Umdrehung um aq von der Fläche apma beſchriebenen Körper $= v$, ſo iſt

$$v = \pi \int y^2 dx$$

und eben ſo iſt für $pM = Y$ der bei der Umdrehung um aq von der Fläche $\alpha pM\alpha$ beſchriebene Körper

$$V = \pi \int Y^2 dx.$$

Wird nun v von V abgezogen, ſo bleibt der ringförmige von $m\alpha M$ bei der Umdrehung um aq beſchriebene Körper übrig, und es iſt derſelbe daher

$$V - v = \pi\,[\int Y^2 dx - \int y^2 dx].$$

Um dieſes durch ein Beiſpiel zu erläutern, nehme man an, es ſei $n\alpha N$ ein Halbkreis, der Radius $c\alpha$ desſelben $= \varrho$ und die gegebene Entfernung des Mittelpunktes c von der Axe, alſo $cq, = a\alpha = a$,

ſo iſt, für $ap = \alpha\mu = x$ und $pm = y$, $m\mu = a - y$,

und weil $(m\mu)^2 = (\alpha\mu) \times (2\alpha c - \alpha\mu) = x\,(2\varrho - x)$.

ſo iſt auch $(a - y)^2 = 2\varrho x - x^2$

und daher $y = a - \sqrt{(2\varrho x - x^2)}$

$$y^2 = a^2 + 2\varrho x - x^2 - 2a\sqrt{(2\varrho x - x^2)}.$$

Ferner iſt, für die Ordinate $pM = Y$, $M\mu = Y - a$

und daher $(Y - a)^2 = 2\varrho x - x^2$,

woraus erhalten wird

$$Y = a + \sqrt{(2\varrho x - x^2)}$$

und $Y^2 = a^2 + 2\varrho x - x^2 + 2a\sqrt{(2\varrho x - x^2)}$,

hiernach iſt

$$\int Y^2 dx = \int (a^2 + 2\varrho x - x^2) dx + 2a \int dx \sqrt{(2\varrho x - x^2)}$$

$$\int y^2 dx = \int (a^2 + 2\varrho x - x^2) dx - 2a \int dx \sqrt{(2\varrho x - x^2)}.$$

Werden dieſe beiden Ausdrücke von einander abgezogen, ſo erhält man

$$\int Y^2 dx - \int y^2 dx = 4a \int dx\, \sqrt{(2\varrho x - x^2)},$$

und es iſt daher der geſuchte Inhalt des ringförmigen Körpers

$$V - v = 4a\pi \int dx\, \sqrt{(2\varrho x - x^2)}.$$

Nach Meier Hirſch's Integraltafeln, Taf. 53., iſt

$$\int dx\,\sqrt{X} = \left(\frac{x}{2} + \frac{a}{4b}\right)\sqrt{X} - \frac{a^2}{8b}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

für $X = ax + bx^2$, und da hier $X = 2\varrho x - x^2$,

ſo iſt $a = 2\varrho$ und $b = -1$, alſo

$$\int dx\,\sqrt{(2\varrho x - x^2)} = \left(\frac{x}{2} - \frac{\varrho}{2}\right)\sqrt{(2\varrho x - x^2)} + \frac{\varrho^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(2\varrho x - x^2)}}$$

und es iſt daher auch

$$V - v = 2a\pi(x - \varrho)\sqrt{(2\varrho x - x^2)} + 2a\varrho^2\pi\int\frac{dx}{\sqrt{(2\varrho x - x^2)}}.$$

Nach Meier Hirſch's Integraltafeln, pag. 163., aber iſt

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(2\varrho x - x^2)}} = 2\,\mathrm{Arc\ tg}\sqrt{\left(\frac{x^2}{2\varrho x - x^2}\right)},$$ alſo iſt endlich

$$V - v = 2a\pi(x - \varrho)\sqrt{(2\varrho x - x^2)} + 4a\varrho^2\pi\,\mathrm{Arc\ tg}\sqrt{\left(\frac{x^2}{2\varrho x - x^2}\right)}.$$

Wo keine Conſtante hinzukommt, da der Ausdruck $= 0$ wird, wenn man $x = 0$ ſetzt, wie es ſein muß.

Um hieraus die Formel für den durch den Halbkreis $n\alpha N$ beſchriebenen Körper zu erhalten, muß man $x = aq = \alpha c = \varrho$ ſetzen und die Formel giebt für dieſen Werth von x

$$V - v = 4a\varrho^2\pi \cdot \mathrm{Arc\ tg}\ 1,$$

und weil $1 = \mathrm{tg}\ 45^0$, ſo iſt $\mathrm{Arc\ tg}\ 1 = \frac{1}{4}\pi$

und daher

$$V - v = a\varrho^2\pi \cdot \pi = a\pi \cdot \varrho^2\pi;$$

der durch einen ganzen Kreis beſchriebene Ring iſt daher

$$R = 2a\pi \times \varrho^2\pi.$$

Nun iſt aber $2a\pi$ der Umfang des mit dem Radius qc beſchriebenen Kreiſes und $\varrho^2\pi$ die Fläche des Kreiſes, durch welche der Ring erzeugt wird: der Inhalt des durch den ganzen Kreis beſchriebenen Ringes iſt alſo einem Cylinder gleich, der die erzeugende Kreisfläche zur Grundfläche hat, und deſſen Höhe der durch den Punkt c bei der Umdrehung um aq beſchriebenen Kreislinie gleich iſt.

Zuſatz 1. Der Inhalt v des durch die Fläche $apm\alpha$ beſchriebenen Körpers wird durch die Formel ausgedrückt

$$v = \pi\int(a^2 + 2\varrho x - x^2)\,dx - 2a\int dx\,\sqrt{(2\varrho x - x^2)}$$

$$= \pi\left(a^2x + \varrho x^2 - \frac{x^3}{3}\right) - 2a\int dx\,\sqrt{(2\varrho x - x^2)}.$$

Der von dem Rechteck ap$\mu\alpha$ beſchriebene Cylinder hat einen Inhalt $X = a^2x\pi$.

Wird hiervon v abgezogen, ſo bleibt

$$X - v = -x^2\pi\left(\varrho - \frac{x}{3}\right) + 2a\int dx\,\sqrt{(2\varrho x - x^2)}$$

als der Inhalt des Körpers, welchen die Fläche $am\mu$ beſchreibt. Da ferner

$$V = \pi\left(a^2x + \varrho x^2 - \frac{x^3}{3}\right) + 2a\int dx\,\sqrt{(2\varrho x - x^2)}$$

und $X = a^2x\pi$, ſo iſt

$$V - X = x^2\pi\left(\varrho - \frac{x}{3}\right) + 2a\int dx\,\sqrt{(2\varrho x - x^2)}$$

der Inhalt des Körpers, welchen die Fläche $\alpha M\mu$ beſchreibt. Setzt man alſo den durch $\alpha M\mu$ beſchriebenen Körper = Z und den durch $am\mu$ beſchriebenen = z, ſo iſt

$$Z - z = 2x^2\pi\left(\varrho - \frac{x}{3}\right)$$

und für $x = (aq) = (\alpha c) = \varrho$ wird hieraus

$$Z - z = \frac{4\varrho^3\pi}{3}.$$

Dreht ſich alſo der Halbkreis $n\alpha N$ um aq, ſo iſt der Unterſchied zwiſchen der äußeren Hälfte des ringförmigen Körpers, welcher von dem Quadranten $\alpha c N$ beſchrieben wird, und der innern Hälfte, den der Quadrant $\alpha c n$ beſchreibt, der mit demſelben Radius ϱ beſchriebenen Kugel gleich.

Zuſatz 2. In Beziehung auf den durch einen Kreisbogen $m\alpha M$ beſchriebenen ringförmigen Körper verdient hier noch angeführt zu werden:

1. Der Inhalt des durch $m\alpha M$ beſchriebenen Körpers wird nach dieſem §. durch die Formel ausgedrückt

$$V - v = 2a\pi(x-\varrho)\sqrt{(2\varrho x - x^2)} + 4a\varrho^2\pi\,\mathrm{Arc\,tg}\sqrt{\left(\frac{x^2}{2\varrho x - x^2}\right)};$$

es iſt hier der Werth von a ganz beliebig, und es kommt dieſe Größe allgemein als Factor vor, woraus zugleich hervorgeht, daß der Inhalt des Körpers proportionirt mit a wächſt.

2. Nimmt man nun $a = \varrho$, iſt alſo die Tangente an dem Punkte n die Axe, ſo wird

V – v

$$V - v = 2\varrho\pi(x-\varrho)\sqrt{(2\varrho x - x^2)} + 4\varrho^3\pi \operatorname{Arc tg} \sqrt{\left(\frac{x^2}{2\varrho x - x^2}\right)}$$

und für $x = \varrho$ wird

$$V - v = 4\varrho^3\pi \cdot \tfrac{1}{4}\pi = \varrho^3\pi \times \pi.$$

Die Halbkugel iſt $\frac{2\varrho^3\pi}{3} = G$ und es findet daher die Proportion ſtatt

$$G : V - v = \frac{2}{3} : \pi = 2 : 3\pi.$$

3. Die allgemeine im vorigen § gefundene Formel wird für $x = \alpha\mu = h$, wenn man den durch $m\alpha M$ beſchriebenen Körper $= A$ ſetzt,

$$A = 2a\pi(h-\varrho)\sqrt{(2\varrho h - h^2)} + 4a\varrho^2\pi \operatorname{Arc tg} \sqrt{\left(\frac{h^2}{2\varrho h - h^2}\right)}.$$

Geht nun die Axe aq durch den Punkt m, iſt alſo bmk die Axe, ſo wird

$$a = m\mu = \sqrt{(2\varrho h - h^2)},$$

alſo iſt der Inhalt des durch $m\alpha M$, indem dieſe Fläche um kb ſich dreht, beſchriebenen Körpers

$$A = -2(\varrho - h)(2\varrho h - h^2)\pi + 4\varrho^2\pi \sqrt{(2\varrho h - h^2)} \times \operatorname{Arc tg} \sqrt{\left(\frac{h^2}{2\varrho h - h^2}\right)},$$

ein Ausdruck, der ebenfalls für $h = \varrho$ giebt

$$A = \varrho^3\pi \times \pi,$$

wie in No. 2. gefunden worden iſt.

4. Wird zu dem, in No. 3., gefundenen Ausdrucke der Inhalt des Körpers addirt, welcher von der Fläche mbNM erzeugt wird, indem dieſelbe um mb ſich dreht, ſo erhält man den Inhalt des ganzen durch $m\alpha$MNb bei der Umdrehung um kb gebildeten Körpers, welcher in der Anmerkung zu §. 124. angeführt iſt. Uebrigens läßt ſich die Formel für dieſen Körper auch unmittelbar aus der allgemeinen, im gegenwärtigen §. aufgefundenen Formel ableiten.

§. 128.

Einige allgemeine Eigenſchaften der ringförmigen Körper.

1. Die Formel $V - v = \pi\,[\int Y^2 dx - \int y^2 dx]$ hat in allen Fällen Gültigkeit, was auch αmn und αMN

für Curven ſein mögen. Nimmt man nun an, daß αMN ein Schenkel einer Parabel iſt, die ihren Scheitel in α hat, ſo iſt für (ap) = $(\alpha\mu)$ = x, $\mu M = \sqrt{px}$ und alſo $Y = a + (\mu M) = a + \sqrt{px}$, folglich iſt

$$Y^2 = a^2 + px + 2a\sqrt{px},$$

$$\text{und daher } V = \pi \int (a^2 + px + 2ap^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}})\, dx$$

$$= \left(a^2x + \frac{px^2}{2} + \frac{4ap^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\pi,$$

$$= \left(a^2x + \frac{x \cdot px}{2} + \frac{4ax\sqrt{px}}{3}\right)\pi$$

und wenn nun auch αmn ein Schenkel der Parabel iſt, ſo wird $y = (pm) = a - \sqrt{px}$, und man findet hieraus

$$v = \left(a^2x + \frac{x \cdot px}{2} - \frac{4ax\sqrt{px}}{3}\right)\pi;$$

hieraus folgt nun

$$V - v = \frac{8ax\sqrt{px}}{3}\pi;$$

weil aber $\sqrt{px} = \mu M = \mu m$, ſo iſt, wenn man dieſe Linie = z ſetzt

$$V - v = \frac{8axz}{3}\pi = 2a\pi \times \tfrac{4}{3}xz.$$

Es iſt aber $\frac{4}{3}$ xz die Fläche des paraboliſchen Abſchnitts $m\alpha M$; der Inhalt des durch dieſen Abſchnitt erzeugten Körpers, indem er ſich um aq dreht, iſt alſo einem Cylinder gleich, der den Abſchnitt $m\alpha M$ zur Grundfläche hat, und deſſen Höhe dem Umfange des Kreiſes gleich iſt, der mit dem Radius $a\alpha$ = a beſchrieben werden kann.

2. Die in No. 1. gefundene Regel für den Inhalt des durch einen paraboliſchen Abſchnitt beſchriebenen Körpers, iſt der, bereits §. 127., für den Kreisabſchnitt gefundenen gleich, und es wird nun nicht ſchwer ſein nachzuweiſen, daß dieſe Regel in allen Fällen Gültigkeit hat, wenn αmn und αMN zwei congruente Bogen irgend einer Curve ſind, ſo daß für jeden Werth von $\alpha\mu$ = x immer $\mu M = \mu m$ iſt. Man ſetze $\mu M = \mu m = z = f(x)$, ſo iſt

$$(pM) = Y = a + z \text{ und } (pm) = y = a - z,$$

folglich iſt

$$V = \pi \int (a + z)^2 dx \text{ und } v = \pi \int (a - z)^2 dx,$$

nämlich es iſt

$$V = \pi \int (a^2 + z^2)\, dx + 2a\pi \int z dx$$

$$\text{und } v = \pi \int (a^2 + z^2) dx - 2a\pi \int z dx$$

und hieraus folgt

$$V - v = 4a\pi \int z dx.$$

Nun iſt aber, nach §. 108., für $\mu M = z$ der Ausdruck $\int z dx$ die Formel für die Fläche $\alpha\mu M$, und es iſt daher $2\int z dx$ der Ausdruck für die Fläche $m\alpha M$; folglich iſt, wenn man dieſe Fläche mit Z bezeichnet,

$$V - v = 2a\pi \cdot Z,$$

nämlich der durch $m\alpha M$ beſchriebene ringförmige Körper iſt einem Cylinder gleich, welcher $m\alpha M$ zur Grundfläche hat und deſſen Höhe $= 2a\pi$ dem Umfange des mit a beſchriebenen Kreiſes gleich iſt.

3. Werden die beiden durch $\alpha\mu M$ und $\alpha\mu m$ beſchriebenen Körper mit einander verglichen, ſo erhält man für die Differenz beider, von welchen der erſte der äußere und der andere der innere genannt werden kann, ebenfalls eine allgemein geltende Regel. Nämlich es iſt der durch $\alpha a p M$ beſchriebene Körper V für $ap = x$ und $pM = Y$ durch die Gleichung beſtimmt

$$V = \pi \int Y^2 dx$$

und es iſt daher auch, wenn man $\mu M = \mu m = z$ ſetzt, alſo

$$Y = a + z,$$

$$V = \pi \int (a^2 + 2az + z^2) dx$$

$$\text{oder } V = a^2 x\pi + 2a\pi \int z dx + \pi \int z^2 dx.$$

Da nun der durch $ap\mu\alpha$ beſchriebene Körper

$$X = a^2 x\pi,$$

ſo iſt der durch $\alpha\mu m$ beſchriebene Körper =

$$V - X = 2a\pi \int z dx + \pi \int z^2 dx.$$

Der durch $\alpha a p m$ beſchriebene Körper v iſt für $pm = y$

$$v = \pi \int (a - z)^2 dx$$

$$= a^2 x\pi - 2a\pi \int z dx + \pi \int z^2 dx,$$

$$\text{und da } X = a^2 x\pi,$$

ſo iſt der von $\alpha\mu m$ beſchriebene Körper =

$$X - v = 2a\pi \int z dx - \pi \int z^2 dx.$$

Bezeichnet man alſo den innern Theil des ringförmigen Körpers mit u und den äußern mit U, ſo iſt

$$U = 2a\pi \int zdx + \pi \int z^2dx$$

$$\text{und } u = 2a\pi \int zdx - \pi \int z^2dx$$

und es iſt daher die Differenz beider

$$U - u = 2\pi \int z^2dx.$$

Da nun $z = \mu M = \mu m$ und $\alpha\mu = x$, ſo iſt $\pi \int z^2dx$ der Inhalt des Körpers, welcher gebildet wird, wenn $\alpha\mu M$ oder $\alpha\mu m$ um $\alpha\mu$ ſich dreht, und dieſer Körper, zweimal genommen, giebt die Differenz zwiſchen der äußern und der innern Hälfte des ringförmigen Körpers; dieſe Differenz iſt aber von der Größe $a\alpha = a$ ganz unabhängig.

Zuſatz. Wenn die Curve $m\alpha M$ um die Axe aq gedreht wird, aber nicht ſo lange, daß die den Körper erzeugende Fläche wieder in ihre vorige Lage kommt, ſo wird nur ein Theil des Ringes erzeugt, alſo ein nicht geſchloſſener Ring, und es iſt der Inhalt deſſelben immer dem von der Linie $a\alpha$ beſchriebenen Bogen oder, was daſſelbe iſt, dem Winkel proportionirt, welchen dieſe Linie in ihrer neuen Lage mit der früheren bildet. Iſt der von $a\alpha$ durchlaufene Bogen $= \varphi^0$ und man ſetzt den dadurch erzeugten Körper = T, während der vollſtändige Ring = R iſt, ſo findet die Proportion ſtatt

$$R : T = 360^0 : \varphi^0,$$

$$\text{und es iſt daher } T = \frac{\varphi}{360^0} \cdot R.$$

§. 129.

Von der krummen Oberfläche der durch Axendrehung erzeugten Körper.

Zieht man, Fig. 82., an irgend einen Punkt m der Curve amc eine Tangente, die Ordinate mb ſenkrecht auf die Axe ac und βn parallel zu dieſer Linie, ſo beſchreibt bei der Umdrehung der Curve um ac das von bm, βn, bβ und dem Theile mn der Tangente gebildete Paralleltrapez einen abgeſtumpften Kegel und es iſt die krumme Oberfläche deſſelben, wie bekannt,

$$= (bm + \beta n)\,\pi \cdot (mn).$$

Iſt nun ab = x, bm = y und $b\beta = \Delta x$, ſo iſt für einen

kleinen Werth von Δx die Linie βn nicht verſchieden von $y + \Delta y$ und es iſt daher in dieſem Falle

$$(mn)^2 = (\beta n - bm)^2 + (b\beta)^2$$
$$= (\Delta y)^2 + (\Delta x)^2,$$

alſo iſt jetzt die krumme Oberfläche des abgeſtumpften Kegels

$$= \pi\,(2y + \Delta y)\,\sqrt{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)}$$
$$= \pi\,(2y + \Delta y)\,\Delta x\,\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)}$$
$$= \pi\,(2y + \Delta y)\,\Delta x\,\sqrt{(1 + m^2)}$$

wenn $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$ geſetzt wird.

Weil aber $b\beta = \Delta x$ ſehr klein ſein ſoll, ſo fällt der Theil mn der Tangente mit der Curve zuſammen, und es gilt der gefundene Ausdruck daher auch für die krumme Oberfläche der durch $b\beta$nm beſchriebenen Scheibe des Konoids, von welchem amec die erzeugende Fläche iſt; es iſt daher, wenn die ganze krumme Oberfläche des Konoids = Z geſetzt wird,

$$\Delta Z = \pi\,(2y + \Delta y)\,\Delta x\,\sqrt{(1 + m^2)},$$

alſo $\frac{\Delta Z}{\Delta x} = 2y\pi\,\sqrt{(1 + m^2)} + \pi\Delta y\,\sqrt{(1 + m^2)}$

und weil in allen Fällen $\Delta y = P\Delta x$ geſetzt werden kann, wo P irgend eine Function von x und Δx ſein wird,

$$\frac{\Delta Z}{\Delta x} = 2y\pi\,\sqrt{(1 + m^2)} + P\pi\Delta x\,\sqrt{(1 + m^2)},$$

und man erhält hieraus für $\Delta x = o$

$$\frac{dZ}{dx} = 2y\pi\,\sqrt{(1 + m^2)} = 2y\pi\,\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)},$$

folglich iſt $dZ = 2y\pi dx\,\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$,

und alſo die ganze krumme Oberfläche des Konoids

$$Z = 2\pi \int y dx\,\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}.$$

§. 130.

Erläuterungen.

1. Es iſt, Fig. 78., ad die Axe, a der Scheitel und aβm ein Bogen der Parabel; es ſoll die krumme Oberfläche

des Konoids berechnet werden, welches entſteht, wenn $a\beta m$ um die Axe ad gedreht wird.

Hier iſt für $ac = x$ und $c\beta = y$ die Gleichung

$$y^2 = px, \text{ alſo } 2ydy = pdx,$$

$$\text{und daher } \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}, \text{ folglich iſt}$$

$$Z = 2\pi \int ydx \sqrt{\left(1 + \frac{p^2}{4y^2}\right)}$$

$$= \pi \int dx \sqrt{(4y^2 + p^2)} = \pi \int dx \sqrt{(4px + p^2)},$$

nämlich es iſt

$$Z = \pi \int dx \sqrt{(p^2 + 4px)}.$$

$$\text{Nun iſt } \int dx \sqrt{(p^2 + 4px)} = \frac{\sqrt{(p^2 + 4px)^3}}{6p},$$

$$\text{alſo } Z = \frac{(p^2 + 4px)\ \pi \sqrt{(p^2 + 4px)}}{6p} + C.$$

$$= \left(\frac{p + 4x}{6}\right) \pi \sqrt{(p^2 + 4px)}\ C.$$

Es muß aber $Z = 0$ werden, wenn man $x = 0$ ſetzt, alſo iſt

$$0 = \frac{p^2\pi}{6} + C, \text{ und daher } C = -\frac{p^2\pi}{6}.$$

Die krumme Oberfläche des paraboliſchen Konoids iſt daher

$$Z = \left(\frac{p + 4x}{6}\right) \pi \sqrt{(p^2 + 4px)} - \frac{p^2\pi}{6},$$

wo noch für p der Werth $= \frac{y^2}{x}$ ſubſtituirt werden kann.

Für $x = 2p$ erhält man die Oberfläche

$$Z = \frac{13}{3} p^2\pi.$$

2. Die Gleichung für die Elypſe iſt

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

$$\text{und es iſt daher } 2ydy = \frac{b^2}{a^2}(2a - 2x)\,dx,$$

$$\text{alſo } \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a - x}{y}\right)$$

$$\text{und } 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{(a-x)^2}{y^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(a-x)^2}{2ax - x^2}$$

$$= \frac{a^2(2ax - x^2) + b^2(a^2 - 2ax + x^2)}{a^2(2ax - x^2)}$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)(2ax - x^2) + a^2b^2}{\frac{a^4y^2}{b^2}}$$

und es iſt hiernach für $a^2 - b^2 = c^2$

$$\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = \frac{b}{a^2y} \sqrt{(a^2b^2 + 2ac^2x - c^2x^2)},$$

folglich iſt $Z = \frac{2b\pi}{a^2} \int dx \sqrt{(a^2b^2 + 2ac^2x - c^2x^2)}$.

Nun iſt nach Meier Hirſch's Integraltafeln, Taf. 73.,

$$\int dx\sqrt{X} = \int dx \sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} = \frac{(2\gamma x+\beta)\sqrt{X}}{4\gamma} + \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{8\gamma} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

und, nach Seite 183., für einen negativen Werth von γ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{Arc\,tg} \left(\frac{2\gamma x - \beta}{2\sqrt{\gamma X}}\right).$$

Es iſt daher auch für $X = \alpha + \beta x - \gamma x^2$

$$\int dx \sqrt{X} = \frac{(2\gamma x - \beta)\sqrt{X}}{4\gamma} + \frac{4\alpha\gamma + \beta^2}{8\gamma\sqrt{\gamma}} \operatorname{Arc\,tg} \left(\frac{2\gamma x - \beta}{2\sqrt{\gamma X}}\right).$$

In dem gegenwärtigen Falle iſt

$\alpha = a^2b^2$, $\beta = 2ac^2$ und $\gamma = c^2$, alſo wird

$$\int dx\sqrt{X} = \frac{(2c^2x-2ac^2)\sqrt{X}}{4c^2} + \frac{4a^2b^2c^2+4a^2c^4}{8c^3} \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{2c^2x-2ac^2}{2c\sqrt{X}}\right)$$

$$= \left(\frac{x-a}{2}\right)\sqrt{X} + \frac{a^2(b^2+c^2)}{2c} \operatorname{Arc\,tg} \left(\frac{c(x-a)}{\sqrt{X}}\right).$$

Die Oberfläche des elyptiſchen Konoids iſt folglich

$$Z = \frac{2b\pi}{a^2}\left[\left(\frac{x-a}{2}\right)\sqrt{X} + \frac{a^4}{2c} \operatorname{Arc\,tg} \left(\frac{c(x-a)}{\sqrt{X}}\right)\right] + C$$

$$= \frac{b\pi(x-a)}{a^2} \sqrt{(a^2b^2 + c^2(2ax - x^2))} +$$

$$\frac{a^2b\pi}{c} \operatorname{Arc\,tg} \left(\frac{c(x-a)}{\sqrt{(a^2b^2 + c^2(2ax - x^2))}}\right) + C.$$

Da nun für $x = 0$ auch $Z = 0$ ſein muß, ſo iſt

$$0 = -\frac{ab\pi}{a^2} \cdot ab + \frac{a^2b\pi}{c} \operatorname{Arc\,tg} \left(\frac{-ac}{ab}\right) + C,$$

$$\text{alſo } C = b^2\pi + \frac{a^2b\pi}{c} \operatorname{Arc\,tg} \frac{c}{b}.$$

Für $x = a$ giebt Z die Größe der krummen Oberfläche des

durch Umdrehung des elyptiſchen Quadranten um die halbe große Axe entſtehenden Konoids: nämlich es iſt für dieſen Fall, weil der erſte Theil der Formel den Factor $x - a = o$ enthält und der andere Theil $\text{Arc tg } o = o$, $Z = \text{Const.}$; alſo

$$Z = b^2\pi + \frac{a^2 b\pi}{c} \text{Arc tg} \frac{c}{b}$$

$$= b^2\pi + \frac{a^2 b\pi}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \text{Arc tg} \left(\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{b}\right).$$

Auf gleiche Weiſe läßt ſich auch die krumme Oberfläche des elypſoidiſchen Körpers berechnen, welcher entſteht, wenn der elyptiſche Quadrant um die halbe kleine Axe ſich dreht.

Anmerkung. Wenn in einem beſonderen Falle $b = c$, alſo $a^2 = b^2 + c^2 = 2b^2$, ſo iſt die krumme Oberfläche des Körpers, welcher entſteht, wenn der elyptiſche Quadrant um die halbe große Axe ſich dreht, =

$$\frac{a^2}{2}\pi + a^2\pi \cdot \tfrac{1}{4}\pi = a^2\pi\left(\frac{2+\pi}{4}\right) = b^2\pi\left(\frac{2+\pi}{2}\right).$$

3. Soll die krumme Oberfläche des durch den Halbkreis $n\alpha N$, Fig. 81., erzeugten ringförmigen Körpers, welcher entſteht, wenn die Fläche ſich um die Axe aq dreht, berechnet werden, und man ſetzt $ap = x$, $pm = y$, $pM = Y$, $a\alpha = p\mu = a$ und den Radius des Kreiſes $= R$, ſo iſt

$$y = a - \sqrt{(2Rx - x^2)} \text{ und } Y = a + \sqrt{(2Rx - x^2)},$$

$$\text{hiernach iſt } \frac{dy}{dx} = -\frac{(R - x)}{\sqrt{(2Rx - x^2)}}$$

$$\text{und } 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{(R - x)^2}{2Rx - x^2} = \frac{R^2}{2Rx - x^2}.$$

Da nun, wenn die krumme Oberfläche des durch den Quadranten $\alpha m n$ erzeugten Körpers $= v$ geſetzt wird, die Gleichung ſtatt findet

$$v = 2\pi \int y dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$

ſo iſt hier

$$v = 2\pi \int \frac{R y dx}{\sqrt{(2Rx - x^2)}}$$

und man findet auf gleiche Weiſe, wenn der durch den Quadranten αMN erzeugte ringförmige Körper eine krumme Oberfläche $= V$ hat,

$$V = 2\pi \int \frac{RYdx}{\sqrt{(2Rx-x^2)}}$$

und es iſt daher, weil

$$Y = a + \sqrt{(2Rx-x^2)} \text{ und } y = a - \sqrt{(2Rx-x^2)}$$

$$V = 2aR\pi \int \frac{dx}{\sqrt{(2Rx-x^2)}} + 2Rx\pi$$

$$\text{und} \quad v = 2aR\pi \int \frac{dx}{\sqrt{(2Rx-x^2)}} - 2Rx\pi$$

und hieraus folgt

$$V+v = 4aR\pi \int \frac{dx}{\sqrt{(2Rx-x^2)}}$$

$$= 4aR\pi \times 2 \operatorname{Arctg} \sqrt{\left(\frac{x}{2R-x}\right)} = 8aR\pi \operatorname{Arctg} \sqrt{\left(\frac{x}{2R-x}\right)}$$

wo keine Conſtante hinzukommt.

Dieſer Ausdruck giebt alſo die krumme Oberfläche des durch $m\alpha M$ erzeugten ringförmigen Körpers, und wenn in der gefundenen Formel $x = R$ geſetzt wird, ſo erhält man die krumme Oberfläche des durch den Halbkreis $n\alpha N$ gebildeten Körpers. Dieſer iſt alſo

$$V + v = 8aR\pi \operatorname{Arc} \operatorname{tg} 1 = 8aR\pi \times \tfrac{1}{4}\pi$$
$$= 2aR\pi \cdot \pi = 2a\pi \cdot R\pi,$$

und es iſt $R\pi$ die Länge des Halbkreiſes naN, und $2a\pi$ der Umfang des Kreiſes, welcher mit $a\alpha = qc = a$ beſchrieben werden kann. Die Linie nN beſchreibt bei der Entſtehung des ringförmigen Körpers einen Kreisring, deſſen Fläche ausgedrückt wird durch

$$(qn+qN)\,(nN)\pi = 2(qc)(nN)\,\pi = 2a\pi \times 2R,$$

daher iſt die ganze Oberfläche des ringförmigen Körpers =

$$2a\pi \times (R\pi+2R),$$

nämlich es iſt dieſelbe der krummen Oberfläche eines Cylinders gleich, von welchem $n\alpha Nn$ der normale Querſchnitt iſt, und der die Linie zur Höhe hat, welche bei der Erzeugung des Körpers von dem Mittelpunkte c beſchrieben wird.

Dieſe hier aufgefundene Regel gilt nicht blos für den Halbkreis, ſondern auch für jeden Bogen $m\alpha M$; denn es iſt die krumme Oberfläche des durch den Bogen $m\alpha M$ erzeugten ringförmigen Körpers

$$= V + v = 8aR\pi \text{ Arc tg} \sqrt{\left(\frac{x}{2R-x}\right)};$$

nun iſt aber, wenn man den Bogen $m\alpha = \varphi$ ſetzt,

$$2R-x : (m\mu) = 1 : \text{tg } \tfrac{1}{2}\varphi,$$

und daher auch $2R-x : \sqrt{(2Rx-x^2)} = 1 : \text{tg } \tfrac{1}{2}\varphi$,

alſo iſt $\text{tg } \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{(2Rx-x^2)}}{2R-x} = \sqrt{\left(\frac{x}{2R-x}\right)}$;

folglich iſt $\tfrac{1}{2}\varphi = \text{Arc tg} \sqrt{\left(\frac{x}{2R-x}\right)}$

und daher der Bogen $m\alpha M = 2R\varphi = 4R \text{ Arc tg} \sqrt{\left(\frac{x}{2R-x}\right)}$.

Wird alſo der Bogen $m\alpha M = S$ geſetzt, ſo iſt

$$V + v = 2a\pi \cdot S,$$

und weil die von $mM = Ch$ beſchriebene Fläche

$$= 2(p\mu)\pi \times Ch = 2a\pi \cdot Ch$$

iſt, ſo folgt, daß die ganze Oberfläche des durch $m\alpha M$ beſchriebenen Ringes der krummen Oberfläche eines Cylinders gleich iſt, von welchem die erzeugende Fläche den normalen Querſchnitt bildet, und der den Umfang des von dem Punkte μ oder c beſchriebenen Kreiſes zur Höhe hat.

Zugleich geht hieraus hervor, daß dieſe Regel auch für jeden Theil des ringförmigen Körpers Gültigkeit hat; es gilt dieſelbe nämlich auch alsdann, wenn $m\alpha M$ nur in einem Winkel $= \varphi^0$ gedreht wird. In dieſem Falle iſt übrigens, wie ſich von ſelbſt verſteht, auch nur $\frac{\varphi}{360} \cdot 2a\pi$ die Höhe des entſprechenden Cylinders.

Zuſatz. Es iſt gefunden worden

$$V = 2aR\pi \int \frac{dx}{\sqrt{(2Rx-x^2)}} + 2Rx\pi$$

$$\text{und } v = 2aR\pi \int \frac{dx}{\sqrt{(2Rx-x^2)}} - 2Rx\pi;$$

folglich iſt $V - v = 4Rx\pi$,

und für $x = R$ wird $V - v = 4R^2\pi$.

Die Differenz der krummen Oberfläche des durch den Quadranten αMN beſchriebenen äußeren Theils und des durch den Quadranten αmn beſchriebenen inneren Theils des ring-

förmigen Körpers iſt hiernach der ganzen Oberfläche einer Kugel gleich, welche R zum Radius hat.

4. Es ſei allgemein αc eine Axe der Curve $n\alpha N$, Fig. 81., ſo daß alſo zu jeder Abſciſſe $\alpha\mu = x$ zwei gleichgroße, einander entgegengeſetzte Ordinaten gehören, $\mu m = \mu M = z$, und es ſei die Drehungsaxe aq parallel zu αc; es ſoll die Oberfläche des durch $n\alpha N$ erzeugten ringförmigen Körpers beſtimmt werden.

Setzt man $a\alpha = qc = a$; $ap = \alpha\mu = x$; $pm = y'$ und $pM = y''$, ſo iſt $y' = a - z$ und $y'' = a + z$. Wird alſo die krumme Oberfläche des durch αmn erzeugten inneren Theils des ringförmigen Körpers $= v$ und des durch αMN erzeugten äußeren Theils deſſelben $= V$ geſetzt, ſo iſt

$$V = 2\pi \int y'' dx \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy''}{dx}\right)^2\right]} \text{ und } v = 2\pi \int y' dx \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2\right]}$$

und weil $y'' = a + z$ und $y' = a - z$,
ſo iſt $dy'' = dz$ und $dy' = -dz$,
und daher $\left(\frac{dy''}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2$;

$$\text{alſo iſt } V = 2\pi \int (a+z) dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}$$

$$\text{und } v = 2\pi \int (a-z) dx \sqrt{\left(\quad + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)};$$

nämlich es iſt

$$V = 2a\pi \int dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)} + 2\pi \int z dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$

$$v = 2a\pi \int dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)} - 2\pi \int z dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)};$$

folglich iſt

$$V + v = 4a\pi \int dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}$$

$$\text{und } V - v = 4\pi \int z dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}.$$

Nun iſt nach §. 114. $\int dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}$ der Ausdruck für die Länge des Bogens $\alpha m = \alpha M$, und es iſt daher, wenn $m\alpha M = 2(m\alpha) = 2S$ geſetzt wird,

$$V + v = 2a\pi \times 2S.$$

Da ferner $2\pi \int z dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}$ der Ausdruck iſt für die krumme Oberfläche des Körpers, welcher erzeugt wird, wenn $\alpha m \mu$ oder $\alpha M \mu$ um $\alpha\mu$ ſich dreht, ſo folgt, wenn man dieſe krumme Fläche mit F bezeichnet,

$$V - v = 2F.$$

Hieraus geht nun hervor, daß die in No. 3. angegebenen Regeln für den Fall, wenn ein Kreisbogen um eine Axe ſich dreht, allgemeine Gültigkeit haben, ſobald nur die den ringförmigen Körper erzeugende Curve durch αc, welche zu aq parallel iſt, in zwei congruente Hälften getheilt wird.

Zuſatz. Da V =

$$2a\pi \int dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)} + 2\pi \int z dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)\right)},$$

ſo folgt auch $V = 2a\pi \times S + F$

und eben ſo $v = 2a\pi \times S - F$.

Es wird nämlich die krumme Oberfläche der durch αMN erzeugten äußeren Hälfte des Ringes erhalten, wenn man zu dem Rechtecke aus αMN und dem Umfange des durch den Punkt c beſchriebenen Kreiſes, die krumme Oberfläche des Körpers addirt, welcher von αMN gebildet wird, wenn dieſe Fläche ſich um αc dreht. Dieſe krumme Oberfläche aber muß von jenem Rechtecke abgezogen werden, um die krumme Oberfläche der durch αmn erzeugten inneren Hälfte des ringförmigen Körpers zu erhalten.

§. 131.

Von den Konoidenſchnitten.

Wenn eine Curve um eine feſte Axe ſich dreht, ſo daß dadurch ein Körper erzeugt wird, ſo laſſen die Eigenthümlichkeiten der Curven, welche auf der Oberfläche dieſes Körpers gebildet werden, wenn eine Ebene in irgend einer Lage denſelben ſchneidet, ſich auf eine ähnliche Art ermitteln, wie die der gemeinen Kegelſchnitte. Uebrigens verſteht es ſich von ſelbſt, daß, wenn bei einem ſolchen Körper die ſchneidende Ebene durch die Axe gelegt wird, der Schnitt ſelbſt immer die den Körper erzeugende Curve giebt, und daß jede Ebene, welche zur Grundfläche des Körpers parallel durch denſelben geht, ihn immer in einem Kreiſe ſchneiden muß. Es würde zu weit

führen, wenn hier eine allgemeine Unterſuchung angeſtellt werden ſollte, um zu ermitteln, wie überhaupt die Gleichung eines Körperſchnittes von der Gleichung der Curve abhängt, durch welche der Körper erzeugt wird: doch verdient angeführt zu werden, daß jeder Schnitt eines durch einen Kegelſchnitt erzeugten Körpers immer ebenfalls ein Kegelſchnitt ſein muß. Archimedes hat eine beſondere Abhandlung über die Konoiden und Sphäroiden geſchrieben, in welcher er die Eigenſchaften der durch die Kegelſchnitte erzeugten Körper und die Eigenthümlichkeiten der Schnitte derſelben unterſucht, und ſelbſt die Regeln zur Berechnung des Inhalts der Abſchnitte angiebt. Daß aber, wenn die den Körper erzeugende Fläche ein Kegelſchnitt iſt, die Eigenſchaften des Körperſchnittes leicht aufgefunden werden können, und dazu nicht einmal viele geometriſche Sätze erforderlich ſind, ergiebt ſich aus folgendem:

Iſt aqy, Fig. 67., eine Parabel, die, indem ſie ſich um ihre Axe ax dreht, ein paraboliſches Konoid erzeugt, und wird dieſes durch eine Ebene geſchnitten, welche parallel zur Axe iſt, ſo kann, wenn anyx durch die Axe des Konoids normal auf die Fläche des Schnittes gelegt iſt, nkg die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie beider ſein. Zieht man nun qs normal auf die Axe, ſo iſt dieſe Linie der Radius eines Kreiſes, der ebenfalls normal auf anyx ſteht, und die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie dieſes Kreiſes und des Körperſchnitts trifft die erzeugende Ebene normal in dem Punkte k. Wird dieſe gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie mit y bezeichnet, ſo iſt

$$y^2 = (Sq+Sk)\ (Sq-Sk) = (Sq)^2-(Sk)^2.$$

Da nun, wenn der Parameter der den Körper erzeugenden Parabel = p geſetzt wird,

$$(Sq)^2 = p(aS) \text{ und } (Sk)^2 = (mn)^2 = p(am),$$

ſo iſt auch $y^2 = p(aS) - p(am) = p(mS)$.

Es iſt aber ng die Axe des Körperſchnitts und y iſt die Ordinate des Punktes k deſſelben, zu welchem nk als Abſiſſe gehört. Da nun

$$y^2 = p(mS) = p(nk),$$

ſo iſt auch für nk = x

$$y^2 = px$$

die Gleichung für den Körperſchnitt; woraus ſich ergiebt, daß, wenn ein paraboliſches Konoid parallel zur Axe geſchnitten

wird, der Schnitt immer eine Parabel iſt, und zwar eine ſolche, die mit der den Körper erzeugenden einen und eben denſelben Parameter hat, und ſie ſind daher einander ähnlich.

Es ſei ferner Cag, Fig. 83., ein Axenſchnitt des paraboliſchen Konoids, welcher von der den Körper ſchneidenden Ebene normal geſchnitten wird, und es ſei Cc die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie, welche alſo nicht parallel zur Axe iſt, ſondern dieſe unter einem Winkel $= \varphi$ ſchneidet; ſo iſt, wenn gh die Axe der Parabel aB normal in f ſchneidet, dieſe Linie der Durchmeſſer eines Kreiſes, der ebenfalls normal auf gaC ſteht, und mit der den Körper ſchneidenden Ebene eine Linie gemein hat, welche in x ſenkrecht auf gaC ſteht. Dieſe Linie iſt als Ordinate des Halbkreiſes, wenn man ſie mit y bezeichnet, durch die Gleichung beſtimmt

$$y^2 = (gx)\,(xh) = (gf+fx)\,(gf-fx)$$
$$= (gf)^2 - (fx)^2.$$

Es iſt dieſe Linie aber auch eine Ordinate des Körperſchnittes, von welchem cC die Axe iſt, alſo die Ordinate, welche zu der Abſciſſe $cx = x$ gehört. Setzt man $Cc = A$, zieht durch C und c Parallelen zu gh, und bezeichnet CD, welches der normale Abſtand der beiden durch c und C zur Axe aB gezogenen Parallelen iſt, mit B, ſo ſind A und B ein Paar durch die Lage von cC gegebene Linien, und kann man nun die Werthe von (gf) und (fx) durch die Größen A, B und x ausdrücken, ſo iſt, weil

$$y^2 = (gf)^2 - (fx)^2,$$

hierdurch die Gleichung für den Körperſchnitt beſtimmt. Man ſetze einſtweilen $bc = q$, ſo iſt

$$fx = bd = (cd) - q, \text{ und da}$$
$$cx : cd = 1 : \sin\varphi \text{ oder } x : (cd) = 1 : \sin\varphi,$$
$$\text{ſo iſt } (cd) = x \sin\varphi, \text{ und daher}$$
$$(fx) = x\sin\varphi - q;$$
$$\text{folglich iſt } (fx)^2 = x^2\sin^2\varphi - 2qx\sin\varphi + q^2$$
$$\text{und } (gf)^2 = (gf)^2,$$
$$\text{alſo } y^2 = (gf)^2 - (fx)^2 = -x^2\sin^2\varphi + 2qx\sin\varphi + (gf)^2 - q^2,$$
$$\text{und weil } (gf)^2 = p(af)$$
$$\text{und } q^2 = (bc)^2 = p(ab), \text{ ſo iſt auch}$$
$$y^2 = -x^2\sin^2\varphi + 2qx\sin\varphi + p(af-ab),$$

und da $af - ab = bf = ci$ und

$x : (ci) = 1 : \cos\varphi$, alſo $(ci) = x \cos\varphi$, ſo iſt

$$y^2 = -x^2 \sin^2\varphi + (2q \sin\varphi + p \cos\varphi)x$$

die Gleichung für die Curve, wo nun noch, um ſie auf die einfachſte Form zu bringen, die Größen p, q und φ eliminirt und dafür A und B eingeführt werden müſſen. Es iſt aber

$$(BC)^2 = p(aB)$$

und $(bc)^2 = p(ab)$, alſo

$$(BC)^2 - (bc)^2 = p(Bb) = p(cD),$$

oder weil $Cc : cD = 1 : \cos\varphi$,

alſo $(cD) = (Cc) \cos\varphi = A \cos\varphi$,

ſo iſt

$$(BC + bc)(BC - bc) = Ap \cos\varphi;$$

nämlich es iſt $(CD)[CD - 2(bc)] = Ap \cos\varphi$,

alſo $B(B-2q) = Ap \cos\varphi$,

und daher $\frac{B(B-2q)}{A} = p \cos\varphi$.

Wird dieſer Werth in der gefundenen Gleichung geſetzt, ſo erhält man

$$y^2 = -x^2\sin^2\varphi + \left(2q\sin\varphi + \frac{B(B-2q)}{A}\right)x,$$

und da $cC : CD = 1 : \sin\varphi$ oder $A : B = 1 : \sin\varphi$,

ſo iſt $\sin\varphi = \frac{B}{A}$, alſo iſt auch

$$y^2 = -\frac{B^2}{A^2}x^2 + \left(\frac{2Bq}{A} + \frac{B^2-2Bq}{A}\right)x,$$

und dieſes giebt

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(Ax - x^2),$$

alſo, wenn $A = 2a$ und $B = 2b$ geſetzt wird,

$$y^2 = \frac{b^2}{a}(2ax - x^2)$$

eine Gleichung für die Elypſe, von welcher Cc die große und CD die kleine Axe iſt. Hieraus geht alſo hervor, daß, wenn ein paraboliſches Konoid durch eine Ebene geſchnitten wird, welche nicht parallel iſt zu der Axe des Körpers und auch nicht zu der Grundfläche deſſelben, der Schnitt immer eine Elypſe ſein muß. Ueberhaupt ſind alle Schnitte des parabo-

liſchen Konoids Kreiſe, Elypſen oder Parabeln, und dieſe letzteren haben alle einen gemeinſchaftlichen Parameter.

Auf gleiche Weiſe findet man, daß alle Schnitte des hyperboliſchen Konoids Kreiſe, Elypſen oder Hyperbeln ſein müſſen, und daß jeder Schnitt eines elyptiſchen Sphäroids ein Kreis oder eine Elypſe ſein muß.

§. 132.

Noch einige allgemeine Bemerkungen und Aufgaben.

1. Wenn der Inhalt eines durch Axendrehung erzeugten Körpers = Z geſetzt wird, ſo iſt, nach §. 122., die Formel für dieſen Körper

$$Z = \pi \int y^2 dx,$$

und hieraus folgt $y^2 = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{dZ}{dx}$.

Es läßt ſich daher, wenn die Formel für den Kubikinhalt eines Körpers gegeben iſt, in vielen Fällen leicht die Gleichung der Curve beſtimmen, durch welche derſelbe erzeugt wird. Soll z. B. der Körper zu einem Cylinder, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat, wie m : 1 ſich verhalten, ſo muß, weil der Inhalt des Cylinders = $xy^2\pi$ iſt,

$$Z = mxy^2\pi \text{ ſein,}$$

und daher $\frac{1}{\pi} dZ = 2mxydy + my^2dx$,

und da $\frac{1}{\pi} dZ = y^2dx$, ſo hat man

$$y^2dx = 2mxydy + my^2dx,$$

alſo $\frac{dx}{x} = \frac{2m}{1-m} \cdot \frac{dy}{y}$

und daher wird $\frac{2m}{1-m}\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}$,

alſo $\frac{2m}{1-m} \log y = \log x + \text{Const.}$

und es kann hier die Conſtante = log C geſetzt werden, wodurch nun wird

$$y^{\frac{2m}{1-m}} = Cx.$$

Setzt

Setzt man hier $m = \frac{1}{2}$, ſo wird

$$y^2 = Cx$$

und die Curve iſt eine gemeine Parabel.

Soll der Körper das mfache eines Cylinders werden, der die Abſciſſe x zum Radius der Grundfläche hat, und deſſen Höhe $= k - nx$ iſt, wo k eine gegebene Linie bedeutet und m und n Coefficienten ſind, ſo iſt

$$Z = m(k - nx)\, x^2 \pi,$$

$$\text{alſo } \frac{1}{\pi}\, dZ = y^2 dx = (2mkx - 3nx^2)dx$$

$$\text{und daher } y^2 = 2mkx - 3nx^2$$

die Gleichung für die Curve, welche in jedem Falle zu der Gattung der Elypſen gehört, deren Axen durch m, k und n ſich leicht berechnen laſſen: denn da für die Elypſe eigentlich die Gleichung ſtatt findet

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2,$$

$$\text{ſo wird } \frac{b^2}{a} = mk \text{ und } \frac{b^2}{a^2} = 3n,$$

$$\text{alſo } a = \frac{m}{3n}k \text{ und } b = \frac{mk}{\sqrt{3n}}.$$

Für $m = 1$ und $n = \frac{1}{3}$ erhält man $a = b = k$, und es wird

$$y^2 = 2kx - x^2$$

die Gleichung für den Kreis, von welchem k der Radius iſt.

2. Nach §. 129. iſt die allgemeine Formel für die krumme Oberfläche X eines durch Axendrehung erzeugten Körpers

$$X = 2\pi \int y dx \sqrt{(1 + p^2)},$$

$$\text{wenn } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = p^2 \text{ geſetzt wird.}$$

Nun ſei die Abſciſſenlinie ax, Fig. 66., die Axe, um welche die Fläche axyb ſich dreht, ſo iſt, wenn nun bv als die Abſciſſenlinie angenommen wird, und die Ordinaten in Beziehung auf dieſe Linie mit z bezeichnet werden, für $ab = a$, $y = a + z$ und $dy = dz$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} = p,$$

und es iſt daher auch

$$X = 2\pi \int (a + z)dx \sqrt{(1+p^2)}$$
$$= 2a\pi \int dx \sqrt{(1+p^2)} + 2\pi \int zdx \sqrt{(1+p^2)}.$$

Da nun $\int dx\sqrt{(1+p^2)}$, nach §. 114., die Länge des Bogens by bedeutet, welcher zu der Abſciſſe $ax = bv = x$ gehört, ſo iſt auch, wenn man dieſen Bogen $= S$ ſetzt,

$$X = 2aS\pi + 2\pi \int zdx \sqrt{(1+p^2)},$$

und es iſt $2\pi \int zdx \sqrt{(1+p^2)}$ die krumme Oberfläche des Körpers, welcher entſteht, wenn die Fläche bvy um bv ſich dreht. Die Differenz der Oberflächen der beiden Körper, welche entſtehen, wenn die Curve by einmal um ax und einmal um bv gedreht wird, iſt daher $= 2aS\pi = 2a\pi \times S$. Es iſt dieſe Differenz alſo einem Rechtecke gleich, das den Umfang des Kreiſes, zu welchem $ab = a$ als Radius gehört, zur Grundlinie hat, und deſſen Höhe der Bogen by iſt.

3. Iſt ny, Fig. 67., eine Curve, für welche entweder die Gleichung gar nicht gegeben iſt, oder bei der die Ordinaten auf eine ſolche Weiſe von den Abſciſſen abhängen, daß das Integral $= \int y^2 dx$, von welchem bekanntlich der Inhalt des durch die Umdrehung um ax erzeugten Körpers abhängt, nicht gefunden werden kann, ſo läßt ſich, wenn der Durchſchnitt oder, was daſſelbe iſt, die erzeugende Fläche nmxy gegeben iſt, der Inhalt des Körpers durch Näherung auf folgende Art beſtimmen: Man theile die Axe mx in eine hinreichende Anzahl gleicher Theile, von welchen jeder $= m\beta = \beta s = h$ klein genug iſt, daß man eine durch $m\beta\alpha n$ oder $\alpha\beta s q$ erzeugte Körperſcheibe als einen abgeſtumpften Kegel anſehen kann, ſo iſt für $mn = y$ und $\beta\alpha = y_1$, wenn man den Inhalt dieſer oberſten Scheibe des durch nmxy gebildeten Körpers $= S_1$ ſetzt,

$$S_1 = \left(\frac{y^2 + yy_1 + y_1^2}{3}\right) h\pi = \left(\frac{(y+y_1)^2 - yy_1}{3}\right) h\pi,$$

und es iſt überhaupt, wenn man die auf einander folgenden Scheiben mit $S_1, S_2, S_3, S_4 \cdots S_n$ und die Ordinaten mit $y, y_1, y_2, y_3 \cdots y_n$ bezeichnet,

$$S_1 = \tfrac{1}{3}(y+y_1)^2 h\pi - \tfrac{1}{3} yy_1 h\pi$$
$$= \tfrac{1}{4}(y+y_1)^2 h\pi + \tfrac{1}{12}[(y+y_1)^2 - 4yy_1]h\pi$$
$$= \tfrac{1}{4}(y+y_1)^2 h\pi + \tfrac{1}{12}(y-y_1)^2 h\pi.$$

Es iſt alſo

$$S_1 = \tfrac{1}{4}(y+y_1)^2 h\pi + \tfrac{1}{12}(y-y_1)^2 h\pi$$
$$S_2 = \tfrac{1}{4}(y_1+y_2)^2 h\pi + \tfrac{1}{12}(y_1-y_2)^2 h\pi$$
$$S_3 = \tfrac{1}{4}(y_2+y_3)^2 h\pi + \tfrac{1}{12}(y_2-y_3)^2 h\pi$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$S_n = \tfrac{1}{4}(y_{n-1}+y_n)^2 h\pi + \tfrac{1}{12}(y_{n-1}-y_n)^2 h\pi,$$

und dieſes giebt für den Inhalt K des ganzen durch nmxy gebildeten Körpers den Näherungswerth

$$K = S_1 + S_2 + S_3 \cdots\cdots + S_n =$$
$$= \frac{h\pi}{4}\left[(y+y_1)^2 + (y_1+y_2)^2 + (y_2+y_3)^2 \cdots\cdots + (y_{n-1}+y_n)^2\right]$$
$$+ \frac{h\pi}{12}\left[(y-y_1)^2 + (y_1-y_2)^2 + (y_2-y_3)^2 \cdots\cdots (y_{n-1}-y_n)^2\right],$$

ein Ausdruck, nach welchem ſich bequem und mit ziemlicher Genauigkeit rechnen läßt, wenn h hinreichend klein angenommen wird; wie Tobias Meier in ſeiner praktiſchen Stereometrie §. 122. zeigt.

4. Die krumme Oberfläche eines Prisma wird erhalten, wenn man den Umfang eines normalen Querſchnitts deſſelben, alſo eines ſolchen Querſchnittes, der die Kanten unter einem rechten Winkel ſchneidet, mit der Kante ſelbſt multiplicirt, und es gilt dieſe Regel auch in dem Falle, wenn die Grundfläche des Prisma eine krummlinige Figur iſt. Dieſe Regel hat daher auch für den ſchiefen Cylinder Gültigkeit; es wird alſo die krumme Oberfläche eines ſchiefen Cylinders gefunden, wenn man den Umfang eines normalen Querſchnitts mit der Axe des Cylinders multiplicirt. Hierbei iſt übrigens zu bemerken, daß, wenn die Grundfläche eines ſchiefen Cylinders ein Kreis iſt, der normale Querſchnitt desſelben eine Elypſe ſein muß, und es beruhet daher die Quadratur der krummen Oberfläche eines ſolchen Cylinders immer auf der Rectification einer Elypſe. Dieſe krumme Oberfläche iſt nämlich immer einem Rechtecke gleich, welches den Umfang der Elypſe zur Grundlinie und die Axe des Cylinders zur Höhe hat. Uebrigens iſt ein ſolches Rechteck, wenn es wirklich conſtruirt wird, keinesweges das Netz der krummen Oberfläche, wie ſich auf folgende Weiſe einſehen läßt: Schneidet man durch einen normalen Querſchnitt unten ein Stück

von einem ſchiefen Cylinder ab, ſo läßt ſich dieſes unten weggenommene Stück oben anſetzen, und man erhält hierdurch einen normalen Cylinder mit elyptiſcher Grundfläche, von welchem jenes Rechteck das Netz der krummen Oberfläche iſt; daſſelbe kann daher keinesweges als von dem ſchiefen Cylinder abgewickelt angeſehen werden. Zugleich geht hieraus hervor, daß der ſchiefe Cylinder, da jeder normale Querſchnitt deſſelben eine Elypſe iſt, eine ovale Form hat, eben ſo wie der normale Cylinder mit elyptiſcher Grundfläche, und man kann auch aus dieſem letzteren einen ſchiefen Cylinder mit kreisförmiger Grundfläche bilden, da es bei einem ſolchen immer einen Querſchnitt geben muß, der ein Kreis iſt. Das Netz eines ſchiefen Cylinders iſt ein Parallelogramm mit zwei geraden Linien, welche der Seite des Cylinders gleich ſind, und die beiden übrigen Linien ſind tranſcendente Curven, die in ihrer Mitte einen Wendepunkt haben, alſo zur Hälfte ihre erhabene und zur Hälfte ihre hohle Seite der Fläche zuwenden. Die Eigenthümlichkeiten dieſer Curve ergeben ſich aus der folgenden Aufgabe:

5. Es ſoll das Netz eines ſchiefen Cylinders mit kreisförmiger Grundfläche angegeben werden.

Aufloſung. Iſt $\beta aA\alpha$, Fig. 84., ein Axendurchſchnitt eines ſchiefen Cylinders und aCA die halbe Grundfläche deſſelben, und man zieht durch den Mittelpunkt c des Durchmeſſers aA die Linie bB normal auf die Seiten $a\beta$ und $A\alpha$, ſo iſt dieſe Linie der Durchſchnitt eines normalen Querſchnitts bCB, welcher eine Elypſe ſein muß, und es iſt cC = ca = cA die halbe große Axe und bc = cB die halbe kleine Axe derſelben. Hieraus geht zugleich hervor, daß der Umfang der halben Elypſe bCB kleiner iſt als der Umfang des Halbkreiſes aCA. Nun iſt, wenn man bCB als gerade Linie ihrer Länge nach hinlegt, dieſe die Grundlinie des Rechtecks, welches das Netz des normalen Cylinders giebt, von welchem $\beta bB\alpha$ der Durchſchnitt iſt, und es liegt der Quadrant aC des Kreiſes unterhalb und der Quadrant CA oberhalb dieſer Linie. Wird alſo, Fig. 84 a., die gerade bB in C halbirt, und nun die Curve aCA gezogen, die mit dem Umfange des Halbkreiſes, welcher die Grundfläche des ſchiefen

Cylinders bildet, gleiche Länge hat, ſo iſt nothwendiger Weiſe die krumme Linie aCA die Grundlinie des Netzes von dem ſchiefen Cylinder, für welche die Gleichung, wenn bB als Abſciſſenlinie angenommen wird, auf folgende Art gefunden werden kann: Man ſetze den zu dem elyptiſchen Bogen Cx, Fig. 84., gehörigen Centriwinkel Ccx $= \varphi$ und die Länge des Bogens Cx $=$ x, ſo iſt der Werth von x durch den von φ beſtimmt, wenigſtens läßt ſich ein hinreichend genauer Näherungswerth für die Länge dieſes Bogens finden, da die beiden Halbaxen der Elypſe cC $=$ a und cb $=$ b gegeben ſind, und man kann daher ſetzen

$$x = f. (\varphi)$$

als gegebene Gleichung zwiſchen der Abſciſſe Cx und dem dazu gehörigen veränderlichen Winkel φ. Die Ordinate xy iſt parallel zu ba, alſo ſenkrecht auf der Fläche der Elypſe und daher auch auf cx; alſo iſt, wenn $\angle xcy = \psi$ geſetzt wird, da cy $=$ cC $=$ a iſt,

$$a : y = 1 : \sin \psi$$

alſo $y = a \sin \psi$.

Nun iſt in der körperlichen Ecke bei c, deren drei Kanten cC, cx und cy ſind, der Neigungswinkel bei x $= 90^{\circ}$, weil cxy normal ſteht auf xcC, der Neigungswinkel bei C $= \alpha$ durch die Schiefe des Cylinders gegeben, da α der Winkel iſt, unter welchem der normale Querſchnitt bCB und die Grundfläche des Cylinders aCA ſich ſchneiden; daher findet in der körperlichen Ecke bei c die Proportion ſtatt

$$1 : \sin (Ccx) = \sin \alpha : \sin (xcy),$$

nämlich es iſt $1 : \sin \varphi = \sin \alpha : \sin \psi$,

und daher $\sin \psi = \sin \alpha \sin \varphi$.

Da man nun gefunden hat $y = a \sin \psi$,

ſo iſt auch $y = a \sin \alpha \sin \varphi$.

Die beiden Gleichungen nun

$$x = f(\varphi) \text{ und } y = a \sin \alpha \sin \varphi$$

ſind hinreichend, um die Curve aCA, Fig. 84a, welche die Grundlinie des Netzes für die Hälfte der krummen Oberfläche des ſchiefen Cylinders iſt, zu conſtruiren. Man ſucht nämlich für jeden Werth von φ die Länge des dazu gehörigen Bogens der Elypſe Cx $=$ x, ſo hat man die Abſciſſen, und die dazu ge=

hörigen Ordinaten werden nun durch die Gleichung $y = a \sin\alpha \sin\varphi$ gefunden.

Aus der Gleichung $y = a \sin\alpha \sin\varphi$ ergiebt ſich übrigens zugleich, daß für $\varphi = 0$ auch $y = 0$ iſt, und eben ſo für $\varphi = \pm 180^0$; dagegen iſt für jeden poſitiven Werth von $\varphi < 180^0$ auch y poſitiv, und dieſe iſt negativ für jeden negativen Werth von $\varphi < 180^0$. Die ganze Grundlinie des Netzes hat daher die Form daCAC, und es ſind die beiden Hälften daC und CAD derſelben congruent. Die Seitenlinien des Netzes ſind gerade, der Axe des Cylinders gleich und ſtehen normal auf der Abſciſſenlinie bB.

6. Für die Curve ac, Fig. 83., iſt die Gleichung gegeben zwiſchen dem veränderlichen Winkel acc $= \varphi$ und dem Leitſtrahle cc $= z$; man ſoll hieraus den Inhalt des Körpers beſtimmen, welcher entſteht, wenn die Fläche acc um ac ſich dreht, und es ſoll der Ausdruck für die Oberfläche deſſelben angegeben werden.

Auflöſung. Für ac $= a$, ab $= x$ und bc $= y$ iſt bc $= a - x$ und zugleich iſt

$(bc) = y = z \sin\varphi$ und $cb = a - x = z \cos\varphi$; hieraus folgt

$dy = z \cos\varphi\, d\varphi + dz \sin\varphi$ und $dx = z \sin\varphi\, d\varphi - dz \cos\varphi$.

Nun wird bei der Umdrehung um ac durch abc ein Körper erzeugt, der, wenn man den Inhalt deſſelben $= X$ ſetzt, durch die Gleichung ausgedrückt wird

$$X = \pi \int y^2 dx,$$

und durch bcc wird ein Kegel gebildet, deſſen Inhalt

$$K = \left(\frac{a - x}{3}\right) \cdot y^2 \pi;$$

folglich iſt der Inhalt Z des ganzen durch acc gebildeten Körpers

$$Z = \left(\frac{a - x}{3}\right) y^2 \pi + \pi \int y^2 dx,$$

nämlich es iſt, wenn hier für x, y und dx die Werthe geſetzt werden,

$$Z = \frac{z \cos\varphi}{3} \cdot \pi z^2 \sin^2\varphi + \pi \int z^2 \sin^2\varphi (z \sin\varphi\, d\varphi - \cos\varphi\, dz)$$

$$= \frac{z^3\pi}{3}\cos\varphi\sin^2\varphi + \pi\int z^3\sin^3\varphi\,d\varphi - \pi\int z^2\sin^2\varphi\cos\varphi\,dz + C.$$

Ferner iſt die krumme Oberfläche des durch acb erzeugten Körpers

$$V = -2\pi\int y\,dx\,\sqrt{(1+p^2)} = -2\pi\int y\,\sqrt{((dx)^2+(dy)^2)},$$

für $p = \frac{dy}{dx}$, nach §. 129., wo der Ausdruck hier negativ genommen wird, weil dx in dem gegenwärtigen Fall einen negativen Werth hat, und die krumme Seitenfläche des durch bec gebildeten Kegels iſt $= zy\pi$; folglich iſt die ganze Oberfläche

$$T = zy\pi - 2\pi\int y\,\sqrt{((dx)^2+(dy)^2)};$$

es iſt aber

$$(dy)^2 = z^2\cos^2\varphi\,(d\varphi)^2 + 2z\sin\varphi\cos\varphi\cdot dz\,d\varphi + \sin^2\varphi\cdot(dz)^2$$

$$(dx)^2 = z^2\sin^2\varphi\,(d\varphi)^2 - 2z\sin\varphi\cos\varphi\cdot dz\,d\varphi + \cos^2\varphi\,(dz)^2,$$

folglich iſt $(dy)^2 + (dx)^2 = z^2(d\varphi)^2 + (dz)^2$

und daher wird

$$T = z^2\sin\varphi\cdot\pi - 2\pi\int z\sin\varphi\,\sqrt{(z^2(d\varphi)^2+(dz)^2)} + C.$$

Zuſatz 1. Wenn die Gleichung zwiſchen φ und z gegeben iſt, ſo kann man auch mit Hülfe der Gleichungen

$$y = z\sin\varphi \text{ und } x = a - z\cos\varphi$$

die zwiſchen y und x ableiten, und alsdann, zur Berechnung des Inhalts und der Oberfläche, die Formeln benutzen

$$Z = \left(\frac{a-x}{3}\right)y^2\pi + \pi\int y^2dx$$

$$\text{und } T = 2y\pi + 2\pi\int y\,dx\,\sqrt{(1+p^2)}.$$

Es iſt aber $z^2\sin^2\varphi = y^2$

und $z^2\cos^2\varphi = (a-x)^2,$

alſo $z^2 = y^2 + (a-x)^2$

$$\sin^2\varphi = \frac{y^2}{y^2+(a-x)^2} \text{ und } \cos^2\varphi = \frac{(a-x)^2}{y^2+(a-x)^2}.$$

Zuſatz 2. Um den Gebrauch der Formeln durch ein einfaches Beiſpiel zu erläutern, nehme man an, es ſei z conſtant = a und alſo dz = 0, ſo erhält man für den Inhalt des Körpers die Formel

$$Z = \frac{a^3\pi}{3}\cos\varphi\sin^2\varphi + a^3\pi\int\sin^3\varphi\,d\varphi + C,$$

und weil nach Meier Hirſch's Integraltafeln, pag. 262.,

$$\int \sin^3 \varphi d\varphi = \left(-\frac{1}{3}\sin^2\varphi - \frac{2}{3}\right)\cos\varphi,$$

ſo iſt $Z = \frac{a^3}{3}\cos\varphi\sin^2\varphi - a^3\pi\cos\varphi\left(\frac{1}{3}\sin^2\varphi + \frac{2}{3}\right) + C$

$$= \frac{a^3\pi\cos\varphi\sin^2\varphi}{3}(1-\pi) - \frac{2}{3}a^3\pi\cos\varphi + C$$

und da für $\varphi = 0$ auch $Z = 0$ werden muß, und alsdann auch $\sin\varphi = 0$ iſt, und $\cos\varphi = 1$, ſo wird

$$C = \frac{2}{3}a^3\pi,$$

folglich iſt

$$Z = \frac{2}{3}a^3\pi - \frac{2}{3}a^3\pi\cos\varphi - \frac{a^3\pi\cos\varphi\sin^2\varphi}{3}(\pi-1).$$

Ferner iſt die Oberfläche

$$T = a^2\sin\varphi\cdot\pi - 2a^2\pi\int\sin\varphi d\varphi$$
$$= a^2\sin\varphi\cdot\pi - 2a^2\cos\varphi\cdot\pi + C,$$

und weil für $\varphi = 0$ auch $T = 0$ ſein muß, ſo iſt

$C = 2a^2\pi$, und alſo

$$T = 2a^2\pi + a^2\sin\varphi\cdot\pi - 2a^2\cos\varphi\cdot\pi.$$

Für $\varphi = 90^0$ geben dieſe Formeln

$$Z = \frac{2}{3}a^3\pi \text{ und } T = 3a^2\pi,$$

welches die Ausdrücke für den Inhalt und für die ganze Oberfläche der Halbkugel ſind, da, wie ſich von ſelbſt verſteht, wenn z conſtant iſt, ac, Fig. 83., ein Kreisbogen ſein muß.

Zuſatz 3. Die Gleichungen

$$y = z\sin\varphi \text{ und } x = a - z\cos\varphi$$

geben für $z = a$

$$\sin\varphi = \frac{y}{a} \text{ und } \cos\varphi = \frac{a-x}{a}.$$

Setzt man nun dieſe Werthe in den, im vorigen Zuſatze für Z und T erhaltenen Ausdrücken, ſo wird

$$Z = \frac{2}{3}a^3\pi - \frac{2}{3}a^3\pi\cdot\frac{a-x}{a} - \frac{a^3\pi}{3}\cdot\frac{y^2}{a}\cdot\left(\frac{a-x}{a}\right)(\pi-1)$$

$$= \frac{2}{3}a^2x\pi - \frac{y^2(a-x)\pi}{3}\cdot(\pi-1)$$

$$\text{und } T = 2a^2\pi + a^2 \cdot \frac{y}{a}\pi - 2a^2 \cdot \frac{a-x}{a}\pi$$
$$= a\pi\,(2a + y - 2a + 2x)$$
$$= (2x + y)\,\pi.$$

Dritter Abſchnitt.

Von den Körpern, in welchen alle Schnitte, parallel zur Grundfläche, von Curven begränzt werden, die zu derſelben Gattung gehören.

§. 133.

Aufgabe.

Es iſt abcm, Fig. 85., ein Körper, der die Eigenſchaft hat, daß, wenn man denſelben durch die Fläche $\alpha\beta\gamma$ parallel zur Grundfläche abc ſchneidet, die Curve $\alpha\beta\gamma$ mit der die Grundfläche begränzenden bac zu einerlei Gattung gehört, ſo daß die Eigenthümlichkeiten beider durch dieſelbe Gleichung ausgedrückt werden, und es haben beide eine ſolche Lage zu einander, daß normal auf abc eine den Körper theilende Ebene gelegt werden kann, von welcher $\beta\alpha\gamma$ in $\alpha\delta$ eben ſo geſchnitten wird, wie bac durch ad; man ſoll die Formeln für den Kubikinhalt und für die Oberfläche dieſes Körpers angeben.

Auflöſung. Legt man die Ebene bmc ſo durch den Körper, daß ſie normal auf mda ſteht, ſo iſt, weil auch bac normal auf mda iſt, die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie cd ſowohl auf ad als auf md und eben ſo auch $\gamma\delta$ ſenkrecht auf $\alpha\delta$ und mδ; man kann daher für die Abſciſſenlinie md die Linien cd und $\gamma\delta$ als Ordinaten der Curve mγc anſehen, und eben ſo iſt $\delta\gamma$ eine Ordinate der Curve $\alpha\gamma$ für die Abſciſſenlinie $\alpha\delta$, und dc iſt eine Ordinate für die Abſciſſenlinie ad der Curve ac. Zugleich kann man auch md als Abſciſſenlinie der Curve mαa anſehen, und es ſind da und $\delta\alpha$

ein Paar parallele Ordinaten; nur daß hier der Ordinatenwinkel $mda = m\delta\alpha = \alpha$ nicht nothwendig ein rechter iſt.

Man ſetze $m\delta = x$, $\delta\gamma = y$ und $\delta\alpha = z$, ſo iſt, da durch den gegebenen Körper die Gattungen der Curven $m\gamma c$, $a\gamma$ und $m\alpha a$ beſtimmt ſind, auch die Gleichung für jede dieſer Curven gegeben; es iſt daher bekannt, wie y und z von x abhängen, und alſo auch die Abhängigkeit der Linien y und z von einander.

Setzt man nun die Fläche $\alpha\delta\gamma = Z$, ſo iſt, weil zu der Abſciſſe $\alpha\delta = z$ die ſenkrechte Ordinate $\delta\gamma = y$ gehört, nach §. 108.,

$$Z = \int y dz.$$

Iſt nun $\angle m\delta\alpha = \angle mda = \alpha$, und man zieht von m aus die Normale me auf ad, welche die $\alpha\delta$ in ε ſchneidet, ſo iſt

$$m\delta : m\varepsilon = 1 : \sin\alpha$$
$$\text{oder } x : (m\varepsilon) = 1 : \sin\alpha$$
$$\text{und daher } (m\varepsilon) = x \sin\alpha.$$

Nimmt man $\delta\delta' = \Delta x$, und legt durch δ' eine Ebene parallel zu $\alpha\beta\gamma$, welche die Normale me in ε' ſchneidet, ſo iſt $\varepsilon\varepsilon' = \Delta x \cdot \sin\alpha$, und wenn der Inhalt des ganzen, durch $\alpha\delta\gamma$ abgeſchnittenen Körpers $m\alpha\delta\gamma = V$ geſetzt wird, ſo iſt der Theil deſſelben, welcher zwiſchen $\alpha\beta\gamma$ und der hierzu parallelen Ebene durch δ' liegt, $= \Delta V$. Daher iſt für einen ſehr kleinen Werth von Δx

$$\Delta V = Z \cdot \Delta x \cdot \sin\alpha,$$

und hieraus folgt, wie bekannt,

$$dV = Z \sin\alpha \cdot dx;$$

es iſt alſo $V = \sin\alpha \int Z dx$,

wofür man auch ſetzen kann

$$V = \sin\alpha \int dx \int (y dz),$$

welches die Formel für den Kubikinhalt des Körpers $m\alpha\delta\gamma$ iſt.

Da die Gleichung gegeben iſt zwiſchen $\alpha\delta = z$ und $\delta\gamma = y$, ſo iſt die Länge des Bogens $\alpha\gamma = T$ durch die Formel beſtimmt

$$T = \int dz \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}.$$

Trifft nun die durch δ' parallel zu $\alpha\beta\gamma$ gelegte Ebene die Curve $m\alpha$ in α', ſo iſt, wenn die Länge des ganzen Bogens $m\alpha = S$ geſetzt wird, $\alpha\alpha' = \Delta S$, und es iſt daher die krumme Oberfläche der Körperſcheibe, welche zwiſchen $\gamma\alpha\delta$ und der zu ihr parallelen $\gamma'\alpha'\delta'$ liegt, wenn die ganze krumme Oberfläche $m\alpha\gamma = U$ geſetzt wird, durch die Gleichung beſtimmt

$$\Delta U = T \cdot \Delta S,$$

wobei jedoch vorausgeſetzt wird, daß $\delta\alpha$ normal iſt auf dem Bogen $\beta\alpha\gamma$. Aus der gefundenen Gleichung folgt

$$dU = TdS,$$

$$\text{folglich iſt } U = \int dS \cdot T,$$

wofür man auch ſetzen kann

$$U \int dS \left[\int dz \left(1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)\right],$$

wo nun noch für dS der Werth geſetzt werden muß.

Da me ſowohl auf ad als auf $\alpha\delta$ normal iſt, ſo iſt für $m\varepsilon = x'$ und $\varepsilon\alpha = z'$, weil die Länge des Bogens $m\alpha = S$ geſetzt worden iſt,

$$dS = dx' \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2\right)}.$$

$$\text{Es iſt aber } m\varepsilon = x' = x \sin \alpha$$

$$\text{und } \varepsilon\alpha = \delta\alpha - \delta\varepsilon = z' = z - x \cos \alpha,$$

$$\text{folglich iſt } dx' = \sin \alpha \cdot dx$$

$$\text{und } dz' = dz - \cos \alpha \cdot dx,$$

alſo iſt auch

$$\frac{dz'}{dx'} = \frac{dz - \cos\alpha \cdot dx}{\sin \alpha \cdot dx} = \frac{1}{\sin \alpha}\left(\frac{dz}{dx} - \cos\alpha\right)$$

und daher

$$1 + \left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\left[\sin^2 \alpha + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - 2\cos\alpha\left(\frac{dz}{dx}\right) + \cos^2\alpha\right]$$

$$+ \frac{1}{\sin^2 \alpha}\left[1 - 2\cos\alpha\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right];$$

folglich iſt

$$dS = dx \sqrt{\left[1 - 2\cos\alpha\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]},$$

wodurch nun auch die krumme Oberfläche des Körpers $m\alpha\gamma\delta$ beſtimmt iſt: nämlich es iſt die krumme Oberfläche $m\alpha\gamma =$

$$U = \int dS \cdot T.$$

Da nun für $\alpha\delta\gamma = Z$ gefunden worden iſt

$$Z = \int y dz,$$

und die Fläche $m\delta\gamma = W$ durch die Gleichung beſtimmt iſt

$$W = \int y dx,$$

ſo hat man, wenn $\alpha\delta m = X$ geſetzt, und nun noch der Werth von X beſtimmt wird, einen Ausdruck $= U + Z + W + X$, durch welchen die ganze Oberfläche des Körpers $m\alpha\gamma\delta$ ausgedrückt wird.

Es iſt aber für $m\varepsilon = x'$ und $\varepsilon\alpha = z'$ die Fläche von $m\varepsilon\alpha = \int z' dx'$ oder, weil $z' = z - x \cos \alpha$ und $dx' = \sin \alpha \cdot dx$,

$$\begin{aligned} m\varepsilon\alpha &= \int (z - x \cos \alpha) \sin \alpha dx \\ &= \sin \alpha \int z dx - \sin \alpha \cos \alpha \int x dx \\ &= \sin \alpha \int z dx - \tfrac{1}{2}x^2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

und $m\delta\varepsilon = \frac{1}{2}(\delta\varepsilon)(m\varepsilon) = \frac{1}{2}x^2 \sin \alpha \cos \alpha$,

alſo iſt $m\varepsilon\alpha + m\delta\varepsilon = X = \sin \alpha \int z dx$,

und es wird daher die ganze Oberfläche des Körpers $m\alpha\gamma\delta$ ausgedrückt durch

$$U + Z + W + X =$$
$$\int T \cdot dS + \int y dx + \int y dx + \sin \alpha \int z dx.$$

Zuſatz 1. Da die gefundenen Formeln auch für den Körper $m\alpha\delta\beta$ Gültigkeit haben, wenn $\delta\beta = y$ geſetzt wird, ſo folgt, daß ſie auch für den ganzen Körper $m\alpha\beta\gamma$ gelten, wobei es übrigens einerlei iſt, ob die auf bac normale Fläche mad den Körper in zwei congruente Hälften theilt oder nicht. Nur verſteht es ſich von ſelbſt, daß bei Berechnung der ganzen Oberfläche von $m\alpha\beta\gamma$ die Fläche $m\alpha\delta$ nicht vorkommt. Es iſt übrigens nicht nöthig, jeden der beiden Theile $m\alpha\gamma\delta$ und $m\alpha\delta\beta$ beſonders zu berechnen, ſondern man kann die gefundenen Formeln unmittelbar auf den ganzen Körper anwenden, wie leicht einzuſehen iſt.

Zuſatz 2. Die Auflöſung beſchränkt ſich zwar zunächſt nur auf den Fall, wenn der Körper von der einen Seite durch eine Ebene bmc begränzt wird; da aber jeder Körper durch eine Ebene wie bmc in zwei Theile getheilt werden kann, von welchen jeder zu der betrachteten Gattung gehört, ſo folgt, daß ſich die gefundenen Formeln auch alsdann anwen=

den laſſen, wenn der Körper durchaus von krummen Flächen begränzt iſt.

Zuſatz 3. Die Formeln, mit deren Hülfe der Inhalt und die Oberfläche des Körpers gefunden wird, ſind

1. $Z = \int ydz,$

2. $V = \sin\alpha \int Zdx,$

3. $T = \int dz \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)},$

4. $dS = dx \sqrt{\left[1 - 2\cos\alpha\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]},$

5. $U = \int T \cdot dS,$

und hierzu kommt noch

6. $W = (m\delta\gamma) = \int ydx$

und 7. $X = (m\delta\alpha) = \sin\alpha \int zdx.$

Bei dem Gebrauche dieſer Formeln wird vorausgeſetzt, daß die Abhängigkeit der veränderlichen Größen x, y und z von einander gegeben iſt, und man muß nun

1. um Z zu finden, y als Function von z ausdrücken.

2. Um den Werth von V zu erhalten, muß entweder Z als Function von x ausgedrückt werden, oder man muß, falls $Z = f(z)$ eine bequeme Form hat, den Werth von dx durch z und dz beſtimmen.

3. Bei der Ermittelung von T wird y als Function von z und bei der Beſtimmung von dS wird dz als von dx abhängig betrachtet, und man muß nun

4. wenn der Werth von U berechnet werden ſoll, T und dS, als von einer und derſelben veränderlichen Größe abhängig, ausdrücken.

Uebrigens verſteht es ſich von ſelbſt, daß, wenn in einem beſonderen Falle der Werth der einen oder der andern der erforderlichen Größen auf einem andern Wege bequemer gefunden werden kann, die Benutzung der Integralformeln überflüſſig wird. So iſt es z. B. öfters der Fall, daß der Werth von $Z = \beta\alpha\delta$, auch wohl der von $T = \alpha\gamma$ und von $S = \alpha m$ unmittelbar gegeben iſt, oder doch leicht gefunden werden kann, und man daher nur, um U zu berechnen, dS aus S abzuleiten nöthig hat, nachdem S und T als Function einer und derſelben Größe ausgedrückt ſind.

Zuſatz 4. Da die gefundenen Formeln ſämmtlich Integralien enthalten, und die Integration nur in den wenigſten Fällen vollſtändig geſchehen kann, ſo muß man öfters mit bloßen, aus den ſich ergebenden Ausdrücken abgeleiteten Näherungswerthen ſich begnügen. Uebrigens laſſen die obigen Formeln einen weit ausgedehnten Gebrauch zu.

§. 134.

Von dem Kubikinhalte der Cylinderhufe.

Iſt der Körper macb, Fig. 86., ein Cylinderhuf, alſo ein Abſchnitt von einem Cylinder, von welchem fghk der Axendurchſchnitt iſt, ſo ſind die Curven bac und bmc entweder Elypſenabſchnitte, oder es iſt dieſes nur bei der einen der Fall, und die andere iſt ein Kreisabſchnitt; ein Unterſchied, der hier nicht beachtet zu werden braucht, weil die Gleichung der Elypſe auch für den Kreis Gültigkeit hat, wenn man beide Axen gleich groß annimmt. Die Curve $m\alpha a$ aber verwandelt ſich in dieſem Falle in eine gerade Linie, die nach der Lage des Abſchnittes entweder normal ſteht auf ad, oder doch wenigſtens einen beſtimmten Winkel mit dieſer Linie bildet.

Man ſetze $\angle mda = m\delta\alpha = \alpha$ und $\angle mad = m\alpha\delta = \beta$, $m\delta = x$, $\delta\gamma = y$ und $\delta\alpha = z$, ſo iſt

$$m\delta : \delta\alpha = \sin\beta : \sin(\alpha+\beta)$$

oder $$x : z = \sin\beta : \sin(\alpha+\beta)$$

und daher iſt $$z = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} \cdot x,$$

wofür man zur Abkürzung ſetzen kann $z = mx$.

Da ferner, wenn bac und alſo auch $\beta\alpha\gamma$ der Abſchnitt einer Elypſe iſt, zu beiden gleiche Axen gehören, ſo iſt, wenn, wie gewöhnlich, die große Axe mit 2a und die kleine mit 2b bezeichnet wird, da die erſtere die verlängerte ad und alſo auch die verlängerte $\alpha\delta$ ſein muß, für $\alpha\delta = z$ und $\delta\gamma = y$ die Gleichung für den Bogen $\alpha\gamma$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2az - z^2).$$

Hiernach iſt in den allgemeinen, §. 133., gefundenen Ausdrücken

die Abhängigkeit der Größen x, y und z von einander durch die Gleichungen beſtimmt

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{(2az - z^2)} = p \sqrt{(2az - z^2)},$$

wenn $\frac{b}{a} = p$ geſetzt wird, und $z = mx$, alſo $dz = mdx$.

Nun iſt I. $Z = \int y dz$, alſo iſt hier

$$Z = p \int dz \sqrt{(2az - z^2)}.$$

In Meier Hirſch's Integraltafeln aber findet man S. 173

$$\int dz \sqrt{(2az - z^2)} = \left(\frac{z - a}{2}\right) \sqrt{(2az - z^2)} + \frac{a^2}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{(2az - z^2)}}$$

und $\int \frac{dz}{\sqrt{(2az - z^2)}} = 2 \text{Arc sin} \sqrt{\left(\frac{z}{2a}\right)}$, folglich iſt

$$\int dz \sqrt{(2az - z^2)} = \left(\frac{z - a}{2}\right) \sqrt{(2az - z^2)} + a^2 \text{Arc sin} \sqrt{\left(\frac{z}{2a}\right)}$$

und es iſt alſo

$$\text{I.} \quad Z = p \left(\frac{z - a}{2}\right) \sqrt{(2az - z^2)} + pa^2 \text{ Arc sin} \sqrt{\left(\frac{z}{2a}\right)}.$$

Ferner iſt II. $V = \sin \alpha \int Z dx = n \int Z dx$, wenn $\sin \alpha = n$ geſetzt wird, alſo iſt hier

$$V = n \int Z \frac{dz}{m} = \frac{n}{m} \int Z dz =$$

$$\frac{pn}{m} \int \left(\frac{z - a}{2}\right) dz \sqrt{(2az - z^2)} + \frac{pna^2}{m} \int dz \text{ Arc sin} \sqrt{\left(\frac{z}{2a}\right)};$$

nämlich es iſt $V =$

$$\frac{pn}{2m} \int z dz \sqrt{(2az - z^2)} - \frac{pna}{2m} \int dz \sqrt{(2az - z^2)}$$

$$+ \frac{pna^2}{m} \int dz \text{ Arc sin} \sqrt{\left(\frac{z}{2a}\right)} = P + Q + R.$$

Es iſt aber, wenn man einſtweilen $\sqrt{\frac{z}{2a}} = v$ ſetzt, alſo

$$dz = 4avdv,$$

$$\int dz \text{ Arc sin} \sqrt{\left(\frac{z}{2a}\right)} = 4a \int v dv \text{ Arc sin } v =$$

$$4a \left[\frac{v^2}{2} \text{ Arc sin } v - \tfrac{1}{2} \int \frac{v^2 dv}{\sqrt{(1 - v^2)}}\right];$$

nach Meier Hirſch Seite 289, und nach Seite 142

$$\int \frac{v^2 dv}{\sqrt{(1-v^2)}} = -\frac{v}{2}\sqrt{(1-v^2)} + \tfrac{1}{2}\text{Arc sin} v;$$

folglich iſt auch $\int dz \text{ Arc sin} \sqrt{\left(\frac{z}{2a}\right)} =$

$$2av^2 \text{ Arc sin } v + av\sqrt{(1-v^2)} - a \text{ Arc sin } v =$$

$$z \text{ Arc sin } v + a\sqrt{v^2(1-v^2)} - a \text{ Arc sin } v =$$

$$(z-a) \text{ Arc sin} \sqrt{\frac{z}{2a}} + a\sqrt{\frac{z}{2a}\left(1-\frac{z}{2a}\right)} =$$

$$(z-a) \text{ Arc sin} \sqrt{\frac{z}{2a}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(2az-z^2)}.$$

In dem für V gefundenen Ausdrucke iſt alſo

$$R = \frac{pn}{m} a^2(z-a)\text{Arc sin}\sqrt{\frac{z}{2a}} + \frac{pn}{2m} a^2 \sqrt{(2az-z^2)};$$

ferner iſt $\int z dz \sqrt{(2az-z^2)} =$

$$\left(\frac{z^2-2az}{3}\right)\sqrt{(2az-z^2)} + a\int dz\sqrt{(2az-z^2)}$$

nach Meier Hirſch Seite 173, und es iſt daher in dem für V gefundenen Ausdrucke

$$P = \frac{pn}{m}\left(\frac{z^2-2az}{6}\right)\sqrt{(2az-z^2)} + \frac{pn}{2m} a\int dz\sqrt{(az-z^2)},$$

und da $+ Q = -\frac{pn}{2m} a\int dz\sqrt{(az-z^2)},$

ſo iſt $P + Q = \frac{pn}{m}\left(\frac{z^2-2az}{6}\right)\sqrt{(2az-z^2)},$

und hierzu den für R gefundenen Werth giebt den geſuchten Werth für die Hälfte $m\delta\alpha\gamma$ von dem Cylinderhufe $m\beta\alpha\gamma$

$$V = \frac{pn}{m}\left(\frac{z^2-2az}{6}\right)\sqrt{(2az-z^2)} + \frac{pn}{m}a^2(z-a)\text{Arc sin}\sqrt{\left(\frac{z}{2a}\right)}$$
$$+ \frac{pn}{2m} a^2 \sqrt{(2az-z^2)};$$

alſo iſt II. der ganze Huf 2V =

$$\frac{pn}{m}\left(\frac{3a^2-2az+z^2}{3}\right)\sqrt{(2az-z^2)} + \frac{2pn}{m}a^2(z-a)\text{Arc sin}\sqrt{\left(\frac{z}{2a}\right)},$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil V = o wird für z = o, wie es ſein muß. Bei der Benutzung dieſer Formel braucht man nur noch die Werthe zu ſetzen

$$p = \frac{b}{a},\ n = \sin\alpha \text{ und } m = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}.$$

Es

Es ſei nun, um die gefundene Formel auf einige beſondere Fälle anzuwenden,

1. der Inhalt eines jeden zur Grundfläche parallelen Abſchnittes des Hufes zu finden, von welchem mad, Fig. 86., der Durchſchnitt iſt, wenn $\angle mad = 90^0$, $ad = g$ und $am = h$ gegeben ſind.

In dieſem Falle iſt

$$m = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = \frac{\sin(90^0+\beta)}{\sin 90^0} = \cos\beta,$$

$$\text{und daher } \frac{n}{m} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha,$$

$$\text{und weil } da : am = 1 : \text{tg}\,\alpha,$$

$$\text{ſo iſt } \text{tg}\,\alpha = \frac{am}{da} = \frac{h}{g} = \frac{n}{m}$$

und es wird alſo

$$V = \frac{2ph}{g}\left[\left(\frac{3a^2-2az+z^2}{6}\right)\sqrt{(2az-z^2)}+a^2(z-a)\,\text{Arc}\sin\sqrt{\left(\frac{z}{2a}\right)}\right].$$

2. Setzt man in der ſo eben gefundenen Formel $z = g$, ſo erhält man den Inhalt H des ganzen Hufes mbac

$$H = \frac{2ph}{g}\left[\left(\frac{3a^2-2ag+g^2}{6}\right)\sqrt{(2ag-g^2)}+a^2(g-a)\,\text{Arc}\sin\sqrt{\left(\frac{g}{2a}\right)}\right].$$

3. Iſt nun $g = 2a$, ſo geht der Huf durch den ganzen Cylinder durch, und es iſt die Grundfläche deſſelben eine vollſtändige Elypſe oder ein vollſtändiger Kreis. In dieſem Falle wird der erſte Theil der Formel $= o$, und es iſt der Inhalt

$$H = \frac{2ph}{2a}\cdot a^3\,\text{Arc}\sin 1 = pha^2\cdot\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\text{und weil } p = \frac{b}{a}, \text{ ſo wird } H = \frac{abh}{2}\cdot\pi.$$

Iſt aber hier die Grundfläche ein Kreis, ſo wird $b = a$ und $H = \frac{h}{2}a^2\pi$; ein Ausdruck, der mit der, bereits §. 74., für dieſen Fall gefundenen Formel übereinſtimmt.

4. Nimmt man in der Formel No. 2. den Werth von $g = a$, ſo iſt die Grundfläche bac des Hufes eine halbe Elypſe oder ein Halbkreis, und es fällt nun der zweite Theil der Formel weg, weil ſie den Factor $g - a = o$ enthält.

In dieſem Falle iſt alſo

$$H = \frac{2ph}{a}\left(\frac{2a^2}{6}\right)\sqrt{a^2} = \tfrac{2}{3}pha^2 = \tfrac{2}{3}abh.$$

Dieſes Reſultat iſt beſonders merkwürdig, da ſich aus demſelben ergiebt, daß jeder Cylinderhuf, der einen Halbkreis oder eine halbe Elypſe zur Grundfläche hat, ſich vollſtändig cubiren läßt; es iſt derſelbe nämlich $\frac{2}{3}$ eines Parallelepipedon, von welchem a, b und h die drei Dimenſionen ſind.

Zuſatz. Iſt bac die Grundfläche eines cylinderförmigen Körpers, von welchem die Grundfläche ein paraboliſches Segment iſt, ſo findet für $\alpha\delta = z$ und $\delta\gamma = y$ für die Curve $\alpha\gamma$, wenn α der Scheitel der Parabel iſt, die Gleichung ſtatt

$$y^2 = pz, \text{ alſo } y = p^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$$

und es iſt nun wiederum, wenn die oben angenommene Bezeichnung beibehalten wird, für $m\delta = x$,

$$z = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta}x = mx.$$

Da nun $Z = \int ydz$, ſo iſt hier

$$Z = p^{\frac{1}{2}}\int z^{\frac{1}{2}}dz = \tfrac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}},$$

Da nun $V = \sin\alpha \int Zdx = n\int Zdx$

und $dx = \frac{dz}{m}$, ſo iſt

$$V = \frac{n}{m}\int Zdz = \frac{n}{m}\cdot\tfrac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}\int z^{\frac{3}{2}}dz.$$

$$= \frac{2n}{3m}\cdot p^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{5}\cdot z^{\frac{5}{2}} = \frac{4n}{15m}\cdot p^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}\cdot z^2;$$

nämlich es iſt $V = \frac{4}{15}\cdot\frac{n}{m}\cdot yz^2$

der Inhalt des halben Hufes $m\alpha\delta\gamma$ mit paraboliſcher Grundfläche. Der Inhalt des ganzen Hufes $m\beta\alpha\gamma$ iſt alſo =

$$2V = \frac{8}{15}\cdot\frac{n}{m}yz^2.$$

Iſt nun der Körper normal, alſo $\beta = 90^0$, ſo wird

$$\frac{n}{m} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{g},$$

wenn hier wieder $da = g$ und $ma = h$ geſetzt wird. Alſo iſt der Kubikinhalt des Hufes

$$= \frac{8}{15} \cdot \frac{hyz^2}{g},$$

alſo wird der des ganzen Hufes mbac $= H$ für $z = g$ erhalten

$$H = \frac{8}{15} hgy.$$

Der Huf eines cylinderförmigen Körpers mit paraboliſcher Grundfläche, wenn dieſe Grundfläche zugleich die des Hufes bildet, iſt alſo immer cubirbar.

Da übrigens die paraboliſche Fläche bac $= \frac{2}{3} gy$ iſt, ſo folgt, wenn man dieſe Fläche mit F bezeichnet,

$$H = \tfrac{2}{5} hF;$$

der Huf iſt alſo $\frac{2}{5}$ eines Prisma, welches mit demſelben gleiche Grundfläche und Höhe hat.

§. 135.

Die Oberfläche der Cylinderhufe.

Behält man die in dem vorigen §. eingeführte Bezeichnung bei, und iſt von dem Hufe mabc, Fig. 86., die Grundfläche bac ein Kreisbogen, ſo läßt ſich die krumme zwiſchen bac und bmc liegende Fläche des Hufes auf folgende Art berechnen.

Es iſt für $\angle$mda $= \alpha$, $\angle$mad $= \beta$, md $= x$ und da $= z$ die Abhängigkeit der Größen x und z von einander durch die Gleichung beſtimmt

$$z = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta} \cdot x = mx.$$

Da nun, nach §. 133. Zuſatz 3.,

$$dS = dx \sqrt{\left[1 - 2\cos\alpha\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]},$$

ſo iſt in dem gegenwärtigen Falle

$$dS = dx\sqrt{[1 - 2m\cos\alpha + m^2]} = kdx = \frac{k}{m} \cdot dz.$$

Weil bac ein Kreisbogen ſein ſoll, ſo hängen die Größen ad $= z$ und dc $= y$, wenn der Radius des Kreiſes $= R$ geſetzt wird, durch die Gleichung von einander ab

$$y^2 = 2Rz - z^2,$$

und es iſt daher $2ydy = 2(R-z)dz$,

$$\text{alſo } \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \frac{(R-z)^2}{y^2};$$

$$\text{folglich iſt } 1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \frac{y^2+(R-z)^2}{y^2} = \frac{R^2}{y^2}$$

$$\text{und es iſt daher } \sqrt{\left[\left(1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]\right.} = \frac{R}{y}.$$

Nach §. 133. Zuſatz 3. No. 3. aber iſt

$$T = \int dz \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]},$$

alſo iſt auch

$$T = \int\frac{Rdz}{y} = \int\frac{Rdz}{\sqrt{(2Rz-z^2)}} = 2R \text{ Arc sin} \sqrt{\frac{z}{2R}},$$

wie auch unmittelbar die Länge des Bogens ac gefunden wird, wenn man ac $= 2R \times 2\varphi$ ſetzt, und die Länge des Bogens φ durch z ausdrückt.

Die krumme Oberfläche eines jeden Hufes wird durch die Gleichung ausgedrückt

$$U = \int TdS,$$

und es iſt daher hier

$$U = \int\left(2R \text{ Arc sin} \sqrt{\frac{z}{2R}}\right) \cdot \frac{k}{m} \cdot dz$$

$$= \frac{k}{m} \cdot 2R \int dz \text{ Arc sin} \sqrt{\frac{z}{2R}}.$$

In dem vorigen §. aber iſt gefunden worden

$$\int dz \text{ Arc sin} \sqrt{\frac{z}{2R}} = (z-R) \text{Arc sin} \sqrt{\frac{z}{2R}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(2Rz-z^2)};$$

folglich iſt auch die krumme Oberfläche des Hufes madc

$$= U = \frac{k}{m}\left[2R(z-R) \text{Arc sin} \sqrt{\frac{z}{2R}} + R\sqrt{(2Rz-z^2)}\right]$$

und die Oberfläche des Hufes mbac iſt alſo

$$= 2U = H = \frac{k}{m}\left[4R(z-R) \text{Arc sin} \sqrt{\frac{z}{2R}} + 2R\sqrt{(2Rz-z^2)}\right]$$

woraus ſich die Werthe für die beſonderen Fälle leicht ableiten laſſen.

Iſt die Seite ga des Cylinders normal auf bac, ſo wird

$$\beta = 90^0 \text{ und } m = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\beta} = \cos\alpha,$$

alſo iſt alsdann $k = \sqrt{(1 - 2m\cos\alpha + \cos^2\alpha)}$

$$= \sqrt{(1 - \cos^2\alpha)} = \sin\alpha$$

und $\frac{k}{m} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{g}$ für da = g und am = h.

Setzt man nun überdies ad = z = 2R, ſo geht der Huf durch den ganzen Cylinder hindurch, und es iſt alsdann auch g = 2R und

$$H = \frac{h}{g} \cdot 4R^2 \text{ Arc sin } 1$$

$$= \frac{4}{2R} \cdot 4R^2 \cdot \tfrac{1}{2}\pi = hR\pi,$$

und für h = R wird die Fläche $= R^2\pi$.

In dieſem Falle iſt die krumme Seitenfläche der Grundfläche gleich.

Setzt man bei einem normalen Hufe g = z = R, ſo wird

$$H = \frac{h}{g} \cdot 2R\sqrt{R^2} = \frac{h}{R} \cdot 2R^2 = 2hR.$$

Die krumme Oberfläche eines Cylinderhufes, deſſen Grundfläche ein Halbkreis iſt, läßt ſich alſo vollſtändig quadriren. Nach dem im vorigen §. Angegebenen iſt derſelbe auch vollſtändig cubirbar, und es iſt der Inhalt $k = \frac{2}{3}R^2h$. Setzt man alſo die krumme Oberfläche = F, ſo wird $k = \frac{RF}{3}$. Der Kubikinhalt eines ſolchen Hufes iſt alſo dem einer Pyramide gleich, welche die krumme Oberfläche zur Grundfläche und den Radius zur Höhe hat.

Will man die ganze Oberfläche des Hufes haben, ſo muß zu dem gefundenen Reſultate noch die Fläche des Kreisabſchnittes bac und des elyptiſchen Abſchnittes bmc addirt werden.

Zuſatz. Um die Formel noch auf einen beſonderen Fall von Cylinderhufen anzuwenden, ſoll hier nun noch ermittelt werden, wie die Oberfläche des Hufes gefunden werden kann, wenn bac, alſo auch die Grundfläche des Cylinders, ein paraboliſcher Abſchnitt iſt, wenn alſo für ad = z und dc = y die Gleichung ſtatt findet

$$y^2 = pz,$$

$$\text{alſo } 2ydy = pdz \text{ und } \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \frac{p^2}{4y^2} = \frac{p}{4z};$$

folglich $T = \int dz \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)} = \int dz \sqrt{\left(1 + \frac{p}{4z}\right)}$

und daher, wie bereits §. 115. gezeigt worden iſt,

$$T = \tfrac{1}{2}\sqrt{(pz+4z^2)} + \frac{p}{4} \log \left(\frac{\sqrt{(p+4z)}+2\sqrt{z}}{\sqrt{p}}\right).$$

Ferner iſt wiederum $dS = \frac{k}{m} dz$,

und man erhält nun

$$U = \int TdS = \frac{k}{2m} \int dz \sqrt{(pz+4z^2)} +$$
$$\frac{k}{4m} p \int dz \log\left(\frac{\sqrt{(p+4z)}+2\sqrt{z}}{\sqrt{p}}\right),$$

wo es nun beſonders darauf ankommt, den Werth zu finden von dem Ausdrucke

$$\int dz \log \left(\frac{\sqrt{(p+4z)}+2\sqrt{z}}{\sqrt{p}}\right) = \int dz \log Z.$$

Es iſt aber nach Meier Hirſch's Integraltafeln, S. 279, ganz allgemein

$$\int Xdx \log Z = \log Z \cdot \int Xdx - \int \frac{dZ \int Xdx}{Z},$$

und es iſt hier, wenn dieſe Formel angewendet werden ſoll,

$X = 1$ und $x = z$, alſo

$$\int dz \log Z = z \log Z - \int \frac{zdZ}{Z}.$$

Da nun $Z = \frac{\sqrt{(p+4z)}+2\sqrt{z}}{\sqrt{p}}$, ſo iſt

$$dZ = \frac{1}{\sqrt{p}}\left[\frac{2dz}{\sqrt{(p+4z)}} + \frac{dz}{\sqrt{z}}\right] = \left(\frac{2\sqrt{z}+\sqrt{(p+4z)}}{\sqrt{p}\cdot\sqrt{(pz+4z^2)}}\right) dz$$
$$= \frac{Zdz}{\sqrt{(pz+4z^2)}}$$

und daher $\int \frac{zdZ}{Z} = \int \frac{zdz}{\sqrt{(pz+4z^2)}}$;

folglich iſt

$$\int dz \log Z = z \log Z - \int \frac{zdz}{\sqrt{(pz+4z^2)}},$$

$$\text{alſo } U = \frac{k}{2m}\int dz\,\sqrt{(pz+4z^2)} + \frac{k}{4m}pz\,\log Z$$

$$-\frac{k}{4m}p\int\frac{zdz}{\sqrt{(pz+4z^2)}} =$$

$$\frac{k}{4m}pz\log Z + \frac{k}{2m}\left[\int dz\sqrt{(pz+4z^2)} - \frac{p}{2}\int\frac{zdz}{\sqrt{(pz+4z^2)}}\right].$$

Nun iſt für $pz+4z^2=X$

$$\int dz\,\sqrt{(pz+4z^2)} = \left(\frac{z}{2}+\frac{p}{16}\right)\sqrt{X} - \frac{p^2}{32}\int\frac{dz}{\sqrt{X}}$$

$$-\frac{p}{2}\int\frac{zdz}{\sqrt{(pz+4z^2)}} = -\frac{p}{8}\sqrt{X} + \frac{p^2}{16}\int\frac{dz}{\sqrt{X}}$$

$$\text{folglich iſt auch } U = \frac{k}{4m}pz\log Z +$$

$$\frac{k}{2m}\left[\left(\frac{z}{2}-\frac{p}{16}\right)\sqrt{X} + \frac{p^2}{32}\int\frac{dz}{\sqrt{X}}\right],$$

und weil

$$\int\frac{dz}{\sqrt{X}} = \log\left[\frac{\sqrt{(p+4z)}+2\sqrt{z}}{\sqrt{p}}\right] = \log Z,$$

ſo wird

$$U = \left(\frac{k}{4m}pz + \frac{k}{2m}\cdot\frac{p^2}{32}\right)\log Z + \frac{k}{2m}\left(\frac{z}{2}-\frac{p}{16}\right)\sqrt{(pz+4z^2)}$$

$$= \frac{k}{4m}\cdot p\left(z+\frac{p}{16}\right)\log Z + \frac{k}{4m}\left(z-\frac{p}{8}\right)\sqrt{(pz+4z^2)},$$

$$\text{wo } Z = \frac{\sqrt{(p+4z)}+2\sqrt{z}}{\sqrt{p}}$$

und es kommt hier keine Conſtante hinzu; übrigens müſſen für k und m die durch Winkel α und β beſtimmten Werthe geſetzt werden, und man muß, um den ganzen Huf mbac zu bekommen, den gefundenen Ausdruck doppelt nehmen.

§. 136.

Von den Kegelhufen.

Es iſt das gleichſchenklige Dreieck abg, Fig. 87., der Axendurchſchnitt eines normalen Kegels, und die Fläche cmd ſenkrecht auf dieſem Durchſchnitte, ſo daß md die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie beider iſt; es ſoll der Inhalt des Hufes macd beſtimmt werden.

Als gegeben kann hier angeſehen werden ga = A, gm = a, ab = 2R, $\angle$mda = α und $\angle$mad = β. Setzt man nun mδ = x, $\delta\alpha$ = z, $\delta\gamma$ = y, mα = t und $\alpha\beta = 2\varrho$, ſo iſt mδ : $\delta\alpha$ = sin β : sin($\alpha+\beta$) und mδ : mα = sin β : sin α, alſo x : z = sin β : sin($\alpha+\beta$) und x : t = sin β : sin α;

hiernach iſt $z = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} \cdot x = mx$

und $t = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot x = nx = \frac{n}{m} z.$

Da ferner ga : ab = gα : $\alpha\beta$,

alſo A : 2R = (a + t) : 2ϱ,

ſo iſt $2\varrho = \frac{2R}{A}(a+t) = \frac{2R}{A}\left(a + \frac{n}{m} z\right).$

Der Ausdruck für die Fläche $\alpha\delta\gamma$ = Z iſt für jede Abſciſſe $\alpha\delta$ = z und $\delta\gamma$ = y

$$Z = \int y dz;$$

da nun $\alpha\delta : \delta\gamma = \delta\gamma : \delta\beta$

oder $z : y = y : 2\varrho - z$,

ſo iſt $y = \sqrt{(2\varrho z - z^2)}$,

und es iſt daher, weil bei Berechnung der Fläche von $\alpha\delta\gamma$ die Größe ϱ als conſtant angeſehen werden muß,

$$Z = \int dz \sqrt{(2\varrho z - z^2)},$$

und dieſes giebt, wie bereits öfter gezeigt worden iſt,

$$Z = \frac{z-\varrho}{2} \sqrt{(2\varrho z - z^2)} + \varrho^2 \operatorname{Arc\,sin} \sqrt{\frac{z}{2\varrho}}.$$

Um nun den Inhalt des Hufes m$\alpha\delta\gamma$ = V zu finden, der nach §. 133. Zuſatz No. 2 iſt

$$V = \sin\alpha \int Z dx = \frac{\sin\alpha}{m} \int Z dz,$$

muß in dem für Z gefundenen Werthe ſtatt ϱ der Werth geſetzt werden, der durch die Gleichung beſtimmt iſt

$$2\varrho = \frac{2Ra}{A} + \frac{2R}{A} \cdot \frac{n}{m} z,$$

wofür man zur Abkürzung ſetzen kann

$$2\varrho = p + qz,$$

alſo $\frac{z-\varrho}{2} = \frac{(2-q)z - p}{4}$

$$2\varrho z - z^2 = pz + (q-1)z^2$$

$$\varrho^2 = \frac{(p+qz)^2}{4} \text{ und } \frac{z}{2\varrho} = \frac{z}{p+qz}.$$

Es iſt alſo Z =

$$\frac{(2-q)z-p}{4}\sqrt{(pz+(q-1)z^2)}+\frac{(p+qz)^2}{4}\text{ Arc sin}\sqrt{\frac{z}{p+qz}}$$

und dieſes giebt nun den allgemeinen Ausdruck für einen Kegelhuf $\frac{m}{\sin\alpha}V = \int Zdz =$

$$\int dz\left(\frac{(2-q)z-p}{4}\right)\sqrt{[pz+(q-1)z^2]}\int dz\left(\frac{(p+qz)^2}{4}\right)\text{Arcsin}\sqrt{\frac{z}{p+qz}}.$$

In dieſem Ausdrucke iſt $p = \frac{2Ra}{A}$ von dem Winkel $\alpha m\delta$, unter welchem md die Seite ga des Kegels ſchneidet, ganz unabhängig; dagegen ändert ſich der Werth von q =

$$\frac{2R}{A}\cdot\frac{n}{m} = \frac{2R}{A}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$

ſo wie md mit ma einen andern Winkel bildet. Da übrigens die beiden Integralien, von welchen $\int Zdz$ abhängt, welches auch die Werthe von p und q ſein mögen, doch immer gefunden werden können, ſo folgt, daß auch der Inhalt des Kegelhufes V unter allen Umſtänden ſich berechnen läßt. Doch iſt hierbei nicht zu überſehen, daß der Werth von

$$\int dz\left(\frac{(2-q)z-p}{4}\right)\sqrt{(pz+(q-1)z^2)}$$

durch Kreisbogen beſtimmt wird, wenn q — 1 einen negativen Werth hat, und durch Logarithmen, wenn der Werth von q — 1 poſitiv iſt; in dem erſteren Falle iſt die obere Fläche des Hufes ein elyptiſches und in dem letzteren ein hyperboliſches Segment.

Um nun den gefundenen Ausdruck für einen beſonderen Fall wirklich zu entwickeln, ſoll der Werth des Hufes für den Fall genauer beſtimmt werden, wenn $m\gamma cd$ ein paraboliſches Segment iſt, wenn alſo md parallel zu gb iſt. In dieſem Falle wird, weil agb ein gleichſchenkliges Dreieck ſein ſoll, $\angle m\delta\alpha = \angle m\alpha\delta$, alſo $\alpha = \beta$,

alſo $\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}$ und daher

$$q = \frac{R}{A\cos\alpha}.$$

Da aber

$$ga : \frac{ab}{2} = 1 : \cos a,$$

$$\text{alſo } A : R = 1 : \cos\alpha, \text{ ſo iſt } \frac{R}{A\cos\alpha} = 1,$$

und daher auch $q = 1$. Es iſt alſo, wenn die untere Fläche eines Kegelhufes ein Kreisabſchnitt und die obere ein paraboliſcher Abſchnitt iſt, die Formel für den Inhalt des Hufes durch die Gleichung beſtimmt

$$\frac{m}{\sin\alpha} \cdot V = 2\cot\alpha \cdot V =$$

$$\int dz \left(\frac{z-p}{4}\right)\sqrt{pz} + \int dz \cdot \frac{(p+z)^2}{4} \text{ Arc sin} \sqrt{\frac{z}{p+z}};$$

folglich iſt $8\cot\alpha \cdot V =$

$$\int(z-p)\,dz\sqrt{pz} + \int(p+z)^2 dz \text{ Arc sin} \sqrt{\frac{z}{p+z}},$$

und weil

$$\int(z-p)dz\sqrt{pz} = p^{\frac{1}{2}}\int(z^{\frac{3}{2}} - pz^{\frac{1}{2}}) = p^{\frac{1}{2}}(\tfrac{2}{5} \cdot z^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{3}pz^{\frac{3}{2}})$$

$$= \tfrac{2}{5}z^2\sqrt{pz} - \tfrac{2}{3}pz\sqrt{pz} = 2z\left(\frac{z}{5} - \frac{p}{3}\right)\sqrt{pz},$$

ſo iſt nun auch

$$8\cot\alpha \cdot V - 2z\left(\frac{z}{5} - \frac{p}{3}\right)\sqrt{pz} =$$

$$\int(p+z)^2 dz \text{ Arc sin} \sqrt{\frac{z}{p+z}} = P.$$

Um dieſes hier vorkommende Integral nun noch zu finden, ſetze man

$$\frac{z}{p+z} = v^2, \text{ alſo } z = \frac{pv^2}{1-v^2}$$

$$p + z = \frac{p}{1-v^2} \text{ und } dz = \frac{2pvdv}{(1-v^2)^2}.$$

Für dieſe Werthe wird

$$\int(p+z)^2 dz \text{ Arc sin} \sqrt{\frac{z}{p+z}} = P,$$

$$\int \frac{2p^3vdv}{(1-v^2)^4} \text{ Arc sin } v = 2p^3 \int \frac{vdv}{(1-v^2)^4} \text{ Arc sin } v.$$

Nun iſt ganz allgemein nach Meier Hirſch's Integraltafeln, Seite 289.,

$$\int X dx \operatorname{Arc}\sin x = \operatorname{Arc}\sin x \cdot \int X dx - \int \frac{dx \int X dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

und es iſt daher hier, wenn man v ſtatt x ſetzt und $X = \frac{vdv}{(1-v^2)^4}$ annimmt,

$$\int \frac{vdv}{(1-v^2)^4} \operatorname{Arc}\sin v = \operatorname{Arc}\sin v \cdot \int \frac{vdv}{(1-v^2)^4} - \int dv \left[\frac{\int \frac{vdv}{(1-v^2)^4}}{\sqrt{(1-v^2)}} \right].$$

Da aber $\int \frac{vdv}{(1-v^2)^4} = \frac{1}{6(1-v^2)^3}$,

ſo wird $\frac{P}{2p^3} = \int \frac{vdv}{(1-v^2)^4} \operatorname{Arc}\sin v = \frac{\operatorname{Arc}\sin v}{6(1-v^2)^3} - \int \frac{dv}{6(1-v^2)^3 \sqrt{(1-v^2)}}.$

Es iſt aber gefunden worden

$$8 \cot\alpha \cdot V - 2z \left(\frac{z}{5} - \frac{p}{3}\right) \sqrt{pz} = P,$$

alſo iſt auch

$$\frac{6}{p^3} \left[4 \cot\alpha V - z \left(\frac{z}{5} - \frac{p}{3}\right) \sqrt{pz} \right] = \frac{\operatorname{Arc}\sin v}{(1-v^2)^3} - \int \frac{dv}{(1-v^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

Nun iſt aber, wie aus Meier Hirſch's Integraltafeln, S. 150., ſich ergiebt,

$$\int \frac{dv}{(1-v^2)^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{(1-v^2)^5}} + \frac{4}{3\sqrt{(1-v^2)^3}} + \frac{8}{3\sqrt{(1-v^2)}} \right) v$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{(1-v^2)^2} + \frac{4}{3(1-v^2)} + \frac{8}{3} \right) \sqrt{\frac{v^2}{1-v^2}}$$

oder, weil $v^2 = \frac{z}{p+z}$ und alſo $1 - v^2 = \frac{p}{p+z}$,

$$\int \frac{dv}{(1-v^2)^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{5} \left(\frac{(p+z)^2}{p^2} + \frac{4(p+z)}{3p} + \frac{8}{3} \right) \sqrt{\frac{z}{p}}$$

$$= \frac{1}{15} \left(\frac{3(p+z)^2 + 4p(p+z) + 8p^2}{p^2} \right) \frac{\sqrt{pz}}{p}$$

$$= \frac{1}{15p^3} (15p^2 + 10pz + 3z^2) \sqrt{pz}.$$

Hiernach iſt nun auch

$$\frac{6}{p^3}\left[4\cot\alpha\cdot V-\frac{1}{15}(3z^2-5pz)\sqrt{pz}\right]=\left(\frac{p+z}{p}\right)^3 \text{Arc}\sin\sqrt{\frac{z}{p+z}}$$
$$-\frac{1}{15p^3}(15p^2+10pz+3z^2)\sqrt{zp},$$

und hieraus folgt $24\cot\alpha\cdot V=(p+z)^3\text{Arc}\sin\sqrt{\left(\frac{z}{p+z}\right)}$

$$+\frac{1}{15}(18z^2-30pz)\sqrt{pz}-\frac{1}{15}(15p^2+10pz+3z^2)\sqrt{pz}=$$
$$\frac{1}{15}(15z^2-40pz-15p^2)\sqrt{pz}+(p+z)^3\text{Arc}\sin\sqrt{\left(\frac{z}{p+z}\right)}.$$

Es iſt alſo der Inhalt des ganzen Hufes, von welchem $mad\gamma$ die Hälfte iſt, =

$$2V=\text{tg}\,\alpha\cdot\frac{(p+z)^3}{12}\text{Arc}\sin\sqrt{\frac{z}{p+z}}+$$
$$\frac{\text{tg}\,\alpha}{36}(3z^2-8pz-3p^2)\sqrt{pz}.$$

Weil aber, wenn der normale Abſtand des Punktes m von $\alpha\delta=h$ geſetzt wird, die Proportion ſtatt findet

$$\tfrac{1}{2}z : h = 1 : \text{tg}\,\alpha, \text{ ſo iſt } \text{tg}\,\alpha=\frac{2h}{z}$$

und es wird

$$2V=\frac{h}{6z}(p+z)^3\text{Arc}\sin\sqrt{\left(\frac{z}{p+z}\right)}+$$
$$\frac{h}{18z}(3z^2-8pz-3p^2)\sqrt{pz},$$

wo keine Conſtante hinzukommt, da für $z=0$ auch $V=0$ wird.

Nimmt man nun $z=ad=\frac{ab}{2}=R$, ſo wird auch $h=\frac{1}{2}H$, wenn H die Höhe des ganzen Kegels bedeutet und $gm=ma$, alſo $a=\frac{1}{2}A$, und daher

$$p=\frac{2\cdot Ra}{A}=R,$$

folglich iſt in dieſem Falle der Inhalt des Hufes

$$2V=\frac{h}{6R}\cdot 8R^3\,\text{Arc}\sin\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{h}{18R}\cdot 8R^3$$

$$= \tfrac{2}{3}R^2H \cdot \text{Arc sin} \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{2}{9}HR^2$$

oder weil $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sin 45^0$, ſo iſt $\text{Arc sin} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\pi$

und daher

$$2V = \tfrac{1}{6}R^2H\pi - \tfrac{2}{9}HR^2.$$

Nun iſt der halbe Kegel $= \frac{1}{6}R^2\pi$, folglich iſt der Inhalt des Körpers, welcher von dem halben Kegel übrig bleibt, wenn man den Huf hinwegnimmt, deſſen obere Fläche eine Parabel iſt, und der mit dem halben Kegel den Halbkreis gemeinſchaftlich zur Grundfläche hat, $= \frac{2}{9}HR^2$, vollſtändig cubirbar.

Zuſatz 1. Für $q - 1 = \pm \mu$ iſt die allgemeine Formel für den Kubikinhalt der Kegelhufe, gleichviel ob die obere Fläche eine Parabel, Hyperbel oder Elypſe iſt,

$$V = \frac{\sin\alpha}{m}\int dz \left(\frac{(2-q)\ z - p}{4}\right) \int\sqrt{(pz \pm \mu z^2)}$$

$$+ \frac{\sin\alpha}{m}\int dz \left(\frac{(p + qz)^2}{4}\right) \text{Arc sin} \sqrt{\frac{z}{p+z}}.$$

und es läßt ſich der Inhalt eines jeden Kegelhufes ohne Ausnahme berechnen.

Zuſatz 2. Die für den Kegelhuf, deſſen obere Fläche eine Parabel iſt, gefundene Formel, wenn die untere Fläche des Hufes der Halbkreis wird =

$$2V = \tfrac{1}{6}R^2H\pi - \tfrac{2}{9}HR^2,$$

läßt ſich auch unmittelbar auf folgende Art ableiten: Es iſt der Inhalt des Hufes der Differenz gleich, welche erhalten wird, wenn man von einer Pyramide, welche mit dem Kegel gleiche Höhe hat und deren Grundfläche ein Halbkreis $= \frac{1}{2}R^2\pi$ iſt, die Pyramide abzieht, welche die Parabel, von welcher dm die Hälfte iſt, zur Grundfläche hat und deren Höhe dem ſenkrechten Abſtande des Punktes G von md gleich iſt. Es iſt alſo, wenn dieſe beiden Pyramiden mit Q und q bezeichnet werden,

$$2V = Q - q$$

und da $Q = \frac{1}{3}H \times \frac{1}{2}R^2\pi = \frac{1}{6}HR^2\pi$,

ſo iſt $2V = \frac{1}{6}HR^2\pi - q$.

Setzt man aber die Höhe von q, welche dem Abſtande des Punktes g von der verlängerten md gleich ſein muß, $=h$, ſo iſt $bd : h = ag : H$,

$$\text{oder } R : h = A : H, \text{ alſo } h = \frac{RH}{A}$$

und die Grundfläche von $q = 2 \times mdc$ iſt

$$= 2 \times \frac{2}{3}(md)(dc) = \frac{4}{3}(md) \cdot R = \frac{4}{3} \cdot \frac{A}{2} \cdot R$$

$= \frac{2}{3}AR$, folglich iſt

$$q = \frac{1}{3} \times \frac{RH}{A} \cdot \tfrac{2}{3}AR = \tfrac{2}{9}HR^2$$

$$\text{und daher } 2V = \tfrac{1}{6}HR^2\pi - \tfrac{2}{9}HR^2.$$

§. 137.

Die Oberfläche der Kegelhufe.

Es iſt ganz allgemein die Gleichung, durch welche $\delta\gamma = y$, Fig. 87., von $\alpha\delta = z$ abhängt,

$$y^2 = 2\varrho z - z^2,$$

$$\text{alſo } 2y dy = 2(\varrho - z)\, dz$$

$$\text{und daher } \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \frac{(\varrho - z)^2}{y^2};$$

$$\text{alſo } 1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \frac{y^2 + (\varrho - z)^2}{y^2} = \frac{\varrho^2}{y^2}$$

$$\text{und daher } \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)} = \frac{\varrho}{y} = \frac{\varrho}{\sqrt{(2\varrho z - z^2)}}.$$

Da nun, wenn der Bogen $\alpha\gamma = T$ geſetzt wird,

$$T = \int y dz,$$

$$\text{ſo iſt auch } T = \varrho \int \frac{dz}{\sqrt{(2\varrho z - z^2)}} = 2\varrho \text{ Arc sin } \sqrt{\frac{z}{2\varrho}}.$$

Ferner iſt, wenn man, Fig. 87., $m\alpha = S$ ſetzt, für $\angle m\delta\alpha = \alpha$ und $\angle m\alpha\delta = \beta$,

$$m\alpha : \alpha\delta = \sin\alpha : \sin(\alpha + \beta),$$

$$\text{oder } S : z = \sin\alpha : \sin(\alpha + \beta),$$

$$\text{folglich iſt } S = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}\, z,$$

und, weil §. 136. geſetzt worden iſt $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}=$ m und $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=$ n,

$$\text{ſo iſt } \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{n}{m},$$

$$\text{alſo } S=\frac{n}{m}z \text{ und daher } dS=\frac{n}{m}dz.$$

Nach §. 133. Zuſatz 2. No. 5. wird die krumme Oberfläche U eines Hufes ausgedrückt durch

$$U=\int TdS,$$

alſo iſt in dem gegenwärtigen Falle

$$U=\int\frac{n}{m}\,dz\cdot 2\varrho \text{ Arc sin } \sqrt{\frac{z}{2\varrho}},$$

wo ϱ ebenfalls einen veränderlichen Werth hat, nämlich es iſt nach §. 136.

$$2\varrho=\frac{2Ra}{A}+\frac{2R}{A}\cdot\frac{n}{m}z$$
$$=p+qz.$$

Hiernach iſt $U=\frac{n}{m}\int(p+qz)\,dz \text{ Arc sin } \sqrt{\left(\frac{z}{p+qz}\right)}$.

Setzt man nun $\frac{z}{p+qz}=v^2$, ſo wird

$$z=\frac{pv^2}{1-qv^2},\ p+qz=\frac{p}{1-qv^2} \text{ und } dz=\frac{2pvdv}{(1-qv^2)^2};$$

es iſt alſo auch, wenn man dieſe Werthe ſubſtituirt,

$$\frac{m}{n}U=\int\frac{2p^2vdv}{(1-qv^2)^3}\text{ Arc sin v}.$$

Nun iſt nach Meier Hirſch's Integraltafeln, S. 289.,

$$\int Xdv \text{ Arc sin v} = \text{Arc sin v}\cdot\int Xdv-\int\left(\frac{dv\int Xdv}{\sqrt{(1-v^2)}}\right),$$

alſo iſt auch, wenn hier die Funktion $Xdv=\frac{2p^2vdv}{(1-qv^2)^3}$ geſetzt wird,

$$\frac{m}{n}U=\text{Arc sin v}\cdot\int\frac{2p^2vdv}{(1-qv^2)^3}-\int\left(\frac{dv\int Xdv}{\sqrt{(1-v^2)}}\right).$$

Nach Meier Hirſch S. 50 aber iſt

$$\int \frac{vdv}{(1-qv^2)^3} = \frac{1}{4q\,(1-qv^2)^2},$$ folglich iſt auch

$$\frac{m}{n}\,U = \frac{p^2}{2q\,(1-qv^2)^2}\,\text{Arc}\sin v - \frac{p^2}{2q}\int \frac{dv}{(1-qv^2)^2\sqrt{(1-v^2)}}.$$

Der einfachſte Fall iſt hier nun der, wenn $q = 1$ iſt; in dieſem Falle wird, wie bereits §. 136. gezeigt worden iſt, $\alpha = \beta$ und die obere Fläche des Hufes iſt ein paraboliſches Segment. Alsdann iſt $\frac{m}{n} = 2\cos\alpha$ und alſo

$$2\cos\alpha \cdot U = \frac{p^2}{2(1-v^2)^2}\,\text{Arc}\sin v - \frac{p^2}{2}\int \frac{dv}{(1-v^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Da nun nach Meier Hirſch's Integraltafeln S. 148.

$$\int \frac{dv}{(1-v^2)^{\frac{5}{2}}} = (-\tfrac{2}{3}v^3 + v)\,(1-v^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-2v^3+3v}{3(1-v^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ſo wird

$$2\cos\alpha \cdot U = \frac{p^2}{2(1-v^2)^2}\,\text{Arc}\sin v + \frac{p^2\,(2v^3-3v)}{6\,(1-v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es iſt aber $v^2 = \frac{z}{p+z}$ und $1 - v^2 = \frac{p}{p+z}$,

alſo iſt auch

$$\frac{p^2}{2(1-v^2)^2}\,\text{Arc}\sin v = \frac{(p+z)^2}{2}\,\text{Arc}\sin\sqrt{\frac{z}{p+z}}$$

$$\text{und}\ \frac{p^2\,(2v^3-3v)}{6\,(1-v^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{p^2}{6}\cdot\frac{2v^2-3}{1-v^2}\cdot\sqrt{\frac{v^2}{1-v^2}}$$

$$= \frac{p^2}{6}\cdot\frac{-(3p+z)}{p}\cdot\sqrt{\frac{z}{p}}$$

und daher iſt

$$2U = -\frac{p\,(3p+z)}{6\cos\alpha}\sqrt{\frac{z}{p}} + \frac{(p+z)^2}{2\cos\alpha}\,\text{Arc}\sin\sqrt{\frac{z}{p+z}},$$

wo nun noch für p der Werth $= \frac{2Ra}{A}$ geſetzt werden muß.

Dieſes iſt alſo die Formel für die krumme Oberfläche eines Kegelhufes, deſſen obere Fläche das paraboliſche Segment iſt, von welchem $a\gamma cd$ die Hälfte beträgt.

Zuſatz 1. Setzt man in der gefundenen Formel $ad = z = R$, ſo wird $am = a = \frac{1}{2}A$, alſo auch $p = R$, und weil

$A : R = 1 : \cos\alpha$, ſo wird alsdann $\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{A}{R}$ und daher bekommt man

$$2U = -\frac{4R^2}{6} \cdot \frac{A}{R} + \frac{4R^2}{2} \cdot \frac{A}{R} \cdot \text{Arc sin} \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$= -\tfrac{2}{3}AR + 2AR \cdot \tfrac{1}{4}\pi$$
$$= -\tfrac{2}{3}AR + \tfrac{1}{2}AR\pi.$$

Es iſt aber $\frac{1}{2}AR\pi$ die krumme Oberfläche des halben Kegels, alſo iſt die krumme Oberfläche des Körpers, welcher von dem halben Kegel übrig bleibt, wenn der paraboliſche Huf hinweg genommen wird, deſſen Grundfläche der Halbkreis iſt, $= \frac{2}{3}AR$ vollſtändig quadrirbar.

Zuſatz 2. Die Ermittelung der kummen Oberfläche eines Hufes für den Fall, wenn q nicht $= 1$ iſt, wenn alſo die obere Fläche des Hufes ein elyptiſches oder ein hyperboliſches Segment iſt, beruhet auf der Beſtimmung des Werthes von dem Integrale $= \int \frac{dv}{(1-qv^2)^2 \sqrt{(1-v^2)}}$. Es iſt gewiß nicht überflüſſig, wenn bei dieſer Gelegenheit gezeigt wird, wie es möglich iſt, dieſen Ausdruck auf Formen zurückzuführen, deren Integralien unmittelbar gefunden werden. Zu dieſer Abſicht ſetze man

$$\sqrt{(1-v^2)} = 1 - vw, \text{ alſo } 1 - v^2 = 1 - 2vw + v^2w^2$$
$$\text{und } v = 2w - vw^2,\ v = \frac{2w}{1+w^2}.$$

Hieraus folgt nun $dv = \frac{2(1+w^2)\,dw - 2w \cdot 2wdw}{(1+w^2)^2}$

$$\text{oder } dv = \frac{2(1-w^2)\,dw}{(1+w^4)^2},$$

$$\text{und } \sqrt{(1-v^2)} = 1 - vw = 1 - \frac{2w^2}{1+w^2} = \frac{1-w^2}{1+w^2}.$$

$$\text{Es iſt alſo } \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)}} = \frac{2dw}{1+w^2}$$

$$(1-qv^2) = 1 - q\left(\frac{2w}{1+w^2}\right)^2 = 1 - \frac{4qw^2}{(1+w^2)^2} = \frac{(1+w^2)^2 - 4qw^2}{(1+w^2)^2}$$

$$\text{und daher wird } \frac{dv}{(1-qv^2)^2\sqrt{(1-v^2)}} =$$

$$\frac{2dw}{1+w^2} \times \frac{(1+w^2)^4}{[(1+w^2)^2 - 4qw^2]^2} = \frac{2(1+w^2)^3 dw}{[(1+w^2)^2 - 4qw^2]^2}$$

ein Ausdruck, der rational iſt, und von welchem das Integral daher auch leicht gefunden werden kann. Uebrigens läßt ſich dieſer Ausdruck noch auf eine einfachere Form bringen, wenn man $q = m^2$ ſetzt; hierdurch wird derſelbe

$$= \frac{2(1+w^2)^3 dw}{[(1+w^2)^2 - 4m^2w^2]^2} = \frac{2(1+w^2)^3 dw}{(1+2mw+w^2)^2(1-2mw+w^2)^2}.$$

Da nun geſetzt werden kann

$$\frac{2(1+w^2)^3}{(1+2mw+w^2)^2(1-2mw+w^2)^2} =$$

$$\frac{A+Bw}{(1+2mw+w^2)^2} + \frac{C+Dw}{(1+2mw+w^2)} + \frac{\alpha+\beta w}{(1-2mw+w^2)^2} + \frac{\gamma+\delta w}{(1-2mw+w^2)}$$

und die hier vorkommenden 8 unbeſtimmten Coefficienten auf die bekannte Weiſe ſich beſtimmen laſſen, ſo folgt, daß es bei der Ermittelung des Werthes von $\int \frac{dv}{(1-qv^2)\sqrt{(1-v^2)}}$ blos darauf ankommt, den Werth zu beſtimmen von

$$\int \frac{(g+hw)\,dw}{(1 \pm 2mw + w^2)^n}$$

wo n nur die Werthe 1 und 2 hat.

Uebrigens iſt leicht einzuſehen, daß durch ein ähnliches Verfahren auch der, §. 136. Zuſatz 1., angegebene Werth für den Inhalt V irgend eines Kegelhufes auf dieſelben Formen ſich zurückführen läßt.

§. 138.

Von dem Inhalte der kuppelförmigen Körper.

Man nennt einen kuppelförmigen Körper überhaupt jeden in eine Spitze oder in einen Scheitel zulaufenden Körper, in welchem alle Querſchnitte, die parallel zur Grundfläche geführt werden, ähnliche Figuren ſind, die von den gewöhnlichen Pyramiden ſich nur dadurch unterſcheiden, daß, wenn man

die Spitze oder den Scheitel eines ſolchen Körpers mit irgend einem Punkte des Umfanges der Grundfläche verbindet, die Verbindungslinie ſtatt einer geraden Linie, eine Curve iſt.

Iſt, Fig. 85., m der Scheitel und abc die Grundfläche eines kuppelförmigen Körpers, und $\alpha\beta\gamma$ parallel zur Grundfläche, ſo müſſen nach der gegebenen Erklärung die Figuren abc und $\alpha\beta\gamma$ einander ähnlich ſein, und, wie ſich von ſelbſt verſteht, auch eine ähnliche Lage haben. Zieht man alſo von m aus irgend eine gerade Linie md durch den Körper, ſo hat auch der Punkt d in der Figur abc dieſelbe Lage, wie δ in $\alpha\beta\gamma$ und es iſt daher, wenn da und $\delta\alpha$ und eben ſo auch db und $\delta\beta$ parallel gezogen werden,

$$da : \delta\alpha = db : \delta\beta;$$

daſſelbe Verhältniß findet auch für jedes andere Paar paralleler Linien ſtatt, die von d und δ aus in den Ebenen abc und $\alpha\beta\gamma$ bis zu dem Umfange der Figuren gezogen werden können. Setzt man alſo $db = m \times (da)$, ſo iſt auch $\delta\beta = m \times (\delta\alpha)$.

Wird alſo für die Abſciſſenlinie md, wenn man $md = x$ und $\delta\alpha = z$ ſetzt, die Gleichung der Curve $m\alpha a$ ausgedrückt durch die Function $z = f(x)$ und man ſetzt nun $\delta\beta = y$, ſo iſt, weil $y = mz$, auch $y = mf(x)$. Die Gleichung für die Curve $m\beta b$ unterſcheidet ſich von der für $m\alpha a$ alſo nur durch einen Factor m, deſſen Werth beſtimmt iſt, ſobald man die Grundfläche abc und die Lage des Punktes d in derſelben kennt, und die Lage von db gegen da gegeben iſt. Hieraus geht alſo hervor, daß die Curven $m\alpha a$ und $m\beta b$ zu einer und derſelben Gattung gehören. Die kuppelförmigen Körper haben alſo die Eigenſchaft, daß alle von dem Scheitel m an den Umfang der Grundfläche gezogenen Curven von einer Gattung ſind, nur daß die vorkommenden conſtanten Größen verſchiedene Werthe haben. Iſt z. B. $m\alpha a$ eine Parabel, m der Scheitel und md die Axe derſelben, ſo iſt $z^2 = px$ und weil $y = mz$, ſo iſt auch $\left(\frac{y}{m}\right)^2 = px$, alſo $y^2 = m^2px$, welches ebenfalls die Gleichung für eine Parabel iſt, nur daß hier m^2p den Parameter bildet, während derſelbe in der Glei-

chung $z^2 = px$ den Werth $= p$ hat. Iſt $m\alpha a$ ein elyptiſcher Bogen und md ein Theil der großen Axe derſelben, ſo iſt

$$z^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

$$\text{und } y^2 = m^2 z^2 = \frac{m^2 b^2}{a^2}(2ax - x^2);$$

es unterſcheiden ſich die beiden Elypſen $m\alpha a$ und $m\beta b$ alſo nur dadurch, daß bei der erſtern b und bei der andern mb die halbe kleine Axe iſt.

Da die Gleichung für den Kubikinhalt V aller Körper, die zu der, §. 133., beſchriebenen Gattung gehören,

$$V = \sin\alpha \int Z dx$$

iſt, und hier, wenn die Fläche $\alpha\delta\beta = Z$ und die bekannte Fläche $adb = F$ geſetzt wird, die Proportion ſtatt findet

$$F : Z = (ad)^2 : (\alpha\delta)^2 = a^2 : z^2,$$

wenn man $da = a$ ſetzt: ſo iſt

$$Z = \frac{F}{a^2} \cdot z^2,$$

$$\text{und daher iſt } V = \frac{F}{a^2} \sin\alpha \int z^2 dx,$$

und es wird dieſe Gleichung, wenn md normal auf die Grundfläche abc gezogen iſt, weil alsdann $\alpha = 90^\circ$ und $\sin\alpha = 1$,

$$V = \frac{F}{a^2} \int z^2 dx.$$

Iſt aber $\angle mda = 90^\circ$, und es dreht ſich die Fläche $m\alpha ad$ um md als um eine Axe, ſo iſt für $m\delta = x$ und $\delta\alpha = z$ der Inhalt des erzeugten Körpers, nach §. 122., wenn man denſelben mit W bezeichnet,

$$W = \pi \int z^2 dx,$$

$$\text{alſo iſt auch } V = \frac{F}{a^2\pi} \cdot W$$

$$\text{und } V : W = F : a^2\pi = F : G.$$

Es iſt aber $a^2\pi = G$ die Grundfläche des Körpers, welcher durch die Umdrehung von $m\alpha ad$ um ad erzeugt wird; folglich verhält ſich der kuppelförmige und der konoidiſche Körper zu einander, wie ihre Grundflächen, wobei blos vorausgeſetzt wird, daß md ſenkrecht auf der Grundfläche iſt, die Lage von $da = a$ aber ganz beliebig angenommen werden kann.

Um dieſes durch einige Beiſpiele zu erläutern, nehme man an, es ſei die Grundfläche des kuppelförmigen Körpers ein regelmäßiges nEck, d der Mittelpunkt deſſelben, da = R der Radius des Kreiſes, welcher um daſſelbe beſchrieben werden kann, und dm ſenkrecht auf der Grundfläche, ſo iſt

$$F = \frac{nR^2 \sin\varphi}{2},$$

wenn φ der Centriwinkel des Vielecks $= \frac{360}{n}$ iſt.

Es ſei nun

1. $m\alpha a$ ein Kreisquadrant, alſo $dm = da = R$, ſo wird W, indem $m\alpha a d$ um md ſich dreht, eine Halbkugel, und $m\delta\alpha$ beſchreibt einen Kugelabſchnitt. Für $m\delta = x$ und $\gamma\alpha = z$ iſt alſo

$$z^2 = 2Rx - x^2,$$

$$\text{und } \int z^2 dx = \int (2Rx - x^2)dx = Rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3,$$

folglich iſt der Kugelabſchnitt $W = (Rx^2 - \frac{1}{3}x^3)\pi$, die Grundfläche G deſſelben $= z^2\pi$, während $F = \frac{nz^2 \sin\varphi}{2}$ iſt.

Da nun $G : F = W : V$,

ſo iſt auch $z^2\pi : \frac{nz^2 \sin\varphi}{2} = W : V = (Rx^2 - \frac{1}{3}x^3)\pi : V$,

alſo $2 : n \sin\varphi = (Rx^2 - \frac{1}{3}x^3) : V$

und daher iſt $V = \frac{n \sin\varphi}{2}(Rx^2 - \frac{1}{3}x^3)$

der Inhalt eines jeden Abſchnittes $m\alpha\beta\gamma$ des kuppelförmigen Körpers, deſſen Grundfläche ein regelmäßiges nEck iſt, und in welchem die Linien $m\alpha a$, $m\beta b$ ꝛc. Kreisquadranten ſind.

Für $x = R$ erhält man den Inhalt der ganzen Kuppel mabc =

$$V = \frac{n \sin\varphi}{2} \cdot \frac{2R^3}{3} = \frac{nR^3 \sin\varphi}{3}.$$

W iſt in dieſem Falle eine Halbkugel $= \frac{2R^3\pi}{3}$, und es iſt daher alsdann

$$V : W = n \sin\varphi : 2\pi.$$

Für n = 12 z. B. wird hiernach $\varphi = 30^0$ und $\sin\varphi = \frac{1}{2}$;

alſo iſt für dieſen Werth von n

$$V : W = 6 : 2\pi = 3 : \pi.$$

2. Sind $m\alpha a$, $m\beta b$ etc. paraboliſche Bogen von der Art, wie $\alpha q y$, Fig. 67., ſo iſt für $a\beta = a$, $\beta\alpha = b$, $\alpha c = x$ und $cy = z$, da

$$(a\beta) : (ax) = (\beta\alpha)^2 : (xy)^2,$$

$$a : a + x = b^2 : (b + z)^2,$$

$$\text{alſo } (b+z)^2 = b^2\left(\frac{a+x}{a}\right)$$

$$\text{und daher } z = b\sqrt{\left(\frac{a+x}{a}\right)} - b.$$

Der Inhalt des durch die Umdrehung von $\alpha q y c$ um αc erzeugten Körpers iſt daher

$$W = \pi \int z^2 dx$$

$$= \pi \int dx\left[b^2\left(\frac{a+x}{a}\right) + b^2 - 2b^2\sqrt{\left(\frac{a+x}{a}\right)}\right]$$

$$= b^2\pi \int dx\left[1 + \left(\frac{a+x}{a}\right) - 2\sqrt{\left(\frac{a+x}{a}\right)}\right]$$

$$= b^2\pi\left[x + \int dx\left(\frac{a+x}{a}\right) - 2\int dx\sqrt{\left(\frac{a+x}{a}\right)}\right]$$

$$= b^2\pi\left[x + x + \frac{x^2}{2a} - \tfrac{4}{3}(a+x)\sqrt{\left(\frac{a+x}{a}\right)}\right] + C$$

$$= \frac{b^2\pi}{a}\left[2ax + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{4}{3}(a+x)\sqrt{a(a+x)} + C,\right]$$

und weil für $x = o$ auch $W = o$ ſein muß, ſo iſt

$$C = \frac{b^2\pi}{a} \cdot \tfrac{4}{3}a^2 = \tfrac{4}{3}ab^2\pi,$$

und alſo iſt der vollſtändige Werth von W, da der Parameter p der Parabel $= \dfrac{b^2}{a}$ iſt,

$$W = p\pi\left[2ax + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{4}{3}a^2 - \tfrac{4}{3}(a+x)\sqrt{a(a+x)}\right].$$

Die Grundfläche G des Körpers iſt $= z^2\pi$ und die Grundfläche F des kuppelförmigen Körpers

$$F = \frac{nz^2 \sin\varphi}{2}, \text{ alſo da}$$

$$G : F = W : V,$$

$$\text{ſo iſt auch } z^2\pi : \frac{nz^2 \sin\varphi}{2} = W : V$$

und es iſt daher $V = \frac{n \sin \varphi}{2\pi} W$

$$= \frac{np \sin \varphi}{2}\left[2ax + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{4}{3}a^2 - \tfrac{4}{3}(a+x)\sqrt{a(a+x)}\right]$$

und man erhält für $a=o$ den beſonderen Werth für V

$$= \frac{np \sin \varphi}{2} \cdot \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{4}npx^2 \sin \varphi.$$

Der Inhalt des paraboliſchen Konoids iſt in dieſem Falle $W = \frac{1}{2}xz^2\pi = \frac{1}{2}px^2\pi$, folglich iſt alsdann

$$V : W = \tfrac{1}{2}n \sin \varphi : \pi,$$

und es wird wiederum für $n=12$

$$V : W = 3 : \pi.$$

Zuſatz. Da überhaupt

$$G : F = W : V,$$

ſo iſt immer, wenn die Ordinate $\delta\alpha = z$ geſetzt wird und F ein regelmäßiges nEck iſt, von welchem z der Radius des Kreiſes iſt, der um daſſelbe beſchrieben werden kann, $G = z^2\pi$ und $F = \frac{nz^2 \sin \varphi}{2}$, alſo

$$V : W = n \sin \varphi : 2\pi.$$

3. Die Grundfläche eines kuppelförmigen Körpers iſt ein Dreieck, der Scheitel deſſelben befindet ſich normal über dem Mittelpunkte des Kreiſes, der um das Dreieck beſchrieben werden kann, und die von dem Scheitel nach irgend einem Punkte des Umfanges der Grundfläche gezogenen Linien ſind elyptiſche Quadranten; es ſoll der Inhalt dieſes Körpers angegeben werden.

Da $m\alpha a$, Fig. 85., ein elyptiſcher Bogen ſein ſoll, ſo iſt für $m\delta = x$ und $\delta\alpha = z$, wenn die beiden Halbaxen mit a und b bezeichnet werden, die Gleichung für die Curve

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

daher iſt für $da = b$ der Inhalt des Körpers, welcher erzeugt wird, wenn $m\alpha ad$ um md ſich dreht,

$$W = \pi \int y^2 dx = \frac{b^2\pi}{a^2}\int (2ax - x^2)\,dx$$

$$= \frac{b^2\pi}{a^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right)$$

und die Fläche des Dreiecks iſt, wenn die drei Seiten deſſelben mit α, β und γ bezeichnet werden, da der Radius des Kreiſes, der um daſſelbe beſchrieben werden kann, $=b$ iſt,

$$F = \frac{\alpha\beta\gamma}{4b},$$

während der Werth von $G=b^2\pi$. Da nun

$$W : V = G : F,$$

ſo iſt auch $\frac{b^2\pi}{a^2}(ax^2-\frac{1}{3}x^3) : V = b^2\pi : \frac{\alpha\beta\gamma}{4b}$

und $ax^2-\frac{1}{3}x^3 : V=4a^2b : \alpha\beta\gamma$,

folglich wird $V= \frac{\alpha\beta\gamma}{4a^2b}(ax^2-\frac{1}{3}x^3)$

und für $x=(md)=a$ erhält man den Inhalt der ganzen Kuppel

$$V= \frac{\alpha\beta\gamma}{4a^2b} \cdot \tfrac{2}{3}a^3 = \frac{a}{6} \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{b} = \tfrac{2}{3}a \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{4b}$$

wofür man auch ſetzen kann $V=\frac{2}{3}a \cdot F$.

Zuſatz. Welches auch die Grundfläche des kuppelförmigen Körpers ſein mag, deſſen Seitenkanten Elypſen ſind, ſo iſt doch immer

$$W : V = G : F,$$

nämlich es iſt

$$\frac{b^2\pi}{a^2}(ax^2-\tfrac{1}{3}x^3) : V=b^2\pi : F$$

und daher

$$(ax^2-\tfrac{1}{3}x^3) : V=a^2 : F,$$

alſo iſt immer $V=(ax^2-\frac{1}{3}x^3) \cdot \frac{F}{a^2}$

und für $x=a$ wird

$$V=\tfrac{2}{3}a^3 \cdot \frac{F}{a^2}=\tfrac{2}{3}a \cdot F;$$

der Inhalt des Körpers iſt alſo immer zweimal ſo groß als eine Pyramide, welche mit demſelben Grundfläche und Höhe gemein hat.

§. 139.

Von der krummen Oberfläche der kuppelförmigen Körper.

Das Dreieck $\alpha\delta\gamma$, Fig. 88., iſt ein Theil der Grundfläche eines kuppelförmigen Körpers, deſſen Scheitel m nor-

mal über δ liegt, ſo daß $m\delta$ normal ſteht auf der Fläche des Dreiecks $\alpha\delta\gamma$, und die Curve $m\alpha$ iſt durch die Gleichung zwiſchen $m\delta = x$ und $\delta\alpha = z$ beſtimmt; man ſoll die krumme Oberfläche $m\alpha\gamma$ berechnen.

Nach §. 133. iſt zwar für $\alpha\gamma = T$, $m\alpha = S$ und die Fläche $m\alpha\gamma = U$ die Gleichung angegeben worden

$$U = \int T dS;$$

dieſe Gleichung hat aber, wie auch dort bemerkt worden iſt, nur in dem Falle Gültigkeit, wenn $\delta\alpha$ normal iſt auf der Curve T, und dieſes iſt nur alsdann der Fall für alle Punkte der Curve, wenn dieſelbe ein Kreis iſt, deſſen Mittelpunkt in δ liegt. In jedem anderen Falle muß ſtatt $\alpha\alpha' = dS$ die Normale $\alpha' k = dS'$ genommen werden, welche von α' auf T gefällt werden kann, und es läßt ſich hier, wo $\alpha\gamma = T$ eine gerade Linie iſt, der Werth von $\alpha' k = dS'$ auf folgende Art beſtimmen: Man fälle von α' auf $\alpha\delta$ die Normale $\alpha' i$ und von i auf $\alpha\gamma$ die ik, ſo iſt

$$(\alpha' k) = dS' = \sqrt{[(\alpha' i)^2 + (ik)^2]}.$$

Da das Dreieck $\alpha\delta\gamma$ gegeben iſt, ſo kennt man auch, wenn die Normale δf gezogen wird, den Winkel β und es iſt auch $\angle \alpha ik = \beta$. Hiernach iſt

$$\alpha i : ik = 1 : \cos\beta \text{ und daher } (ik) = (\alpha i)\cos\beta$$

und weil $\delta\alpha = z$ und $\alpha\alpha' = dS$, ſo iſt $\alpha i = dz$, alſo $(ik) = dz \cos\beta$; ferner iſt $\alpha' i = dx$ und daher auch, wenn für $\alpha' i$ und ik dieſe Werthe geſetzt werden,

$$dS' = \sqrt{[(dx)^2 + \cos^2\beta (dz)^2]}$$

$$= dx \sqrt{\left[1 + \cos^2\beta \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]},$$

folglich iſt hier $U = \int T dx \sqrt{\left[1 + \cos^2\beta \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}$.

Es iſt aber $\alpha\delta : \alpha f = 1 : \sin\beta$,

oder für $\alpha f = T$

$$z : T = 1 : \sin\beta \text{ und daher } T = z \sin\beta,$$

es iſt alſo auch, wenn U' die Fläche $\alpha m f$ bedeutet,

$$U' = \sin\beta \int z dx \sqrt{\left[1 + \cos^2\beta \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}$$

und eben ſo iſt auch für $\delta\gamma = z'$ die Fläche $\gamma m f = U''$ durch die Gleichung beſtimmt

$$U'' = \sin\gamma \int z'dx \sqrt{\left[1 + \cos^2\beta\left(\frac{dz'}{dx}\right)^2\right]}$$

und es iſt nun auch der Werth von $U = U' + U''$ vollkommen beſtimmt.

Iſt das Dreieck $\alpha\delta\gamma$ gleichſchenklig, ſo wird $\gamma = \beta$ und $z' = z$, alſo auch $U'' = U'$ und daher $U = 2U'$; es iſt alſo in dieſem Falle

$$U = 2\sin\beta \int z dx \sqrt{\left[1 + \cos^2\beta\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}.$$

Hat nun der kuppelförmige Körper ein regelmäßiges k Eck zur Grundfläche, ſo iſt die ganze krumme Oberfläche deſſelben $= kU$ und der Centriwinkel $\varphi = \frac{360}{k}$ iſt $= 2\beta$; alſo wird dieſe Oberfläche ausgedrückt durch

$$kU = 2k\sin\tfrac{1}{2}\varphi \int z dx \sqrt{\left[1 + \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}.$$

Iſt nun 1. $m\alpha$ ein Kreisbogen, alſo

$$z^2 = 2Rx - x^2,$$

ſo wird $zdz = (R - x)\,dx$ und $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{(R-x)^2}{z^2}$,

daher, wenn zur Abkürzung $\cos^2\frac{1}{2}\varphi = m^2$, geſetzt wird

$$1 + \cos^2\varphi\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{z^2 + m^2(R-x)^2}{z^2}$$

$$= \frac{2Rx - x^2 + m^2(R-x)^2}{z^2} = \frac{m^2R^2 + 2R(1-m^2)x - (1-m^2)x^2}{z^2};$$

folglich iſt

$$kU = 2k\sin\tfrac{1}{2}\varphi \int dx \sqrt{[m^2R^2 + 2R(1-m^2)x - (1-m^2)x^2]}.$$

Es iſt aber, nach Meier Hirſch's Integraltafeln, S. 195., für $X = a + bx + cx^2$

$$\int dx\sqrt{X} = \frac{(2cx + b)\sqrt{X}}{4c} + \frac{4ac - b^2}{8c}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Da nun hier $a = m^2R^2$, $b = 2R(1-m^2) = 2Rn^2$ und $c = -n^2$, ſo wird

$$\int dx\sqrt{X} = \left(\frac{2Rn^2 - 2n^2x}{-4n^2}\right)\sqrt{X} + \frac{-4m^2n^2R^2 - 4R^2n^4}{-8n^2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$= \left(\frac{x-R}{2}\right)\sqrt{X} + \frac{(m^2+n^2)R^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

und, weil $m^2 + n^2 = 1$,

$$\int dx\sqrt{X} = \frac{x-R}{2}\sqrt{X} + \frac{R^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Nach Meier Hirſch's Integraltafeln, S. 183, aber iſt

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx-cx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,\mathrm{Arc\,sin}\,\frac{2cx-b}{\sqrt{(b^2+4ac)}};$$

alſo hier $\int\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{n}\,\mathrm{Arc\,sin}\,\frac{2n^2x-2Rn^2}{\sqrt{(4R^2n^4+4m^2n^2R^2)}}$

$$= \frac{1}{n}\,\mathrm{Arc\,sin}\,\frac{n(x-R)}{R};$$

folglich iſt $\int dx\sqrt{X} =$

$$\frac{x-R}{2}\sqrt{(m^2R^2+2Rn^2x-n^2x^2)}+\frac{R^2}{2n}\,\mathrm{Arc\,sin}\,\frac{n(x-R)}{R} = Z,$$

und es iſt alſo

$$kU = 2k\,\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,(Z+C),$$

und weil $kU = o$ werden muß für $x = o$, ſo iſt

$$2k\,\sin\tfrac{1}{2}\varphi\left(-\frac{mR^2}{2}+\frac{R^2}{2n}\,\mathrm{Arc\,sin}(-n)+C\right) = o;$$

$$\text{daher iſt } C = \frac{mR^2}{2}+\frac{R^2}{2n}\,\mathrm{Arc\,sin}\,n.$$

Weil aber geſetzt worden iſt

$\cos\frac{1}{2}\varphi = m$ und $n^2 = 1-m^2 = \sin^2\frac{1}{2}\varphi$, ſo iſt $\mathrm{Arc\,sin}\,n = \frac{1}{2}\varphi$, und weil $2n = 2\sin\varphi$, ſo iſt

$$C = \frac{R^2}{2}\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{R^2\cdot\frac{1}{2}\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi} = \frac{R^2}{2}\left(\cos\tfrac{1}{2}\varphi+\frac{\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}\right)$$

$$= \frac{R^2}{2}\left[\frac{\sin\varphi+\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}\right],$$

und daher wird

$$kU = 2k\,\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cdot Z + 2k\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cdot\frac{R^2}{2}\left[\frac{\sin\varphi+\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}\right]$$

$$= 2k\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cdot Z + \frac{kR^2}{2}(\varphi+\sin\varphi).$$

Iſt nun $n\alpha$ ein Quadrant, alſo $m\delta = x = R$, ſo wird $Z = o$, und die krumme Oberfläche des kuppelförmigen Körpers iſt alsdann

$$kU = \frac{k\varphi R^2}{2} + \frac{kR^2}{2}\sin\varphi,$$

oder, weil $k\varphi = 360^0 = 2\pi$, ſo iſt

$$kU = R^2\pi + \frac{\pi}{\varphi} R^2 \sin\varphi = R^2\pi \left[1 + \frac{\sin\varphi}{\varphi}\right].$$

2. Iſt $m\alpha$ ein paraboliſcher Bogen, ſo daß m der Scheitel iſt, und alſo die Gleichung ſtatt findet

$$z^2 = px,$$

$$\text{ſo iſt } 2zdz = pdx \text{ und } \frac{dz}{dx} = \frac{p}{2z}$$

und es wird hiernach für $\cos\frac{1}{2}\varphi = m$

$$1 + \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{m^2p^2}{4z^2} = \frac{1}{z^2}\left[z^2 + \frac{m^2p^2}{4}\right].$$

Da nun ganz allgemein

$$kU = 2k \sin\tfrac{1}{2}\varphi \int z dx \sqrt{\left[1 + \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]},$$

ſo wird in dem gegenwärtigen Falle

$$kU = 2k \sin\tfrac{1}{2}\varphi \int dx \sqrt{\left[z^2 + \frac{m^2p^2}{4}\right]}$$

$$= 2k \sin\tfrac{1}{2}\varphi \int dx \sqrt{\left[px + \frac{m^2p^2}{4}\right]}$$

und weil für $X = a + bx$

$$\int dx \sqrt{X} = \frac{2X\sqrt{X}}{3b}, \text{ ſo iſt hier, wo } b = p,$$

$$kU = 2k\sin\tfrac{1}{2}\varphi \cdot \frac{2X\sqrt{X}}{3p} = \frac{4k\sin\frac{1}{2}\varphi}{3p}\left[px + \frac{m^2p^2}{4}\right]\sqrt{\left[px + \frac{m^2p^2}{4}\right]} + C$$

$$= \frac{k\sin\frac{1}{2}\varphi}{6}(4x + m^2p)\sqrt{p(4x + m^2p)} + C,$$

und weil für $x = o$ auch $kU = o$ werden muß, ſo iſt

$$\frac{k\sin\frac{1}{2}\varphi}{6} \cdot m^2p \cdot mp + C = o, \text{ alſo } C = -\frac{k\sin\frac{1}{2}\varphi \cdot m^3}{6} \cdot p^2$$

und daher der vollſtändige Werth von

$$kU = \frac{k\sin\frac{1}{2}\varphi}{6}\left[(4x + m^2p)\sqrt{p(4x + m^2p)} - m^3p^2\right].$$

Um hieraus nun einige beſondere Werthe abzuleiten, nehme man an, es ſei $x = \frac{1}{4}p$, ſo wird

$4x + m^2p = p(1 + m^2) = p(1 + \cos^2\frac{1}{2}\varphi)$, und daher

$$kU = \frac{k\sin\frac{1}{2}\varphi}{6}\left[p^2(1 + \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi)\sqrt{(1 + \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi)} - p^2\cos^3\tfrac{1}{2}\varphi\right].$$

Iſt nun $k = 6$, alſo $\frac{1}{2}\varphi = 30^\circ$, $\sin\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}$ und $\cos\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, ſo wird

$$kU = \frac{p^2}{2}\left[(1+\tfrac{3}{4})\sqrt{(1+\tfrac{3}{4})}-\tfrac{3}{4}\sqrt{3}\right]$$

$$= \frac{p^2}{16}(7\sqrt{7}-3\sqrt{3}) = \frac{133}{160}\cdot p^2.$$

Zuſatz. Die Formel für die krumme Oberfläche eines kuppelförmigen Körpers mit einem regelmäßigen Vieleck als Grundfläche iſt

$$kU = 2k \sin\tfrac{1}{2}\varphi \int z dx \sqrt{\left[1 + m^2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}.$$

Setzt man nun $mz = v$, ſo wird $dz = \frac{dv}{m}$

$$\text{und } kU = 2k \sin\tfrac{1}{2}\varphi \int \frac{v}{m} dx \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]}$$

$$= 2k \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi \int v dx \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]}$$

und weil $\int v dx \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]}$, nach §. 129., der Ausdruck iſt für die krumme Oberfläche eines durch Axendrehung erzeugten Körpers, ſo folgt, daß die Oberfläche der kuppelförmigen Körper immer auf die eines durch Axendrehung erzeugten zurückgeführt werden kann.

§. 140.
Aufgabe.

Von dem Cylinderhufe $\alpha\beta\gamma m$, Fig. 86., kennt man $\alpha\delta = g$, $\alpha m = h$ und den Radius R des Kreiſes, von welchem $\beta\alpha\gamma$ ein Abſchnitt iſt. Dieſer Huf iſt durch $m'\alpha'\delta'$ parallel zu $m\alpha\delta$ geſchnitten; man ſoll den Inhalt des zwiſchen $m\alpha\delta$ und $m'\alpha'\delta'$ liegenden Theils von dem Hufe berechnen.

Auflöſung. Da das Dreieck $m'\alpha'\delta'$ ähnlich iſt dem $m\alpha\delta$,

$$\text{ſo iſt } \Delta m\alpha\delta : \Delta m'\alpha'\delta' = (\delta\alpha)^2 : (\delta'\alpha'),$$

und daher für $\Delta m\alpha\delta = F$, wenn $\delta\delta' = x$ und $\delta'\alpha' = z$ geſetzt wird,

$$F : \Delta m'\alpha'\delta' = g^2 : z^2,$$

$$\text{folglich iſt } \Delta m'\alpha'\delta' = \frac{F}{g}\cdot z^2,$$

und es iſt daher, wenn der Körper $m\alpha\delta m'\alpha'\delta' = V$ geſetzt wird, eben ſo wie bei den kuppelförmigen Körpern,

$$dV = \frac{F}{g^2} z^2 dx,$$

$$\text{und daher } V = \frac{F}{g^2} \int z^2 dx,$$

wo es nun noch darauf ankommt, den Werth von z durch x auszudrücken. Wenn aber, Fig. 86a., der Abſtand der Kante $\beta\gamma$ des Hufes von dem Mittelpunkte g des Kreiſes, alſo $gd = g'\delta' = c$, ſo iſt $g'\alpha' = c + z$,

und daher, weil $mg' = R+x$ und $g'n = R-x$,

$$(c+z)^2 = (R+x)(R-x) = R^2-x^2;$$

folglich iſt $c+z = \sqrt{(R^2-x^2)}$

und $z^2 = [-c+\sqrt{(R^2-x^2)}]^2 = c^2+R^2-x^2-2c\sqrt{(R^2-x^2)}$,

$$\text{alſo } V = \frac{F}{g^2} \int dx\, [c^2+R^2-x^2-2c\sqrt{(R^2-x^2)}],$$

und demnach auch

$$V = \frac{F}{g^2}\int(c^2+R^2-x^2)\,dx - \frac{F}{g^2} \cdot 2c\int dx\sqrt{(R^2-x^2)}$$

$$= \frac{F}{g^2}(c^2x+R^2x-\tfrac{1}{3}x^3) - \frac{2cF}{g^2} \int dx\sqrt{(R^2-x^2)}.$$

Es iſt aber

$$\int dx\sqrt{(R^2-x^2)} = \frac{x}{2}\sqrt{(R^2-x^2)} + \frac{R^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(R^2-x^2)}}$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{(R^2-x^2)} + \frac{R^2}{2} \text{Arc sin} \frac{x}{R};$$

alſo wird

$$V = \frac{F}{g^2}\left[c^2x+R^2x-\tfrac{1}{3}x^3-cx\sqrt{(R^2-x^2)}-cR^2 \text{Arc sin}\frac{x}{R}\right],$$

wo keine Conſtante hinzukommt, wenn der Körper von $\alpha\delta m$ an genommen wird, weil alsdann für $x = 0$ auch $V = 0$ werden muß, welchen Werth auch die Gleichung giebt.

Iſt nun der Cylinder normal, und daher $m\alpha\delta$ ein rechtwinkliges Dreieck, ſo wird $F = \frac{1}{2}gh$, und es iſt alsdann

$$V = \frac{h}{2g}\left[x(c^2+R^2)-\tfrac{1}{3}x^3-cx\sqrt{(R^2-x^2)}-cR^2\text{Arc sin}\frac{x}{R}\right].$$

Da nun dieſer Werth von V für jeden Werth von x Gültigkeit hat, ſo iſt, wenn

für $x = x'$ wird $V = V'$

und für $x = x''$ wird $V = V''$,

$V' - V''$ der Inhalt eines Theils des Hufes, welches zwiſchen irgend zwei zu $ma\delta$ parallelen Ebenen liegt. Hieraus laſſen ſich nun leicht die beſonderen Formeln ableiten, nämlich

1. Fällt δ mit g zuſammen, ſo iſt $c = o$ und $g = R$, alſo in dieſem Falle

$$V = \frac{h}{2R}(R^2x - \tfrac{1}{3}x^3)$$

und für $x = R$ erhält man den Inhalt des halben Hufes $ma\gamma\delta$, Fig. 86.,

$$V = \frac{h}{2R} \times \tfrac{2}{3}R^3 = \tfrac{1}{3}hR^2,$$

was mit dem Reſultate, §. 134., übereinſtimmt.

2. Wird in der allgemeinen Formel

$$V = \frac{h}{2g}\left[x(c^2+R^2) - \tfrac{1}{3}x^3 - cx\sqrt{(R^2-x^2)} - cR^2 \operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{R}\right],$$

$x = \delta\gamma = \sqrt{(R^2 - c^2)}$ geſetzt, ſo erhält man

$$V = \frac{h}{2g}\left[c^2x + R^2x - \tfrac{1}{3}x^3 - c^2x - cR^2 \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{\left(\frac{R^2-c^2}{R^2}\right)}\right]$$

$$= \frac{h}{2g}\left[\left(R^2 - \frac{R^2-c^2}{3}\right)\sqrt{(R^2-c^2)} - cR^2 \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{\left(\frac{R^2-c^2}{R^2}\right)}\right]$$

$$= \frac{h}{2g}\left[\left(\frac{2R^2+c^2}{3}\right)\sqrt{(R^2-c^2)} - cR^2 \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{\left(\frac{R^2-c^2}{R^2}\right)}\right]$$

und es iſt $g = \delta\alpha = R - c$.

3. Setzt man $c = \tfrac{1}{2}R = g$ und $x = \delta\gamma = \frac{R}{2}\sqrt{3}$, ſo wird

$$V = \frac{h}{R}\left[x \cdot \frac{5R^2}{4} - x \cdot \frac{R^2}{4} - \frac{Rx}{2} \cdot \frac{R}{2} - \frac{R^3}{2} \operatorname{Arc\,sin}\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right]$$

$$= \frac{h}{R}\left(\frac{3R^2x}{4} - \frac{R^3}{2}\operatorname{Arc\,sin} 60^0\right) = \frac{hR}{4}(3x - 2R \cdot \tfrac{1}{3}\pi);$$

nämlich es iſt alsdann

$$V = \frac{3R^2h\sqrt{3}}{8} - \frac{hR^2}{6}\pi.$$

Zuſatz. Die allgemeine Formel für jedes Stück des Hufes zwiſchen $\alpha\delta m$ und der hierzu parallelen Ebene $\alpha'\delta'm'$ iſt

$$V = \frac{F}{g^2}\int z^2 dx.$$

Wenn ſich aber der Bogen $\alpha\gamma\delta$, Fig. 86 a., um $\gamma\delta$ dreht, ſo iſt die Formel für den Inhalt des durch Axendrehung erzeugten Körpers W

$$W = \pi \int z^2 dx,$$

und es iſt daher $W : V = \pi : \frac{F}{g^2}$,

oder $W : V = g^2\pi : F$.

Da nun $g^2\pi = (\delta\alpha)^2\pi$ die Grundfläche des durch die Axendrehung erzeugten Körpers, und F die Grundfläche des Hufes iſt, ſo folgt, daß ſich dieſe beiden Körper wie ihre Grundflächen zu einander verhalten.

§. 141.

Noch einige Uebungen und Aufgaben.

1. Es iſt ac, Fig. 89., die Axe eines paraboliſchen Konoids, das alſo erzeugt wird, indem aδd um ae ſich dreht; dieſes Konoid iſt ſchief abgeſtumpft, und es iſt cad der Durchſchnitt des oberen Theils: man ſoll die Formel für den Kubikinhalt dieſes Theiles angeben.

Auflöſung. Halbirt man cd, welches der Durchſchnitt der Grundfläche des ſchiefen Konoids iſt, in β, und zieht $\alpha\beta$ parallel zu ac, ſo iſt dieſe Linie ein Durchmeſſer der Parabel, und es iſt daher, wenn die Ordinaten parallel zu cd gezogen werden,

$$(\alpha\mu) : (\alpha\beta) = (\mu\gamma)^2 : (\beta c)^2.$$

Legt man aber durch $\alpha\beta$ eine Ebene, welche die cad normal ſchneidet, ſo wird dieſe von dem Konoid in einer Parabel geſchnitten, von welcher $\alpha\beta$ die Axe iſt, und bezeichnet man daher den über μ in dieſer Curve auf der Oberfläche des Körpers liegenden Punkt mit μ' und den über β mit β', ſo iſt

$$(\alpha\mu) : (\alpha\beta) = (\mu\mu')^2 : (\beta\beta')^2,$$

und es iſt folglich auch

$$(\mu\gamma)^2 : (\beta c)^2 = (\mu\mu')^2 : (\beta\beta')^2,$$

$$\text{alſo } (\mu\gamma) : (\beta c) = (\mu\mu') : (\beta\beta').$$

Nun ſind $\mu\gamma$ und $\mu\mu'$ die beiden Halbaxen der Elypſe, welche die Grundfläche von $\gamma\alpha\delta$ bildet, und eben ſo ſind βc und $\beta\beta'$ die Halbaxen der Elypſe, welche die Grundfläche des

Körpers bilden, von welchem $c\alpha d$ der Durchſchnitt iſt; folglich ſind dieſe Elypſen einander ähnlich, cad iſt alſo der Durchſchnitt eines Körpers, in welchem alle parallel zur Grundfläche geführten Schnitte einander ähnlich ſind; ſetzt man alſo die Grundfläche = F, $\alpha\mu = x$, $\mu\gamma = z$, $\angle \alpha\mu\gamma = \alpha$, $\beta c = a$ und den Inhalt des Körpers, von welchem $\gamma\alpha\delta$ der Durchſchnitt iſt, = V, ſo findet die Gleichung ſtatt

$$dV = \frac{F}{a^2} z^2 dx \cdot \sin\alpha,$$

und es iſt daher $V = \frac{F}{a^2} \sin\alpha \int z^2 dx.$

Es iſt aber, wenn man den Parameter des Durchmeſſers $\alpha\beta = p$ ſetzt, $z^2 = px$;

folglich iſt auch $V = \frac{F}{a^2} \sin\alpha \int px\,dx$

und daher $V = \frac{F}{a^2} \sin\alpha \cdot \frac{px^2}{2} = \frac{F}{a^2} \sin\alpha \cdot \frac{z^2 x}{2}$

und für $x = \alpha\beta = k$ wird $z = a$, alſo iſt der Inhalt des ganzen Körpers cad =

$$V = \tfrac{1}{2}k \sin\alpha \cdot F.$$

Da nun $k \sin\alpha$ den normalen Abſtand des Punktes α von F, alſo die Höhe des Abſchnitts ausdrückt, ſo iſt, wenn dieſe Höhe mit h bezeichnet wird,

$$V = \frac{hF}{2}.$$

Jeder Abſchnitt eines paraboliſchen Konoids iſt alſo der Hälfte eines Prisma gleich, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Hieraus geht zugleich hervor, daß alle Abſchnitte paraboliſcher Konoide von gleicher Grundfläche und Höhe einander gleich ſind, und daß, wenn zwei ſolche Abſchnitte gleiche Grundflächen haben, ſie wie ihre Höhen ſich verhalten, und umgekehrt.

2. Aus dem Angeführten laſſen ſich nun noch folgende Sätze für die Abſchnitte von paraboliſchen Konoiden ableiten:

Wenn von einem und demſelben Paraboloid zwei verſchiedene Abſchnitte genommen werden, deren Grundflächen

jede beliebige Lage haben können, und es ſind die Durchmeſſer gleich groß, ſo ſind auch die Abſchnitte gleich.

Haben zwei Abſchnitte eines Paraboloids aber verſchiedene Durchmeſſer, ſo verhalten ſie ſich ihrem Inhalte nach zu einander, wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer. Bezeichnet man nämlich den Inhalt beider Abſchnitte mit A und a, und ihre Durchmeſſer mit D und d, ſo iſt $A : a = D^2 : d^2$.

So iſt z. B. von dem Abſchnitte, von welchem $c\alpha d$ der Durchſchnitt iſt, $\alpha\beta$ der Durchmeſſer, und von dem Abſchnitte, der daf zum Durchſchnitt hat, iſt ae der Durchmeſſer, und beide Abſchnitte verhalten ſich daher zu einander, wie $(\alpha\beta)^2 : (ae)^2$ und ſie ſind gleich groß, wenn $\alpha\beta = ae$ iſt.

3. Iſt daf, Fig. 89., der Durchſchnitt eines hyperboliſchen Konoids und ae die Axe der Hyperbel, ſo wird, für $ae = x$ und $ef = y$, wenn a und b die beiden Halbaxen der Hyperbel bedeuten, und der Inhalt des Körpers, von welchem adf der Durchſchnitt iſt, $= V$ geſetzt wird, der Werth von V ausgedrückt durch die Gleichung

$$V = \pi \int y^2 dx,$$

und es iſt $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2)$,

und daher auch

$$V = \frac{b^2\pi}{a}\int dx(2ax+x^2) = \frac{b^2\pi}{a^2}(ax^2+\tfrac{1}{3}x^3),$$

wie auch bereits, §. 123., gezeigt worden iſt.

Der Inhalt eines Kegels K, von welchem $ae = x$ die Axe und zugleich die Höhe iſt, und $ef = y$ der Radius der Grundfläche, hat einen Inhalt

$$K = \tfrac{1}{3}y^2\pi \cdot x = \frac{b^2\pi}{a^2}\left(\frac{2ax^2+x^3}{3}\right);$$

folglich iſt $V : K = 3ax^2+x^3 : 2ax^2+x^3$,

und daher auch $V : K = 3a+x : 2a+x$.

Daß nun auch für den Inhalt eines ſchiefen Abſchnitts von einem hyperboliſchen Konoid daſſelbe Verhältniß ſtatt findet, läßt ſich auf folgende Art beweiſen: Es ſei cad der Durchſchnitt des ſchiefen Abſchnitts, cd der Durchſchnitt der Grundfläche, und $\gamma\delta$ parallel zu dieſer Linie, ſo iſt, wenn cd in β, und $\gamma\delta$ in μ halbirt wird, die hierdurch beſtimmte Linie $\alpha\beta$

ein Durchmeſſer der Hyperbel, der jedoch nicht, wie bei der Parabel, parallel zu ab läuft, ſondern verlängert mit derſelben in dem Mittelpunkte der Hyperbel zuſammentrifft. Wird nun die Grundfläche des ſchiefen Abſchnitts = F geſetzt, $\beta c = k$, $\alpha\mu = x$, $\mu\gamma = y$ und $\angle\alpha\mu\gamma = \varphi$, ſo iſt der Inhalt des Abſchnitts

$$V = \frac{F}{k^2} \sin\varphi \int y^2 dx,$$

und es iſt, wenn die beiden zu dem Durchmeſſer $\alpha\beta$ gehörigen Halbmeſſer der Hyperbel α und β ſind,

$$y^2 = \frac{\beta^2}{a^2} (2\alpha x + x^2)$$

$$\text{alſo iſt } \int y^2 dx = \frac{\beta^2}{\alpha^2} (\alpha x^2 + \tfrac{1}{3} x^3)$$

$$\text{und daher } V = \frac{F}{k^2} \sin\varphi \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2} (\alpha x^2 + \tfrac{1}{3} x^3)$$

und für $x = (\alpha\beta)$ wird $(\beta c)^2 = k^2 = y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} (2\alpha x + x^2)$; folglich iſt für dieſen Fall

$$V = \frac{F \sin\varphi\, (\alpha x^2 + \frac{1}{3} x^3)}{2\alpha x + x^2} = \frac{F \sin\varphi\, (3\alpha + x) x}{3(2\alpha + x)}.$$

Der Inhalt K eines Kegels aber, der ebenfalls eine Grundfläche = F hat, und deſſen Axe $\alpha\beta = x$ unter dem Winkel $\alpha\beta c = \varphi$ gegen die Grundfläche geneigt iſt, wird ausgedrückt durch

$$K = \tfrac{1}{3} x \sin\varphi \cdot F;$$

$$\text{folglich iſt } V : K = \frac{3\alpha + x}{2\alpha + x} : 1$$

$$\text{und daher } V : K = 3\alpha + x : 2\alpha + x,$$

ein Verhältniß, welches dem für den normalen Abſchnitt ähnlich iſt, und es läßt ſich daher jeder Abſchnitt eines hyperboliſchen Konoids berechnen.

4. Auch für jeden normalen oder ſchiefen Abſchnitt eines elyptiſchen Sphäroids erhält man ähnliche Formeln, die auf gleiche Weiſe, wie die für die Konoiden, abgeleitet werden können. Sind nämlich αc und $c\beta$, Fig. 69., ein Paar zuſammengehörige Halbmeſſer der Elypſe, und de parallel zu βc, ſo iſt für $\alpha c = \alpha$, $c\beta = \beta$, $\alpha e = x$ und $ed = y$

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(2ax - x^2).$$

Iſt nun kαm der Durchſchnitt eines Abſchnitts des Sphä-roids, und es wird die Grundfläche deſſelben $=F$ und $gk=k$ geſetzt, und der Inhalt von dem Abſchnitte $= V$, ſo iſt für $\angle \alpha gk = \varphi$

$$V = \frac{F}{k^2}\sin\varphi \int y^2 dx,$$

$$\text{alſo } V = \frac{F \sin\varphi}{k^2} \int \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int (2\alpha x - x^2)dx$$

$$= \frac{F \sin\varphi}{k^2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha x^2 - \tfrac{1}{3}x^3)$$

und es wird für $x = \alpha g$ der Werth von $k^2 = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}(2\alpha x - x^2)$, daher iſt alsdann

$$V = F \sin\varphi \left(\frac{3\alpha x^2 - x^3}{3(2\alpha x - x^2)}\right) = F \sin\varphi \left(\frac{(3\alpha - x)x}{3(2\alpha - x)}\right).$$

Der Inhalt K des Kegels aber, der F zur Grundfläche hat, und von welchem $\alpha g = x$ die Axe iſt, die ebenfalls mit der Grundfläche einen Neigungswinkel $= \varphi$ bildet, iſt

$$K = \frac{Fx \sin\varphi}{3};$$

$$\text{folglich iſt } V : K = \frac{3\alpha - x}{2\alpha - x} : 1,$$

und alſo $V : K = 3\alpha - x : 2\alpha - x = [\alpha + (2\alpha - x)] : (2\alpha - x)$. Dieſe Proportion gilt für jeden Abſchnitt ohne Ausnahme, und es drückt dieſelbe das Geſetz aus, welches Archimedes in ſeiner Abhandlung von Konoiden und Sphäroiden in dem 32ſten Satze beweist, ſo wie die in No. 3. gefundene Proportion den 28ſten Satz dieſer Abhandlung ausdrückt.

5. Die Parabel daf mit der Axe ae, Fig. 89., iſt der Durchſchnitt eines paraboliſchen Konoids, von welchem durch eine Ebene parallel zur Axe ein Stück abgeſchnitten iſt, wozu αdg als Durchſchnitt gehört; es ſoll die Formel für den Kubikinhalt dieſes Abſchnittes angegeben werden.

Aufloſung. Da bei einem paraboliſchen Konoid alle Schnitte, parallel zur Axe, Parabeln ſein müſſen, welche der daf gleich ſind, ſo müſſen auch alle einen gemeinſchaftli-

chen Parameter = p haben. Setzt man nun ae = a, und die zu dieſer Abſciſſe gehörige Ordinate ed = b, ſo iſt $b^2 = ap$, und es iſt, wenn die zu einer Abſciſſe $\alpha g = z$ gehörige Ordinate = y geſetzt wird, $y^2 = pz$.

Nach §. 108. wird die Fläche daf ausgedrückt durch $\frac{4}{3}ab$, alſo iſt auch die der Abſciſſe z und der dazu gehörigen Ordinate y entſprechende Fläche $Z = \frac{4}{3}zy$, und dieſes iſt die Fläche des Schnittes, welcher den Durchſchnitt daf normal in αg ſchneidet. Wird daher der Inhalt des Abſchnitts, zu welchem αdg als Durchſchnitt gehört, = V geſetzt und $dg = x$, ſo iſt

$$dV = Zdx = \tfrac{4}{3}zydx,$$

oder, weil $y^2 = pz$, und alſo $y = p^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} = mz^{\frac{1}{2}}$, wenn man $\sqrt{p} = m$ ſetzt,

$$dV = \frac{4m}{3}\int z^{\frac{3}{2}}dx,$$

und es iſt daher $V = \dfrac{4m}{3}\int z^{\frac{3}{2}}dx.$

Nun gehört in der Parabel daf zu einer Abſciſſe $= ae - \alpha g = a - z$ eine Ordinate $= de - dg = b - x$, folglich iſt

$$p(a-z) = (b-x)^2,$$

und daher auch, wenn man $b - x = v$ ſetzt, alſo $dx = -dv$,

$$p(a-z) = v^2,$$

$$-pdz = 2vdv \text{ und } dx = -dv = \frac{p}{2v}dz = \frac{m^2}{2v}dz,$$

und dabei iſt $v = \sqrt{p(a-z)} = m\sqrt{(a-z)}$.

Es iſt alſo auch

$$V = \frac{4m}{3}\int z^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{m^2}{2v}dz = \frac{4m}{3}\int z^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{m^2dz}{2m\sqrt{(a-z)}};$$

nämlich es iſt

$$V = \frac{2m^2}{3}\int\frac{z^{\frac{3}{2}}dz}{\sqrt{(a-z)}} = \frac{2p}{3}\int\frac{zdz}{\sqrt{(az-z^2)}}.$$

Nun iſt nach Meier Hirſch's Integraltafeln, S. 164.,

$$\int\frac{zdz}{\sqrt{(az-z^2)}} = \left(-\frac{z}{2}-\frac{3a}{4}\right)\sqrt{(az-z^2)}+\frac{3a^2}{8}\int\frac{dz}{\sqrt{(az-z^2)}}$$

$$= -\left(\frac{2z+3a}{4}\right)\sqrt{(az-z^2)} + \frac{3a^2}{8}\,2\ \text{Arc}\sin\sqrt{\frac{z}{a}};$$

folglich iſt auch

$$V = -\frac{2p}{3}\left(\frac{2z+3a}{4}\right)\sqrt{(az-z^2)} + \frac{2p}{3}\cdot\frac{3a^2}{4}\,\text{Arc}\sin\sqrt{\frac{z}{a}},$$

$$= -\frac{p(2z+3a)}{6}\sqrt{(az-z^2)} + \frac{a^2p}{2}\,\text{Arc}\sin\sqrt{\frac{z}{a}},$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil für $x = o$ auch $z = o$ und $v = o$ wird. Es giebt alſo dieſer Ausdruck den Inhalt eines jeden Abſchnitts, parallel zur Axe, ausgedrückt durch $ae = a$, $\alpha g = z$ und den Parameter der Parabel $p = \frac{b^2}{a}$.

Setzt man in dieſem Ausdrucke $z = a$, ſo wird der Inhalt des halben Paraboloids erhalten

$$V = \frac{a^2p}{2}\,\text{Arc}\sin 1 = \frac{a^2p}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{4}ab^2\pi,$$

wie es ſein muß.

Anmerkung. Will man den Werth des Abſchnitts V, von welchem αdg der Durchſchnitt iſt, dadurch berechnen, daß man für $dg = x$ die Fläche des Kreisabſchnitts beſtimmt, deſſen Höhe $= dg$ iſt, und der zu einem Kreiſe gehört, welcher $de = b$ zum Radius hat, wodurch für $\alpha g = V$, wenn man die Fläche des Kreisabſchnitts $= Z$ ſetzt, die Gleichung erhalten wird

$$dV = Zdz, \text{ alſo } V = \int Zdz,$$

ſo kommt man erſt durch eine weitläufige Rechnung zu dem geſuchten Reſultate, weil hier der für Z zu ſetzende Werth iſt

$$Z = -(b-x)\sqrt{(2bx-x^2)} + 2b^2\,\text{Arc}\sin\sqrt{\frac{x}{2b}}.$$

6. Ein paraboliſches Konoid, deſſen Durchſchnitt $d\alpha c$, Fig. 89., iſt, und von welchem $\alpha\beta = a$, $\beta d = \beta c = b$, und der Winkel $\alpha\beta c = \varphi$ gegeben ſind, ſoll durch eine Ebene parallel zur Grundfläche nach einem gegebenen Verhältniſſe getheilt werden.

Aufloſung. Setzt man die Grundfläche des ganzen Körpers $= F$, ſo iſt der Inhalt deſſelben $= \frac{1}{2}aF \sin\varphi$ nach No. 1. beſtimmt, und da das Verhältniß gegeben iſt, nach welchem derſelbe getheilt werden ſoll, ſo läßt ſich nun auch leicht der Werth des abzuſchneidenden Theils K berechnen. Soll nämlich der obere Theil K zu dem untern L ſich verhalten, wie $m : n$, iſt alſo

$$K : L = m : n,$$

ſo iſt auch $K : K+L = m : m+n$,

und daher $K : \frac{1}{2}aF \sin\varphi = m : m+n$

und ſonach $K = \frac{m}{2(m+n)}\ aF \sin\varphi$ beſtimmt.

Iſt nun $\delta\gamma$ der Durchſchnitt der Theilungsfläche, und man ſetzt $\alpha\mu = x$, $\mu\gamma = z$ und den Inhalt der Theilungsfläche, welche der F ähnlich ſein muß, $= Z$, ſo iſt

$$F : Z = (\beta c)^2 : (\mu\gamma)^2 = b^2 : z^2$$

und auch $\alpha\beta : \alpha\mu = (\beta c)^2 : (\mu\gamma)^2$;

nämlich $a : x = b^2 : z^2$

und es iſt daher $F : Z = a : x$,

alſo iſt $Z = \frac{x}{a} F$.

Nun iſt aber $K = \frac{1}{2}xZ \sin\varphi$;

folglich iſt auch $K = \frac{1}{2}x \sin\varphi \times \frac{x}{a} F = \frac{x^2 \sin\varphi \cdot F}{2a}$,

und daher $x = \sqrt{\left(\frac{2aK}{F \sin\varphi}\right)}$

vollkommen beſtimmt. Da übrigens

$$K = \frac{maF \sin\varphi}{2(m+n)},$$

ſo iſt auch

$$x = \sqrt{\frac{ma^2}{m+n}} = a \sqrt{\left(\frac{m}{m+n}\right)},$$

ein Satz, der ſich auch unmittelbar hätte finden laſſen; denn da, nach No. 2., verſchiedene Abſchnitte eines paraboliſchen Konoids zu einander ſich verhalten, wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer, ſo iſt, wenn das ganze Könoid $= P$ geſetzt wird,

$$K : P = (\alpha\mu)^2 : (\alpha\beta)^2 = x^2 : a^2,$$

und da ſein ſoll $K : P = m : m+n$, ſo iſt auch

$$m : m+n = x^2 : a^2,$$

alſo $x = a\sqrt{\left(\frac{m}{m+n}\right)}$.

7. Es iſt $d\alpha c$, Fig. 84., der Durchſchnitt eines hyperboliſchen Konoids; man ſoll daſſelbe durch eine Ebene, parallel zur Grundfläche, nach einem gegebenen Verhältniſſe theilen.

Aufloſung. Nach No. 3. iſt, wenn die zu dem Durchmeſſer $\alpha\beta$ gehörigen beiden Halbaxen der Hyperbel mit α

und β, die Grundfläche des ganzen Körpers mit F, $\alpha\beta$ mit a und βc mit b bezeichnet wird, der Inhalt P des Konoids, von welchem $d\alpha c$ der Durchſchnitt iſt, für $\angle \alpha\beta c = \varphi$,

$$P = \frac{F}{b^2} \sin\varphi \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha a^2 + \tfrac{1}{3}a^3),$$

oder vielmehr, weil $b^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(2\alpha a + a^2)$,

$$P = \frac{F \sin\varphi\,(3\alpha + a)\,a}{3(2\alpha + a)}.$$

Für $\alpha\mu = x$ und $\mu\gamma = z$ iſt der Inhalt K des Abſchnitts, von welchem $\delta\alpha\gamma$ den Durchſchnitt bildet, wenn man die Grundfläche deſſelben mit Z bezeichnet,

$$K = \frac{Z \sin\varphi\,(3\alpha + x)\,x}{3\,(2\alpha + x)}$$

und es iſt $F : Z = (\beta c)^2 : (\mu\gamma)^2 = b^2 : y^2$,

alſo $Z = \frac{Fy^2}{b^2}$

und weil $b^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(2\alpha a + a^2)$ und $y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(2\alpha x + x^2)$,

ſo iſt $\frac{y^2}{b^2} = \frac{2\alpha x + x^2}{2\alpha a + a^2} = \frac{(2\alpha + x)x}{(2\alpha + a)a}$,

alſo $Z = \frac{F(2\alpha + x)x}{(2\alpha + a)a}$

und daher wird

$$K = \frac{x \sin\varphi\,(3\alpha + x)x}{3(2\alpha + a)a} \cdot F.$$

Soll nun $P : K = p : q$ ſein, ſo iſt auch

$$p : q = \frac{F \sin\varphi\,(3\alpha + a)\,a^2}{3(2\alpha + a)} : \frac{F \sin\varphi\,(3\alpha + x)\,x^2}{3(2\alpha + a)a};$$

nämlich es iſt $p : q = (3\alpha + a)a^2 : (3\alpha + x)x^2$,

alſo $x^3 + 3\alpha x^2 = \frac{p}{q}(3\alpha + a)a^2$,

und es läßt ſich ſonach der Werth von x nur durch die Auflöſung einer kubiſchen Gleichung finden.

8. Die Formel für den Kubikinhalt eines elyptiſchen Abſchnitts iſt, nach No. 4.,

$$V = F \sin\varphi \cdot \frac{(3\alpha - x)x}{3(2\alpha - x)}$$

und für x = a wird der Inhalt P des Abſchnitts

$$P = F \sin\varphi \cdot \frac{(3\alpha - a)a}{3(2\alpha - a)}.$$

Soll nun hiervon durch eine zu F parallele Fläche ein Stück K abgeſchnitten werden, ſo daß P : K = p : q ſich verhält, ſo iſt, wenn man die Grundfläche des Abſchnitts Z und die dazu gehörige Abſciſſe = x ſetzt,

$$K = Z \sin\varphi \cdot \frac{(3\alpha - x)x}{3(2\alpha - x)}$$

und es iſt daher

$$P : K = p : q = F \cdot \frac{(3\alpha - a)a}{3(2\alpha - a)} : Z \cdot \frac{(3\alpha - x)x}{3(2\alpha - x)}$$

und weil $F : Z = b^2 : y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(2\alpha a - a^2) \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2}(2\alpha x - x^2)$,

$$\text{alſo } F : Z = (2\alpha - a)a : (2\alpha - x)x,$$

ſo iſt auch

$$p : q = (3\alpha - a)a^2 : (3\alpha - x)x^2,$$

$$\text{und daher } 3\alpha x^2 - x^3 = \frac{q}{p}(3\alpha - a)a^2,$$

eine Gleichung, die ebenfalls vom dritten Grade iſt, wie auch ſchon zum Voraus eingeſehen werden konnte, da die Ausdrücke für elyptiſche Segmente von denen für die hyperboliſchen nur durch das Zeichen verſchieden ſind.

Zuſatz. Archimedes ſtellt in der Einleitung zu ſeiner Abhandlung von den Konoiden und Sphäroiden den Satz auf, daß ſonach auch die Aufgabe gelöſt werden könnte: „von einem gegebenen ſphäroidiſchen oder Konoiden-Abſchnitte durch eine zur Grundfläche deſſelben parallele Ebene ein Stück abzuſchneiden, das einem gegebenen Kegel oder Cylinder oder einer gegebenen Kugel gleich ſei"; es werden dieſe Aufgaben in der genannten Abhandlung aber nicht vorgefunden. Rivault giebt die Auflöſung dieſer Aufgabe für den Abſchnitt eines paraboliſchen Konoids und für den des elyptiſchen Sphäroids. Er führt aber dieſe Aufgabe in Beziehung auf das Sphäroid auf Satz 5. des zweiten Buches der Abhandlung des Archimedes von der Kugel und dem Cylinder zurück. Dieſer Satz enthält nämlich die Aufgabe: eine gegebene Kugel ſo zu ſchneiden, daß die Abſchnitte zu einander in einem gege-

benen Verhältniſſe ſtehen. Die Auflöſung dieſer letztern Aufgabe aber wird in folgender Art gegeben: Sollen die Abſchnitte zu einander wie m : n ſich verhalten, ſo daß m die größere Zahl bedeutet, und iſt abcd, Fig. 90., ein größter Kreis und k der Mittelpunkt der Kugel, ſo ziehe man den Durchmeſſer db, nehme bf = bk und ſchneide dieſe Linie in h, ſo daß

$$fh : hb = m : n,$$

ſchneide hierauf bd in x, daß

$$xf : fh = (bd)^2 : (dx)^2,$$

ſo iſt x der Punkt des Durchmeſſers bd, durch welchen normal auf dieſem Durchmeſſer die theilende Ebene gelegt werden muß. Nun iſt es zwar ſehr einfach, die Linie fb in h ſo zu theilen, daß die Theile in dem gegebenen Verhältniſſe m : n zu einander ſtehen: was aber die Aufgabe anbelangt, in der Linie fd den Punkt x ſo zu beſtimmen, daß die Proportion ſtatt findet

$$xf : fh = (bd)^2 : (dx)^2,$$

ſo heißt es zwar, daß von derſelben am Ende die Auflöſung und Conſtruction gegeben werden ſoll, man findet dieſelbe aber nicht in den Werken des Archimedes. Zwar hat Eutocius eine Auflöſung dieſer Aufgabe geliefert, es iſt hierbei aber eine Parabel und eine Hyperbel zu beſchreiben, und ſie kann daher auch nicht als geometriſch angeſehen werden. Es läßt ſich auch leicht einſehen, daß eine ſolche überhaupt nicht gut möglich iſt, weil es hierbei darauf ankommt, eine kubiſche Gleichung zu conſtruiren. Denn ſetzt man kb = bf = R, fh = k und bx = x, ſo giebt die Proportion

$$(xf) : (fh) = (bd)^2 : (dx)^2,$$

wenn man dieſe Werthe ſetzt,

$$(R+x) : k = (2R)^2 : (2R-x)^2$$

und es iſt daher $(R+x)(2R-x)^2 = 4kR^2$

eine Gleichung von dem dritten Grade.

§. 142.

Bemerkungen über das Berechnen des Inhaltes der Körper durch Näherung.

1. Der Inhalt eines Körpers abcm, Fig. 85., läßt ſich in den meiſten Fällen, auch wenn die Gleichungen für die

Curven bac und $m\alpha a$ gegeben ſind, mit Hülfe der Formeln, §. 133., nicht vollſtändig berechnen, weil gewöhnlich die vorzunehmenden Integrationen nicht vorgenommen werden können, oder doch zu ſo weitläufigen Formeln führen, daß für die Anwendung kein bequemer Gebrauch von denſelben gemacht werden kann. Es bleibt daher in ſolchen Fällen nichs anderes übrig, als entweder die zu integrirenden Ausdrücke in Reihen aufzulöſen, und die Integralien der einzelnen Glieder zu beſtimmen, um ſo eine Näherungsreihe für den Inhalt zu erhalten, oder man muß, indem man die allgemeinen Formeln ganz unbeachtet läßt, den Körper in viele kleine Theile zerlegt denken, von welchen jeder eine einfache Form hat, ſo daß der Inhalt deſſelben mittelſt der in der erſten Abtheilung gegebenen Regeln berechnet werden kann.

2. Gewöhnlich zerlegt man einen Körper zu dieſer Abſicht durch zur Grundfläche parallele Ebenen, und betrachtet nun jeden Theil als eine abgeſtumpfte Pyramide. Sind aber die beiden parallelen Flächen der abgeſtumpften Pyramide G und g, und iſt der normale Abſtand beider von einander $=$ h, und die Höhe h unbedeutend, ſo können auch G und g nur ſehr wenig von einander verſchieden ſein. Die allgemeine Formel für den Inhalt einer abgeſtumpften Pyramide iſt nun, nach §. 62.,

$$P = \frac{h}{3}(G + g + \sqrt{Gg}).$$

Wird aber in dem Körper abcm, Fig. 85., der Theil $abc\alpha\beta\gamma$ als abgeſtumpfte Pyramide angeſehen, ſo muß auch $\alpha\beta\gamma$ als der Fläche abc ähnlich angenommen werden, und es iſt bei dieſer Vorausſetzung

$$abc : \alpha\beta\gamma = (ad)^2 : (\alpha\delta)^2,$$

oder, wenn man $ad = A$ und $\alpha\delta = a$ ſetzt,

$$G : g = A^2 : a^2$$

und daher, wenn man $G = mA^2$ ſetzt, ſo muß $g = ma^2$ ſein, woraus nun auch folgt

$$P = \frac{h}{3}(mA^2 + ma^2 + mAa);$$

nämlich es iſt

$$P = \frac{hm}{2}(A^2+a^2) - \frac{hm}{6}(A^2+a^2) + \frac{hmAa}{3},$$

oder $P = \frac{hm}{2}(A^2+a^2) - \frac{hm}{6}(A^2+a^2-2Aa)$

$$= h\left(\frac{A^2m+a^2m}{2}\right) - \frac{h}{6}(A-a)^2m$$

$$= h\left(\frac{G+g}{2}\right) - \frac{h}{6}(A-a)^2m.$$

Dieſe Formel giebt zu erkennen, daß wenn man eine abgeſtumpfte Pyramide einem Prisma gleich ſetzt, welches mit derſelben gleiche Höhe hat, und deſſen Grundfläche das arithmetiſche Mittel zwiſchen beiden Flächen der Pyramide iſt, der Inhalt um $\frac{h}{6}(A-a)^2m$ zu groß erhalten wird. Dieſe Differenz iſt einer Pyramide gleich, deren Grundfläche G ähnlich iſt, und wo die in G vorkommende Linie A, der Linie $A-a$ homolog iſt, und deren Höhe der halben Höhe der abgeſtumpften Pyramide gleich iſt. Für eine kleine Differenz $= G-g$ und für eine unbedeutende Höhe h kann man alſo ohne merklichen Fehler den Inhalt P einer abgeſtumpften Pyramide ausdrücken durch

$$P = h\left(\frac{G+g}{2}\right).$$

3. Sind nun zwar die Flächen abc und $\alpha\beta\gamma$, Fig. 85., einander ähnlich, iſt aber die Seitenfläche des Körpers abc$\alpha\beta\gamma$ gekrümmt, ſo daß die Linien wie aα auswärts gebogen ſind, ſo iſt, wie klein man auch h annehmen mag, doch immer der Inhalt des Körpers größer, als der einer abgeſtumpften Pyramide, welche dieſelben Grundflächen und dieſelbe Höhe hat, und es kommt daher die Formel

$$P = h\left(\frac{G+g}{2}\right)$$

dem Inhalte dieſes Körpers näher, als die richtige Formel für die abgeſtumpfte Pyramide.

4. Iſt $\alpha\beta\gamma$ der abc nicht ähnlich, und man findet für $abc = G = mA^2$ den Inhalt von $\alpha\beta\gamma = g > ma^2$, doch ſo, daß die Differenz $g - ma^2$ nicht bedeutend iſt, ſo hat der Körper ebenfalls einen Inhalt, der nur um wenig größer iſt, als der

einer abgeſtumpften Pyramide, und man kann alſo auch in dieſem Falle den Inhalt $= h\left(\frac{G+g}{2}\right)$ ſetzen.

5. Wird ein Körper von der Art No. 3 oder 4. durch zur Grundfläche parallele Ebenen in eine hinlänglich große Anzahl $= n$ Scheiben zerlegt gedacht, von welchen jede eine Höhe $= h$ hat, und ſetzt man den Flächeninhalt der zu dieſen Scheiben gehörigen Grudflächen ${}^1G$, ${}^2G$, ${}^3G$, ${}^4G \ldots\ldots {}^nG$, ſo daß alſo zu der erſten Scheibe die beiden Flächen gehören ${}^1G$ und ${}^2G$, zu der zweiten ${}^2G$ und ${}^3G$, zu der dritten ${}^3G$ und ${}^4G$ ꝛc., zu der nten die Scheibe ${}^nG$ und 0, ſo wird der Inhalt Q dieſes Körpers näherungsweiſe ausgedrückt durch die Formel

$$Q = h\left[\frac{{}^1G+{}^2G}{2} + \frac{{}^2G+{}^3G}{2} + \frac{{}^3G+{}^4G}{2} \ldots + \frac{{}^{n-1}G+{}^nG}{2} + \frac{{}^nG+0}{2}\right]$$

und es iſt derſelbe daher

$$Q = h\left(\tfrac{1}{2}{}^1G + {}^2G + {}^3G + {}^4G \ldots + {}^nG\right);$$

eine Formel, die allerdings ſehr bequem iſt, bei deren Gebrauch es aber doch in vielen Fällen ſchwierig wird, die Werthe von ${}^1G$, ${}^2G$, ${}^3G$ ꝛc. zu beſtimmen.

6. Iſt z. B. ein kuppelförmiger Körper mit irgend einer Grundfläche $= {}^1G$ zu berechnen, wo alle parallelen Schnitte einander ähnlich ſind, und von welchem der Durchſchnitt daf, Fig. 89., ein elyptiſcher Bogen iſt, und man ſetzt die beiden Halbaxen der Elypſe a und b, die zu der Abſciſſe $ae = {}^1x = nh$ gehörige Ordinate $ef = {}^1y$, und die der Abſciſſe $= (n-1)\,h = {}^2x$ entſprechende Ordinate $= {}^2y$, ſo iſt

$${}^1G : {}^2G = ({}^1y)^2 : ({}^2y)^2$$

und alſo auch $${}^1G : {}^2G = \frac{b^2}{a^2}(2a\,{}^1x - ({}^1x)^2) : \frac{b^2}{a^2}(2a\,{}^2x - ({}^2x)^2)$$
$$= (2a - {}^1x)\,{}^1x : (2a - {}^2x)\,{}^2x$$
$$= (2a - nh)\,nh : (2a - (n-1)h)(n-1)h$$
$$= (2a - nh)\,n : (2a - nh + h)(n-1),$$

folglich iſt $${}^2G = {}^1G \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{2a-nh+h}{2a-nh}\right) = \frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{h}{2a-nh}\right)G^1.$$

Da aber ganz allgemein

$$ {}^1G : {}^rG = (2a - {}^1x){}^1x : (2a - {}^rx){}^rx $$

und ${}^rx = n - (r-1)h$, ſo iſt auch

$$ {}^1G : {}^rG = (2a - nh)n : (2a - (n-(r-1))h(n-r), $$

und $$ {}^rG = \frac{n-r}{n}\left(1 + \frac{(r-1)h}{2a-nh}\right)G^1 $$

und es iſt daher

$$ \begin{aligned} {}^1G &= {}^1G, \\ {}^2G &= \frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{h}{2a-nh}\right){}^1G, \\ {}^3G &= \frac{n-2}{n}\left(1 + \frac{2h}{2a-nh}\right){}^1G, \\ {}^4G &= \frac{n-3}{n}\left(1 + \frac{3h}{2a-nh}\right){}^1G, \\ {}^5G &= \frac{n-4}{n}\left(1 + \frac{4h}{2a-nh}\right){}^1G \text{ etc.}, \end{aligned} $$

wo es nun leicht iſt, die Werthe der verſchiedenen Flächen zu berechnen. Uebrigens kann man auch dieſe Ausdrücke ſummiren, und ſo für dieſen Fall eine directe Formel zur Berechnung des Inhalts des ganzen Körpers ableiten.

7. Die in No. 5. gefundene Näherungsformel für den Kubikinhalt eines Körpers iſt

$$ Q = h(\tfrac{1}{2}\,{}^1G + {}^2G + {}^3G + {}^4G \cdots\cdots + {}^nG); $$

werden nun hier die in No. 6. angegebenen Werthe ſubſtituirt, um den Inhalt eines kuppelförmigen Körpers, der von elyptiſchen Bogen eingeſchloſſen wird, auszudrücken, ſo erhält man

$$ Q = \frac{h}{2}\,{}^1G + \left[\frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{h}{2a-nh}\right){}^1G + \frac{n-2}{n}\left(1 + \frac{2h}{2a-nh}\right){}^1G \right. $$
$$ \left. + \frac{n-3}{n}\left(1 + \frac{3h}{2a-nh}\right){}^1G \cdots\cdots + \frac{n-(n-1)}{n}\left(1 + \frac{(n-1)h}{2a-nh}\right){}^1G\right]h, $$

nämlich es iſt, wenn man jedes Glied in zwei Theile theilt,

$$ Q = \frac{{}^1Gh}{2} + {}^1G\left(\frac{(n-1)}{n} + \frac{(n-2)}{n} + \frac{(n-3)}{n} \cdots\cdots \frac{1}{n}\right)h $$
$$ + {}^1G\left[\frac{(n-1)h}{n(2a-nh)} + \frac{(n-2)\cdot 2h}{n(2a-nh)} + \frac{(n-3)\cdot 3h}{n(2a-nh)} \cdots \right. $$
$$ \left. \cdots + \frac{(n-(n-1))\cdot(n-1)h}{n(2a-nh)}\right]h, $$

$$\text{alſo iſt } Q = \frac{{}^1Gh}{2} + \frac{{}^1Gh}{n}(1+2+3+4\dots$$
$$+(n-1)) + \frac{{}^1Gh}{n(2a-nh)}[(n-1)h+(n-2)\cdot 2h+(n-3)\cdot 3h\dots$$
$$+(n-(n-1))(n-1)h]$$

$$\text{und daher auch } Q = \frac{{}^1Gh}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{{}^1Gh}{n}$$
$$+\frac{{}^1Gh}{n(2a-nh)}[(n+2n+3n\dots\dots+(n-1)n)h-(h+4h+9h$$
$$+16h\dots(n-1)^2)h],$$

$$\text{alſo iſt } Q = \frac{{}^1Gh}{2} + \left(\frac{n-1}{2}\right){}^1Gh + \frac{{}^1Gh^2}{n(2a-nh)}\left[\frac{n(n-1)}{2}\cdot n\right.$$
$$\left.-(1^2+2^2+3^2+4^2\dots+(n-1)^2)\right]$$

und weil die Summe der Quadratzahlen von 1 bis $n-1$ iſt

$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, \text{ ſo wird}$$

$$Q = {}^1G\left[\frac{h}{2} + \left(\frac{n-1}{2}\right)h + \frac{h^2}{2a-nh}\left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6}\right)\right].$$

Hiernach iſt

$$Q = {}^1Gh\left[\frac{n}{2} + \frac{h}{2a-nh}\left(\frac{(n+1)(n-1)}{6}\right)\right].$$

Iſt nun die Axe ac, Fig. 89., des Körpers $= a$, ſind alſo die Bogen af ꝛc. elyptiſche Quadranten, ſo wird $a = nh$ und $h = \frac{a}{n}$, folglich wird in dieſem Falle

$$Q = {}^1G\cdot\frac{a}{n}\left[\frac{n}{2} + \frac{(n+1)(n-1)}{6n}\right]$$
$$= G^1a\left[\frac{4n^2-1}{6n^2}\right] = G^1a\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{6n^2}\right]$$

und für einen unendlich großen Werth von n erhält man

$$Q = \tfrac{2}{3}a^1G,$$

welches die richtige Formel für alle kuppelförmigen Körper iſt, deren Bogen elyptiſche Quadranten ſind, und es geht zugleich hieraus hervor, daß die gefundene Näherungsformel richtig iſt.

Wird aber in der Formel

$$Q = {}^1Gh\left[\frac{n}{2} + \frac{h}{2a-nh}\left(\frac{(n+1)(n-1)}{6}\right)\right]$$

angenommen, daß die Axe $ae = nh$ irgend einen beſtimmten

Theil von der Axe ac der Elypſe bildet, ſo kann man ſetzen $2a = m \cdot nh$, und es iſt alsdann $h = \frac{2a}{mn}$; alſo wird

$$Q = {}^1G \cdot \frac{2a}{mn}\left[\frac{n}{2} + \frac{1}{(m-1)n}\left(\frac{(n+1)(n-1)}{6}\right)\right]$$

$$= \frac{a^1G}{m}\left[1 + \frac{(n+1)(n-1)}{3(m-1)n^2}\right]$$

und da jedenfalls n eine große Zahl iſt, ſo wird $(n+1)(n-1) = n^2-1$ nicht weſentlich verſchieden von n^2, und es iſt daher

$$Q = \frac{a^1G}{m}\left[1 + \frac{1}{3(m-1)}\right],$$

$$\text{oder } Q = \frac{3m-2}{3(m-1)m} \cdot a^1G$$

der allgemein geltende Näherungswerth für den Inhalt der oben angegebenen Gattung von Körpern.

8. Wenngleich die Formel für den Inhalt der Körper

$$Q = h(\tfrac{1}{2}\,{}^1G + {}^2G + {}^3G + {}^4G \cdots + {}^nG)$$

durch die Vorausſetzung abgeleitet worden iſt, daß der Inhalt einer abgeſtumpften Pyramide $= \left(\frac{G+g}{2}\right)h$, wodurch der Werth allerdings zu groß ſich ergiebt, ſo führt dieſelbe doch für einen hinlänglich kleinen Werth von h, ſelbſt bei der Berechnung einer gewöhnlichen Pyramide zu einem richtigen Reſultate. Iſt die Grundfläche derſelben $= {}^1G = F$ und die Höhe $= a = nh$, ſo wird, wenn die in ${}^1G$, ${}^2G$, ${}^3G \cdots$ vorkommenden homologen Linien mit ${}^1A$, ${}^2A$, ${}^3A \cdots$ bezeichnet werden,

$${}^1G : {}^2G : {}^3G \cdots = ({}^1A)^2 : ({}^2A)^2 : ({}^3A)^2 \cdots$$

oder weil bei einer Pyramide die Proportion ſtatt findet

$${}^1A : {}^2A = nh : (n-1)h = n : (n-1)$$

$${}^1A : {}^3A = nh : (n-2)h = n : (n-2) \text{ ꝛc.},$$

ſo iſt auch

$${}^1G : {}^2G : {}^3G = n^2 : (n-1)^2 : (n-2)^2 \text{ ꝛc.}$$

und es iſt daher für ${}^1G = F$

$${}^2G = \frac{(n-1)^2}{n^2}F,\ {}^3G = \frac{(n-2)^2}{n^2}F,\ {}^4G = \frac{(n-3)^2}{n^2}F \cdots$$

und daher wird

$${}^2G + {}^3G + {}^4G \cdots + {}^nG =$$

$$\left(\frac{(n-1)^2+(n-2)^2+(n-3)^2 \ldots\ldots +2^2+1^2}{n^2}\right)F =$$

$$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)\,n(2n-1)}{6} \cdot F = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n} \cdot F,$$

und es iſt daher

$$Q = h\left(\frac{1}{2} + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n}\right)F$$

$$= h\left(\frac{2n^2-1}{6n}\right)F,$$

wofür man, da in jedem Falle n ſehr groß angenommen werden muß, ſetzen kann

$$Q = h\left(\frac{2n^2}{6n}\right) \cdot F = \tfrac{1}{3}hnF,$$

und da $hn=a$ die Höhe der Pyramide giebt, ſo iſt

$Q = \frac{1}{3}hF$, wie es ſein muß.

9. In §. 133. iſt die allgemeine Formel für den Inhalt der Körper gefunden worden

$V = \sin\alpha \int Zdx$ und $Z = \int ydz$.

Iſt nun $y=f(z)$ eine ſolche Function, daß entweder das Integral $\int ydz$ gar nicht gefunden werden kann, oder doch einen ſehr zuſammengeſetzten Ausdruck giebt, ſo wird dadurch natürlich die Ermittelung des Werthes von $\int Zdx$ ſehr ſchwierig oder gar unausführbar, und es iſt daher in einem ſolchen Falle immer zweckmäßig, für Z einen bequemen Näherungswerth, und alsdann entweder V mit Hülfe der Formel

$V = \sin\alpha \int Zdx = \int Zdx$, wenn $\alpha = 90^0$,

zu ermitteln, oder mit Hülfe der in No. 5. aufgeſtellten Formel

$$Q = h(\tfrac{1}{2}\,{}^1G + {}^2G + {}^3G + {}^4G \ldots\ldots + {}^nG).$$

10. Es ſei z. B. $km\alpha n$, Fig. 86a., ein größter Kreis der Kugel und $\alpha'\delta'\gamma$ der Durchſchnitt eines Hufes, deſſen Inhalt beſtimmt werden ſoll. Man ſetze den Radius der Kugel $=R$, $\gamma\delta=\varrho$ und $\delta g=b$, ſo iſt von dieſen drei Größen jede durch die zwei übrigen beſtimmt. Setzt man nun $\gamma\delta'=x$, $\delta'\alpha'=z$ und $g'\alpha'=y$, ſo iſt Z ein Abſchnitt des Kreiſes, deſſen Radius $=y$ iſt, und der eine Höhe $=z$ hat. Da nun $(\alpha'\delta')\times(\delta'k')=(\gamma\delta')\times(\delta'\beta)$, ſo iſt auch

$$z(2y - z) = x(2\varrho - x),$$

oder weil $z = y - b$

$$(y+b)(y-b) = y^2 - b^2 = (2\varrho x - x^2),$$

und es iſt daher $y^2 = b^2 + 2\varrho x - x^2$.

Die Fläche des Kreisabſchnitts Z wird bekanntlich ausgedrückt durch die Formel

$$Z = y^2 \operatorname{Arc}\cos\frac{b}{y} - b\sqrt{(2\varrho x - x^2)},$$

alſo iſt der Werth Z auch als Function von x beſtimmt, nämlich es iſt

$$Z = -b\sqrt{(2\varrho x - x^2)} + (b^2 + 2\varrho x - x^2)\operatorname{Arc}\cos\frac{b}{\sqrt{(b^2 + 2\varrho x - x^2)}}.$$

Nun läßt ſich zwar allerdings für dieſe Function $= Z$ der Werth von $\int Z \cdot dx$ beſtimmen; die Rechnung wird aber ziemlich weitläufig, und es iſt daher zweckmäßiger, für Z einen Näherungswerth zu ermitteln.

Da $Z = -b\sqrt{(2\varrho x - x^2)} + y^2 \operatorname{Arc}\cos\frac{b}{y}$,

ſo iſt auch, wenn man $\operatorname{Arc}\cos\frac{b}{y} = \varphi$ ſetzt, alſo $\frac{b}{y} = \cos\varphi$,

$$Z = -b\sqrt{(2\varrho x - x^2)} + y^2\varphi.$$

Nun hängt bekanntlich ein Bogen φ von ſeinem Coſinus durch die Gleichung ab

$$\tfrac{1}{2}\pi - \varphi = \cos\varphi + \frac{1}{3}\cdot\frac{\cos^3\varphi}{2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot 3\cos^5\varphi}{2\cdot 4} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cos^7\varphi}{2\cdot 4\cdot 6}\cdots$$

alſo iſt auch, weil hier $\cos\varphi = \frac{b}{y}$,

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - \left[\frac{b}{y} + \frac{1}{3}\cdot\frac{b^3}{2y^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot 3b^5}{2\cdot 4y^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot b^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot y^7}\cdots\right]$$

und es iſt daher

$$Z = -b\sqrt{(2\varrho x - x^2)} + \frac{y^2}{2}\pi - by - \frac{1}{3}\cdot\frac{b^3}{2y} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot b^5}{2\cdot 4\cdot y^3}\cdots$$

Nun iſt $y^2 = b^2 + 2\varrho x - x^2$ und daher $y dy = (\varrho - x) dx$,

alſo $dx = \frac{y dy}{\varrho - x}$,

und weil $x^2 - 2\varrho x + \varrho^2 = \varrho^2 + b^2 - y^2 = R^2 - y^2$,

wenn der Winkel $\alpha'\delta'\gamma = 90^0$ angenommen wird, ſo iſt

$$\varrho - x = \sqrt{(R^2 - y^2)}$$

$$\text{und } dx = \frac{ydy}{\sqrt{(R^2-y^2)}},$$

daher iſt Zdx =

$$-bdx\sqrt{(2\varrho x-x^2)}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y^3dy}{\sqrt{(R^2-y^2)}}-\frac{by^2dy}{\sqrt{(R^2-y^2)}}-\frac{b^3}{3\cdot 2}\cdot\frac{dy}{\sqrt{(R^2-y^2)}}$$
$$-\frac{1\cdot 3\cdot b^5}{5\cdot 2\cdot 4}\cdot\frac{dy}{y^2\sqrt{(R^2-y^2)}}\ldots$$

und es läßt ſich nun der Werth von $V=\int Zdx$ bequem durch eine Reihe ausdrücken, die hinreichend convergirt.

11. Soll der Inhalt eines kuppelförmigen Körpers gefunden werden, welcher irgend eine Grundfläche hat $=F$, und von welchem $\gamma\alpha\delta$, Fig. 86a., ein Durchſchnitt iſt, ſo daß die Linien von dem Scheitel deſſelben an den Umfang der Grundfläche Kreisbogen ſind, ſo ſind, wie bei allen kuppelförmigen Körpern, die zur Grundfläche parallelen Schnitte einander ähnlich, und es iſt daher, wenn die Fläche durch $\alpha'\delta'=Z$ geſetzt wird,

$$F : Z = (\alpha\delta)^2 : (\alpha'\delta')^2.$$

Für $\gamma\delta'=x$, $\delta'\alpha'=z$, $\gamma\delta=\varrho$, $\alpha'g'=g$ und $g'\delta'=y$ iſt nun

$$(2\varrho x-x^2)=y^2-b^2,$$
$$\text{alſo } y=\sqrt{(b^2+2\varrho x-x^2)},$$

nämlich es iſt, wenn man das Binom entwickelt, indem hierbei b^2 als der erſte und $2\varrho x-x^2$ als der zweite Theil angeſehen wird,

$$y=b+\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\varrho x-x^2)}{b}-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{(2\varrho x-x^2)^2}{b^3}+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{(2\varrho x-x^2)^3}{b^5}$$
$$-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{(2\varrho x-x^2)^4}{b^7}\ldots.$$

Da nun $z^2=(y-b)^2=y^2-2by+b^2$, ſo iſt auch

$$z^2=y^2+b^2-2b\left(b+\frac{1}{2}\,\frac{(2\varrho x-x^2)}{b}-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{(2\varrho x-x^2)^2}{b^3}\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{(2\varrho x-x^2)^3}{b^5}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{(2\varrho x-x^2)^4}{b^7}\ldots.\right),$$

nämlich es iſt

$$z^2=y^2-b^2-(2\varrho x-x^2)+2b\left[\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{(2\varrho x-x^2)^2}{b^3}-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{(2\varrho x-x^2)^3}{b^5}\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{(2\varrho x-x^2)^4}{b^7}\ldots\right]$$

und da $y^2 - b^2 = 2\varrho x - x^2$, ſo fallen die beiden erſten Glieder des zweiten Theils der Gleichung hinweg.

Nach §. 138. iſt nun die Formel für den Inhalt aller kuppelförmigen Körper

$$V = \frac{F}{a^2} \int z^2 dx,$$

folglich iſt in dem gegenwärtigen Falle

$$V = \frac{2bF}{a^2}\Big[\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot b^3}\int dx(2\varrho x - x^2)^2 - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot b^5}\int dx\,(2\varrho x - x^2)^3$$
$$+ \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot b^7}\int dx\,(2\varrho x - x^2)^4 \ldots\Big]$$

wo blos Integralien von ganzen rationalen Funktionen vorkommen.

Vierter Abſchnitt.

Von den Durchſchnitten zweier Flächen.

§. 143.

Von den Durchſchnitten überhaupt.

Jede Ebene wird von einer geraden Linie, die nicht parallel zu derſelben iſt, in einem Punkte geſchnitten, und zwei nicht parallel laufende Ebenen ſcheiden ſich immer in einer geraden Linie; wenn aber eine krumme Fläche entweder von einer Ebene oder ſelbſt wieder von einer krummen Fläche geſchnitten wird, ſo iſt der Durchſchnitt in den meiſten Fällen eine Curve, und öfters eine ſolche, die doppelt gekrümmt wird. So iſt z. B., wenn ein Kegel von einer Ebene geſchnitten wird, die Gränze des Schnittes ein Kegelſchnitt, alſo immer eine Curve, wenn der Schnitt nicht durch die Spitze des Kegels geht; aber dieſe Curve liegt doch immer in einer und derſelben Ebene, wie ſich von ſelbſt verſteht, da ſie in der ſchneidenden Ebene liegen muß, und ſie iſt daher nur einfach gekrümmt: daſſelbe gilt von allen Curven, die dadurch

gebildet werden, daß irgend eine gekrümmte Fläche von einer Ebene geſchnitten wird. Wenn aber zwei gekrümmte Flächen ſich gegenſeitig ſchneiden, ſo liegt der Durchſchnitt keinesweges in einer Ebene, und man nennt die Curve in dieſem Falle doppelt gekrümmt; ſo iſt dieſes z. B. bei der Gränze des Schnittes der Fall, wenn zwei Cylinder ſich gegenſeitig ſchneiden ꝛc. Gewöhnlich erklärt man eine doppelt gekrümmte Curve als eine ſolche, von der kein Theil in einer und derſelben Ebene liegt, und man kann dieſelbe entweder durch das Schneiden zweier gekrümmten Flächen entſtanden denken, oder auch dadurch, daß eine Curve auf einer krummen Fläche entworfen wird: übrigens iſt leicht einzuſehen, daß in beiden Fällen die Curve keinesweges nothwendigerweiſe doppelt gekrümmt ſein muß. Schneiden ſich z. B. zwei Cylinder ſo, daß ihre Axen parallel laufen, ſo iſt der Durchſchnitt ſogar eine gerade Linie, und jeder Kreis auf der Oberfläche einer Kugel iſt nur einfach gekrümmt ꝛc.

Das Geſetz für eine einfach gekrümmte Curve iſt durch eine Gleichung mit zwei veränderlichen Größen vollkommen beſtimmt; es läßt ſich nämlich, wenn man für jeden Werth der Abſciſſe den entſprechenden Werth der Ordinate kennt, jeder Punkt der Curve beſtimmen. Die Ordinaten liegen natürlich mit der Abſciſſenlinie ſämmtlich in derſelben Ebene, in welcher auch die Curve liegen muß, und hieraus folgt unmittelbar, daß eine ſolche Gleichung mit zwei veränderlichen Größen zu der Conſtruction einer doppelt gekrümmten Curve nicht hinreichen kann. Da von einer ſolchen kein Theil in einer und derſelben Ebene liegt, ſo kann irgend eine Ebene ihrer Lage nach angenommen werden, und man von allen Punkten der doppelt gekrümmten Curve Normalen auf dieſe Ebene fällen; dieſe Normalen werden von verſchiedener Größe ſein, weil ſonſt die Curve in einer, zu der angenommenen parallelen Ebene liegen müßte, und es werden dieſelben die angenommene Ebene in verſchiedenen Punkten treffen, die nun eine einfach gekrümmte Curve in dieſer Ebene bilden. Dieſe Curve nennt man die **Projection** der doppelt gekrümmten, und ſie iſt durch eine Gleichung, zwiſchen zwei veränderlichen Größen x und y beſtimmt. Da nun, wenn die Projection

conſtruirt iſt, noch für jeden Punkt derſelben die Höhe der Normale auf der Ebene beſtimmt werden muß, deren Endpunkt ein Punkt der doppelt gekrümmten Curve iſt, ſo wird hierzu noch eine zweite Gleichung erforderlich ſein, durch welche ausgedrückt wird, wie die Werthe dieſer Normale = z von x und y abhängen, und dieſes führt zu dem Reſultate, daß eine doppelt gekrümmte Curve ihrer Form nach durch zwei Gleichungen mit drei veränderlichen Größen vollkommen beſtimmt iſt. Die Conſtruction derſelben geſchieht mit Hülfe dreier ſenkrecht auf einander ſtehenden Coordinaten-Axen, und es werden auf der einen die Werthe der Abſciſſen = x angenommen, die hierdurch beſtimmten Ordinaten = y werden parallel zu der zweiten Axe an dem Endpunkte der Abſciſſen gezogen, und an dem Endpunkte der Ordinaten y zieht man parallel zu der dritten Axe die Linien = z, deren Endpunkte in der zu conſtruirenden Curve liegen.

Sind die beiden Gleichungen für die doppelt gekrümmte Curve

$$f(x, y, z) = 0 \text{ und } F(x, y, z) = 0,$$

ſo kann man in beiden den Werth von z ſuchen, und beide Werthe einander gleich ſetzen, wodurch eine Gleichung zwiſchen x und y erhalten wird

$$\varphi'(x, y) = 0,$$

durch deren Conſtruction eine Projection der Curve in der Ebene der beiden erſten Coordinaten-Axen erhalten wird: nämlich in der Ebene, in welcher die Axen X und Y liegen, wenn man die drei Coordinaten-Axen mit X, Y und Z bezeichnet. Da aber aus den beiden Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0 \text{ und } F(x, y, z) = 0$$

auch y eliminirt werden kann, und man alsdann eine Gleichung

$$\varphi''(x, z) = 0$$

zwiſchen x und z erhält, ſo kann auch dieſe, und zwar in der Ebene der Axen X und Z conſtruirt werden, wodurch man eine zweite Projection der doppelt gekrümmten Curve erhält, und es verſteht ſich von ſelbſt, daß außerdem noch eine dritte Gleichung

$$\varphi'''(z, y) = 0$$

aus den beiden gegebenen abgeleitet werden kann, durch welche eine dritte Projection in der Ebene der Axen Z und Y beſtimmt iſt.

Hieraus geht hervor, daß jeder gegebenen doppelt gekrümmten Curve drei Projectionen zugehören, welche in den Ebenen liegen X, Y; X, Z und Y, Z, und daß dieſe durch die beiden gegebenen Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0 \text{ und } F(x, y, z) = 0$$

beſtimmt ſind. Da aber aus den Gleichungen für die beiden erſten Projectionen

$$\varphi'(x, y) = 0 \text{ und } \varphi''(x,z) = 0$$

unmittelbar die dritte $\varphi'''(y, z) = 0$ abgeleitet werden kann, ſo folgt, daß umgekehrt eine doppelt gekrümmte Curve vollkommen beſtimmt iſt, wenn zwei Projectionen derſelben gegeben ſind, und es iſt hierdurch auch die dritte Projection derſelben vollkommen beſtimmt.

Iſt eine der Projectionen einer doppelt gekrümmten Curve, z. B. die in der Ebene der Axen X, Y gegeben, und man errichtet nun in jedem Punkte derſelben eine Normale, die den dieſem Punkte zugehörigen Werth von z hat, ſo liegen dieſe z ſämmtlich in der krummen Fläche eines Körpers, welcher die gegebene Projection zur Grundfläche hat, und dem die Eigenſchaft zukommt, daß alle Schnitte, parallel zur Grundfläche, dieſer congruent ſind; da dieſe Eigenſchaft nur den Prismen zukommt, ſo gehört der Körper zu dieſer Gattung, und insbeſondere kann er ein Cylinder genannt werden, wenn man dieſe Benennung auf alle prismenartige Körper ausdehnt, welche eine von krummen Linien begränzte Grundfläche haben. Ein ſolcher Cylinder entſteht aber nicht blos über der Projection in der Ebene der Axen X, Y, ſondern es kann ein ſolcher auch über jeder der beiden übrigen Projectionen gedacht werden; ſo kann z. B. auch die Projection in der Ebene der Coordinaten-Axen X, Z als Grundfläche angenommen werden, und es liegen alsdann alle y in der krummen Seitenfläche des hierdurch beſtimmten Cylinders ꝛc. Hieraus folgt:

Jede doppelt gekrümmte Curve kann als der Durchſchnitt

zweier normalen Cylinder angeſehen werden, deren Grundflächen zwei Projectionen der Curve ſind.

Eine doppelt gekrümmte Curve iſt durch zwei Gleichungen von der Form

$$f(x, y, z) = 0 \text{ und } F(x, y, z) = 0$$

vollkommen beſtimmt, und es können ſtatt deſſen auch die Gleichungen für zwei Projectionen

$$\varphi'(x, y) = 0 \text{ und } \varphi''(x, z) = 0$$

gegeben ſein. Nimmt man nun für x einen beſtimmten Werth an, ſo iſt dadurch der entſprechende Werth von y und von z gegeben, ohne daß hierbei noch irgend eine willkührliche Annahme ſtatt finden kann; außer daß vielleicht, was von der Form der Gleichungen abhängt, zu einem und demſelben Werthe von x zwei oder mehrere verſchiedene beſtimmte Werthe von y oder z oder auch von beiden gehören.

Iſt blos eine einzige Gleichung gegeben

$$f(x, y, z) = 0,$$

ſo reicht dieſe nicht hin, um dadurch das Weſen der doppelt gekrümmten Curve zu erkennen, da, wenn mit Hülfe derſelben eine Conſtruction vorgenommen werden ſoll, für ein beliebiges x noch ein dazu gehöriges beliebiges y angenommen werden muß, um einen dazu gehörigen Werth von z zu finden; man kann alſo auch zu einem beſtimmten Werthe von x mehrere verſchiedene Werthe von y annehmen, und alſo auf dieſe Weiſe unendlich viel verſchiedene Curven conſtruiren, die nur das mit einander gemein haben, daß ſie alle als in einer und derſelben krummen Fläche liegend gedacht werden können; hieraus geht hervor, daß durch eine Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

mit drei veränderlichen Größen eine krumme Fläche, ihrer Lage nach, gegen eine Ebene beſtimmt iſt, und es können daher die Eigenthümlichkeiten einer Fläche auch immer dadurch ausgedrückt werden, daß man für dieſelbe eine Gleichung mit drei veränderlichen Größen angiebt. Dieſes führt zu der Auflöſung der Aufgabe: Es ſind zwei Körper ihrer Form und ihrer gegenſeitigen Lage nach gegeben; man ſoll die Gleichung für die Curve des gemeinſchaftlichen Durchſchnittes beider auffinden. Die Auflöſung iſt folgende: Da die Körper gegeben ſind, ſo

iſt auch die Oberfläche derſelben beſtimmt, und es läßt ſich dieſe daher durch eine Gleichung mit drei veränderlichen Größen ausdrücken. Iſt nun dieſe Gleichung für die Oberfläche des einen Körpers

$$f(x, y, z) = 0$$

und für den anderen $F(x, y, z) = 0$,

ſo drücken dieſe beiden Gleichungen zuſammengenommen die Eigenthümlichkeiten der Curve aus, welche den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt beider Körper bildet, und es können nun aus dieſen Gleichungen die Projectionen der Curve gefunden werden.

Zuſatz 1. Da die Gleichungen

$$\varphi'(x, y) = 0 \text{ und } \varphi''(x, z) = 0$$

für die beiden Projectionen einer doppelt gekrümmten Curve die veränderliche Größe x gemein haben, ſo folgt, daß die zu einem beſtimmten x gehörigen Werthe von y und z immer in einer Ebene liegen müſſen, welche die Ebenen XY und XZ normal ſchneidet, und es ſind in jedem Falle y und z die beiden Seiten eines Rechtecks, von welchem die dem Endpunkte x gegenüberliegende Ecke der entſprechende Punkt der doppelt gekrümmten Curve iſt.

Zuſatz 2. Jede Linie ohne Ausnahme kann als eine doppelt gekrümmte Curve angeſehen und durch drei Coordinaten beſtimmt werden, und es ergiebt ſich alsdann aus den beſonderen Werthen der veränderlichen Größen, ob die Linie vielleicht blos einfach gekrümmt iſt, oder ob es gar eine gerade Linie iſt. Eben ſo hat die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

der Flächen überhaupt, auch für ebene Flächen Gültigkeit.

§. 144.

Aufgabe.

Es iſt die Lage einer geraden Linie zc im Raume, Fig. 91., auf folgende Art beſtimmt: die von z auf die Ebene des Winkels xby gefällte Normale trifft dieſe Ebene in y, und die Linie ſelbſt ſchneidet dieſelbe in c unter dem Neigungswinkel zcy = φ, die in der Ebene gezogene Linie ad aber wird von der normalen Ebene zyc in b unter dem Winkel

ybx = ψ geſchnitten, und man kennt in Beziehung auf den feſten Punkt a die Länge von ab = m und von bc = n; es ſollen hieraus die Gleichungen für die gerade Linie zc im Raume durch die Coordinaten ax = x, xy = y und yz = z abgeleitet werden.

Aufloͤſung. Es iſt

$$bx : xy = 1 : \text{tg}\ \psi,$$

alſo $m + x : y = 1 : \text{tg}\ \psi$

und daher iſt 1) $y = (m + x)\ \text{tg}\ \psi$,

ferner iſt $by : bx = 1 : \cos\psi$,

oder $by : m + x = 1 : \cos\psi$,

und daher $(by) = \dfrac{m + x}{\cos\psi}$.

Da nun $cy : yz = 1 : \text{tg}\ \varphi$,

ſo iſt auch $n + \dfrac{m + x}{\cos\psi} : z = 1 : \text{tg}\ \varphi$,

und es iſt daher 2) $z = \left(n + \dfrac{m + x}{\cos\psi}\right) \text{tg}\ \varphi$,

und durch dieſe beiden Gleichungen iſt nun die Lage der geraden Linie im Raume vollkommen beſtimmt.

Zugleich geht hieraus hervor, daß überhaupt jede gerade Linie im Raume durch zwei Gleichungen ſich beſtimmen läßt, welche die Form haben

$$1,\ y = ax + \alpha \text{ und } 2,\ z = bx + \beta.$$

Sind nun die 4 Groͤßen m, n, ψ und φ gegeben, ſo laſſen ſich hieraus die der Coefficienten a, b, α und β berechnen, und man kann auch umgekehrt, wenn dieſe Coefficienten gegeben ſind, hieraus die Werthe jener Groͤßen finden. Da naͤmlich

$$y = m\ \text{tg}\psi + x\ \text{tg}\psi \text{ und } z = \left(n + \frac{m}{\cos\psi}\right) \text{tg}\ \varphi + \frac{\text{tg}\ \varphi}{\cos\psi} x$$

und auch ſein ſoll

$$y = \alpha + ax \text{ und } z = \beta + bx,$$

ſo iſt die Abhaͤngigkeit dieſer Groͤßen von einander durch die 4 Gleichungen beſtimmt

$$m\ \text{tg}\ \psi = \alpha,\ \text{tg}\ \psi = a,\ \left(n + \frac{m}{\cos\psi}\right) \text{tg}\ \varphi = \beta \text{ und } \frac{\text{tg}\ \varphi}{\cos\psi} = b.$$

Es iſt alſo

$$1,\ a = \operatorname{tg} \psi \quad 2,\ m = \frac{\alpha}{a},$$

alſo $\cos \psi = \frac{1}{\sec \psi} = \frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2 \psi)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+a^2)}}$

und daher $3,\ \operatorname{tg} \varphi = b \cos \psi = \frac{b}{\sqrt{(1+a^2)}}$.

Da nun $n = \frac{\beta}{\operatorname{tg}\varphi} - \frac{m}{\cos \psi}$,

ſo iſt $4,\ n = \frac{\beta \sqrt{(1+a^2)}}{b} - \frac{\alpha \sqrt{(1+a^2)}}{a} = \left(\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a}\right)\sqrt{(1+a^2)}$.

Zuſatz. Da $y = \alpha + ax$ und $z = \beta + bx$,

ſo folgt $\frac{dy}{dx} = a$ und $\frac{dz}{dx} = b$;

für die gerade Linie ſind die Differentialquotienten alſo conſtant.

§. 145.

Einige Eigenſchaften der doppelt gekrümmten Curven.

1. Es iſt z, Fig. 91., ein Punkt einer doppelt gekrümmten Curve; man ſoll angeben, wie die Formeln für Tangente und Subtangente dieſes Punktes von den Gleichungen der Curve abhängen.

Nimmt man an, daß zc die Tangente des Punktes z iſt, ſo kann man nach §. 144. die Gleichungen für dieſe Linie ausdrücken durch

$$y = \alpha + ax \text{ und } z = \beta + bx,$$

und es ſind für dieſelben Coordinaten die Gleichungen für die Curve

$$f(x, y) = 0 \text{ und } F(x, y) = 0;$$

nun iſt aber $\operatorname{tg} \psi = a$ und $a = \frac{dy}{dx}$,

alſo iſt auch $\operatorname{tg} \psi = \frac{dy}{dx}$

die Gleichung für den Winkel ψ, unter welchem die Ebene zyc, in welcher die Tangente liegt, die Abſciſſenlinie x ſchneidet. Da ferner nach §. 144. No. 3.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{\sqrt{(1 + a^2)}}$$

und $a = \frac{dy}{dx}$ und $b = \frac{dz}{dx}$, ſo iſt auch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dz}{\sqrt{((dx)^2 + (dy)^2)}}$$

die Gleichung für den Winkel, unter welchem die Ebene der Coordinaten x, y von der Tangente des Punktes z geſchnitten wird. Uebrigens verſteht es ſich von ſelbſt, daß in den beiden Gleichungen

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dy}{dx} \text{ und } \operatorname{tg} \varphi = \frac{dz}{\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}}$$

für dy und dz die Werthe geſetzt werden müſſen, wie ſie aus den Gleichungen für die Curve

$$f(x, y) = 0 \text{ und } F(x, y) = 0$$

gefunden werden.

Da endlich $cy : yz = 1 : \operatorname{tg} \varphi$

und cy als die Subtangente des Punktes z der Curve angeſehen werden kann, ſo iſt, wenn man die Subtangente mit St bezeichnet

$$St : z = 1 : \frac{dz}{\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}}$$

und es iſt daher $St = \frac{z\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}}{dz}$.

2. Wenn yy′, Fig. 91., = ΔT ein Theil der Curve von der Länge T iſt, welche die Projection der doppelt gekrümmten bildet, ſo iſt, wenn die Länge der doppelt gekrümmten Curve ſelbſt mit S bezeichnet wird, der dem ΔT entſprechende Werth von ΔS für einen kleinen Werth der Differenz nur wenig verſchieden von dem Werthe des Ausdruckes $= \sqrt{[(\Delta T)^2 + (\Delta z)^2]}$ und da, wenn ΔS in dS übergeht, dieſer Bogen mit der Tangente zuſammenfällt, und alsdann auch ΔT in dT und Δz in dz ſich verwandelt, ſo iſt nothwendigerweiſe

$$dS = \sqrt{[(dT)^2 + (dz)^2]}$$

und weil T eine durch die Coordinaten x und y beſtimmte Curve iſt, und alſo $(dT)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ ſein muß, ſo folgt

$$dS = \sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]}$$

und es iſt daher

$$S = \int dx \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}$$

die Formel zur Rectification der Curven mit doppelter Krümmung.

3. Von Quadraturen und Cubaturen kann bei doppelt gekrümmten Curven nur in ſo fern die Rede ſein, als ſie eine gekrümmte Fläche einſchließen, und es iſt hierbei erforderlich, aus der gegebenen Figur auf der gekrümmten Fläche ihre Projection in der Ebene abzuleiten. Uebrigens liegen, wie bereits bemerkt worden iſt, die ſämmtlichen Werthe von z auf der Oberfläche eines cylinderförmigen Körpers, der die Projection der Curve zur Grundfläche hat, und es iſt, wenn man einen Bogen dieſer Projection ſeiner Länge nach mit T bezeichnet, zdT das Differential der krummen Oberfläche des Cylinders. Da nun $dT = \sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}$, ſo iſt, wenn man die Oberfläche des cylinderförmigen Körpers mit U bezeichnet,

$$U = \int z \sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}.$$

Bei dieſer Gelegenheit verdient angeführt zu werden, daß, wenngleich zur Beſtimmung einer Curve mit doppelter Krümmung eigentlich zwei Gleichungen zwiſchen drei Coordinaten nöthig ſind, man dieſe doch auch auf eine einzige Gleichung mit zwei Coordinaten zurückführen kann, wenn man hierbei die Projection der Curve, alſo T als Abſciſſenlinie annimmt. Da übrigens hierbei die Form von T bekannt ſein muß, wozu eine Gleichung zwiſchen x und y erforderlich iſt, ſo kommt man doch immer wieder auf zwei verſchiedene Gleichungen. Doch hat die Annahme der Projection T als Abſciſſenlinie den Vortheil, daß für die Abſciſſe T und die Ordinate z die doppelt gekrümmte Curve wie eine einfache betrachtet werden kann. So iſt z. B. für die einfache Curve die Rectificationsformel

$$dT = \sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]},$$

und für die doppelt gekrümmte iſt auf gleiche Weiſe

$$dS = \sqrt{[(dT)^2 + (dz)^2]}.$$

4. Statt der Projectionsebenen, welche durch die drei normal auf einander ſtehenden Coordinaten-Axen gebildet werden, bedient man ſich in vielen Fällen der Oberfläche einer

Kugel als Projectionsfläche für eine Curve mit doppelter Krümmung, und erhält hierdurch ein genaueres und deutlicheres Bild von der Curve, als durch die Projectionen auf zwei verſchiedenen Ebenen, wenngleich die Projection auf der Oberfläche der Kugel, wenn ſie nicht ein Kreis iſt, ſelbſt zu den doppelt gekrümmten Curven gehört. Nimmt man den Anfangspunkt der Abſciſſe a, Fig. 91., als den Mittelpunkt der Kugel, ſetzt az = v, ay = u, $\angle$zay = μ und $\angle$yax = ω, ſo iſt

$$v : z = 1 : \sin\mu, \text{ alſo } z = v \sin\mu,$$
$$v : u = 1 : \cos\mu, \quad " \quad u = v \cos\mu,$$
$$u : y = 1 : \sin\omega, \quad " \quad y = u \sin\omega = v \cos\mu \sin\omega,$$
$$u : x = 1 : \cos\omega, \quad " \quad x = u \cos\omega = v \cos\mu \cos\omega,$$

wodurch die Werthe beſtimmt ſind, welche in der Gleichung der Curve f(x, y, z) = o für x, y und z geſetzt werden müſſen, um die Projection auf der Oberfläche einer Kugel zu erhalten. Wenngleich von ſolchen Projectionen häufig Gebrauch gemacht wird, ſo iſt es doch nicht thunlich, dieſen Gegenſtand hier, wo es nur darauf ankommt, die Anfangsgründe der höheren Stereometrie abzühandeln, weiter zu erörtern.

§. 146.

Die Gleichung für ebene Flächen.

Der Punkt z, Fig. 92., iſt ſeiner Lage nach durch die drei Coordinaten beſtimmt ax=x, xy=y und yz=z; es ſoll die Gleichung für die Abhängigkeit dieſer Linien von einander unter der Vorausſetzung ermittelt werden, daß z in einer ebenen Fläche liegt, welche die Ebene der Coordinaten in der Linie bd ſo ſchneidet, daß ab = a, und der Winkel, welchen die Abſciſſenlinie ax mit der Durchſchnittslinie bd der Ebene bildet, = ψ, und der Neigungswinkel der Ebene, in welcher z liegt, mit der Ebene der x, y = φ iſt.

Zieht man von y die Normale yd auf die Durchſchnittslinie bd, und verbindet d mit z, ſo iſt, wie leicht einzuſehen, zdy = φ der Neigungswinkel der ebenen Fläche, für welche die Gleichung geſucht wird, mit der Ebene der Coordinaten x, y, und es iſt nun

$$(dy) : z = 1 : \text{tg}\,\varphi, \text{ alſo } (dy) = \frac{z}{\text{tg}\,\varphi},$$

$$cy : dy = 1 : \cos\psi, \text{ alſo } (cy) : \frac{z}{\text{tg}\,\varphi} = 1 : \cos\psi,$$

$$\text{und daher } (cy) = \frac{z}{\text{tg}\,\varphi\,\cos\psi}.$$

Ferner iſt $bx : cx = 1 : \text{tg}\,\psi$, alſo $(x-a) : (cx) = 1 : \text{tg}\,\psi$, und es iſt daher $(cx) = (x-a)\sin\psi$; da nun $y = (cx) + (cy)$, ſo iſt auch

$$y = (x-a)\,\text{tg}\,\psi + \frac{z}{\text{tg}\,\varphi\,\cos\psi}$$

und daher

$$x\sin\psi - y\cos\psi + z\cot\varphi - a\sin\psi = o$$

die Gleichung für die ebene Fläche, die eben ſo, wie die Gleichung für die gerade Linie, vom erſten Grade iſt, und man kann daher als allgemeine Form annehmen, daß

$$Ax - By + Cx - D = o$$

die Gleichung für alle ebene Flächen iſt, oder vielmehr

$$\frac{A}{B}x - y + \frac{C}{B}z - \frac{D}{B} = o,$$

wofür auch geſetzt werden kann

$$\alpha x - y + \beta z - \gamma = o,$$

und wird dieſe Gleichung mit der oben gefundenen, welche, wenn man durchgehends mit $\cos\psi$ theilt, giebt

$$x\,\text{tg}\,\psi - y + z \cdot \frac{\cot\varphi}{\cos\psi} - a\,\text{tg}\,\psi = o,$$

verglichen, ſo laſſen ſich nun, wenn die Winkel ψ, φ und die Linie a gegeben ſind, die Coefficienten α, β und γ beſtimmen, und man kann auch umgekehrt die Werthe von jenen finden, wenn dieſe gegeben ſind. Nämlich es iſt

$$\alpha = \text{tg}\,\psi \text{ und } \gamma = a\,\text{tg}\,\psi, \text{ alſo } \frac{\gamma}{\alpha} = a.$$

$$\text{Da nun } \text{tg}\,\psi = \sqrt{(\sec^2\psi - 1)} = \sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2\psi} - 1\right)},$$

$$\text{ſo iſt auch } \alpha^2 = \frac{1-\cos^2\psi}{\cos^2\psi}, \text{ alſo } \cos^2\psi = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

$$\text{Da nun } \beta = \frac{\cot\varphi}{\cos\psi}, \text{ ſo iſt auch } \cot\varphi = \beta\cos\psi,$$

und daher $\cot\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}$;

weil aber $\cot^2\varphi = \frac{\cos^2\varphi}{1-\cos^2\varphi}$, alſo $\cos^2\varphi = \frac{\cot^2\varphi}{1+\cot^2\varphi}$,

ſo iſt auch $$\cos^2\varphi = \frac{\frac{\beta^2}{1+\alpha^2}}{1+\frac{\beta^2}{1+\alpha^2}} = \frac{\beta^2}{1+\alpha^2+\beta^2}$$

der Ausdruck für den Neigungswinkel der ebenen Fläche gegen die Fläche der Coordinaten x, y, und man findet auf gleiche Weiſe für den Neigungswinkel φ' gegen die Ebene der Coordinaten x, z die Gleichung

$$\cos^2\varphi' = \frac{1}{1+\alpha^2+\beta^2}$$

und für den Neigungswinkel φ'' gegen die Ebene von z, y

$$\cos^2\varphi'' = \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2+\beta^2}$$ und hieraus folgt nun

$$\cos^2\varphi + \cos^2\varphi' + \cos^2\varphi'' = 1,$$

ein Reſultat, das auch unmittelbar hätte gefunden werden können; denn es iſt eigentlich die ebene Fläche, für welche die Gleichung gefunden werden ſoll, die Grundfläche einer dreikantigen Pyramide, in welcher die drei Kanten an der Spitze die unter rechten Winkeln zuſammenſtoßenden Coordinaten ſind, und φ, φ' und φ'' ſind die drei Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche.

In Beziehung auf ebene Flächen verdienen hier noch folgende Aufgaben gelöſt zu werden:

1. Es iſt eine Ebene bekanntlich durch drei gegebene Punkte ihrer Lage nach gegeben; ſind nun für drei ſolche Punkte die Coordinaten derſelben bekannt, ſo muß ſich hieraus die Gleichung für die Fläche ableiten laſſen, und es kann dieſes auf folgende Art geſchehen: Man ſetze die zu dem erſten Punkte gehörigen Coordinaten p, q, r, die zu dem zweiten Punkte p', q', r' und die zu dem dritten Punkte p'', q'' und r'', ſo hat man die drei Gleichungen

$$\alpha p - q + \beta r - \gamma = 0$$
$$\alpha p' - q' + \beta r' - \gamma = 0$$
und $$\alpha p'' - q'' + \beta r'' - \gamma = 0.$$

Hier=

Hieraus erhält man durch Subtraction, wenn $p' - p = \Delta'p$, $q' - q = \Delta'q$ und $r' - r = \Delta'r$ geſetzt wird, und eben ſo $p'' - p' = \Delta''p$ ꝛc.,

$$\alpha \cdot \Delta'p - \Delta'q + \beta\, \Delta'r = 0$$

und $\alpha \cdot \Delta''p - \Delta''q + \beta\, \Delta''r = 0.$

Es iſt alſo $\alpha \cdot \Delta'p\, \Delta''r - \Delta'q\, \Delta''r + \beta\, \Delta'r\, \Delta''r = 0$

und $\alpha \cdot \Delta''p\, \Delta'r - \Delta''q\, \Delta'r + \beta\, \Delta'r\, \Delta''r = 0$;

folglich iſt, wenn man dieſe beiden Gleichungen von einander abzieht,

$$\alpha = \frac{\Delta''q\, \Delta'r - \Delta'q\, \Delta''r}{\Delta'p\, \Delta''r - \Delta''p\, \Delta'r}.$$

Ganz auf dieſelbe Weiſe läßt ſich auch der Werth von β finden, und es iſt alsdann der von γ durch die Gleichung beſtimmt

$$\gamma = \alpha p - q + \beta r.$$

2. Die Gleichung für eine ebene Fläche iſt gegeben; man ſoll hieraus die Gleichung für die Linie ableiten, in welcher dieſe Fläche die Ebene der Coordinaten x, y ſchneidet.

Iſt die gegebene Gleichung

$$\alpha x - y + \beta z - \gamma = 0,$$

ſo braucht man nur $z = 0$ zu ſetzen, um die verlangte Gleichung für die Durchſchnittslinie zu erhalten, welche alſo iſt

$$\alpha x - y - \gamma = 0 \text{ und daher } y = \alpha x - \gamma.$$

3. Es ſind die Gleichungen für zwei verſchiedene Ebenen gegeben; man ſoll hieraus die für die Projection ihrer gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinie auf der Ebene von x, y ableiten.

In der gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinie ſind die Werthe von z für beide Ebenen gleich groß; ſind nun die Gleichungen

$$\alpha' x - y + \beta' z - \gamma' = 0$$

und $\alpha'' x - y + \beta'' z - \gamma'' = 0,$

ſo iſt auch $\alpha'\beta'' x - \beta'' y + \beta'\beta'' z - \gamma'\beta'' = 0$

und $\alpha''\beta' x - \beta' y + \beta'\beta'' z - \gamma''\beta' = 0$

und man erhält nun, indem z eliminirt wird,

$$(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')\, x - (\beta'' - \beta')\, y - (\gamma'\beta'' - \gamma''\beta') = 0$$

als die geſuchte Gleichung für die Projection der gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinie beider Ebenen.

§. 147.
Gleichungen für einige krumme Flächen.

Gewöhnlich iſt die krumme Fläche, für welche eine Gleichung aufgefunden werden ſoll, ein Theil oder die ganze Oberfläche eines Körpers, und man nimmt hierbei eine dieſen Körper ſchneidende Ebene als Coordinatenfläche für x und y an. Die Gleichung ſelbſt muß ſich aus dem Geſetz für die Bildung des Körpers, von welchem die krumme Fläche die Oberfläche bildet, ableiten laſſen. Da übrigens aus der Form des Körpers auch die Gleichung für die Curve beſtimmt iſt, welche den Durchſchnitt einer ſchneidenden Ebene mit der Oberfläche macht, ſo hat man, wenn die Coordinaten dieſer Curve mit t und u bezeichnet werden, während die der krummen Oberfläche x, y und z ſind, 5 veränderliche Größen, deren Abhängigkeit von einander durch 3 verſchiedene Gleichungen beſtimmt werden muß, wenn es möglich ſein ſoll, t und u zu eliminiren, ſo daß eine Gleichung für die Coordinaten x, y und z übrig bleibt. Eine dieſer Gleichungen iſt gewöhnlich die der Curve zwiſchen t und u, und die beiden andern werden aus dem Geſetz der Entſtehung des Körpers abgeleitet. Folgende Erläuterungen zeigen hinlänglich, welches Verfahren hierbei angewendet werden muß. Alſo

I. Eine Curve dreht ſich um eine feſte Axe, wodurch ein Körper erzeugt wird, deſſen Grundfläche ein Kreis iſt; man ſoll die Gleichung für die krumme Oberfläche dieſes Körpers angeben.

Es ſei $a\beta m$, Fig. 78., die den Körper erzeugende Curve, $ad = h$ die Axe deſſelben, und die Curve $a\beta m$ ſei durch die Gleichung beſtimmt zwiſchen den Coordinaten $ac = t$ und $c\beta = u$, ſo daß $u = f(t)$ iſt. Zieht man von β die Normale βn auf die Grundfläche, ſo iſt für den Punkt β der krummen Oberfläche $\beta n = cd = z$, und es wird, wenn man die Abſciſſenlinie durch den Mittelpunkt d der Grundfläche legt, und d als den Anfangspunkt der Abſciſſe annimmt, der Punkt n durch die Gleichung beſtimmt $(dn)^2 = x^2 + y^2$. Da nun überdies $dc = ad - ac$, alſo $z = h - t$, ſo hat man die 3 Gleichungen

$$u = f(t),\ z = h - t \text{ und } u^2 = x^2 + y^2,$$

woraus nun die verlangte Gleichung für die krumme Oberfläche erhalten wird, ſobald die Abhängigkeit der Coordinaten t und u der erzeugenden Curve von einander gegeben iſt. Es ſei

1. die erzeugende Curve $a\beta m$ ein Kreisquadrant, und alſo die zu beſtimmende Oberfläche — die einer Kugel, und die Ebene, auf welche die Gleichung bezogen wird, ein größter Kreis, deſſen Mittelpunkt der Anfangspunkt der Abſciſſen iſt. In dieſem Falle iſt

$$ac : c\beta = c\beta : 2\,(ad) - (ac),$$

alſo $t : u = u : 2h - t$, alſo $u^2 = t\,(2h - t)$

und $u = \sqrt{t\,(2h - t)} = f(t)$.

Da nun $u^2 = x^2 + y^2$, ſo iſt auch

$$t\,(2h - t) = x^2 + y^2,$$

und weil $z = h - t$, alſo $t = h - z$, ſo erhält man, wenn dieſer Werth für t geſetzt wird,

$$(h - z)\,(h + z) = x^2 + y^2,$$

und es iſt daher die Gleichung für die Oberfläche der Kugel, die einen Radius = h hat,

$$h^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

wie auch leicht unmittelbar gefunden werden kann.

2. Iſt $a\beta m$, Fig. 78. eine Parabel, deren Scheitel in a liegt und deren Parameter = p iſt, ſo wird $u^2 = pt$, alſo iſt auch $pt = x^2 + y^2$, und weil $t = h - z$,

ſo iſt $p\,(h - z) = x^2 + y^2$

die Gleichung für die krumme Oberfläche eines paraboliſchen Konoids.

3. Es ſei $a\beta m$ ein elyptiſcher Quadrant, von welchem $ad = h$ die halbe große Axe und $dm = b$ die halbe kleine Axe ſeyn ſoll, ſo iſt

$$u^2 = \frac{b^2}{h^2}\,(2ht - t^2)$$

und es wird daher $\frac{b^2}{h^2}\,(2ht - t^2) = x^2 + y^2$

und $b^2 t\,(2h - t) = h^2\,(x^2 + y^2)$

und weil $t = h - z$, ſo wird

$$b^2\,(h - z)\,(h + z) = h^2\,(x^2 + y^2),$$

$$\text{alſo } b^2 (h^2 - z^2) = h^2 (x^2 + y^2)$$

die Gleichung für die krumme Oberfläche eines elyptiſchen Sphäroids.

4. Iſt aβm eine gerade Linie, alſo der Körper ein normaler Kegel, deſſen Axe ad = h iſt, und von welchem der Radius der Grundfläche dm = R ſein ſoll, ſo iſt

$$ac : c\beta = ad : dm$$

$$\text{oder } t : u = h : R, \text{ alſo } u = \frac{R}{h} t$$

$$\text{und } u^2 = x^2 + y^2 \text{ wird } \frac{R^2}{h^2} t^2 = x^2 + y^2;$$

$$\text{es iſt alſo auch } \frac{R^2}{h^2} (h - z)^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{und daher } R^2 (h - z)^2 = h^2 (x^2 + y^2)$$

die Gleichung für die krumme Oberfläche eines normalen Kegels mit kreisförmiger Grundfläche.

5. Iſt aβm ein Kreisbogen, der, indem er ſich um ad dreht, einen Kugelabſchnitt erzeugt, geht alſo die Linie ad verlängert durch den Mittelpunkt der Kugel, ſo iſt für ad = h und dm = ρ, wenn der Radius der Kugel = R geſetzt wird,

$$h : \rho = \rho : 2R - h,$$

$$\text{alſo } 2hR - h^2 = \rho^2 \text{ und } R = \frac{\rho^2 + h^2}{2h}.$$

Da nun ferner t : u = u : 2R − t, ſo iſt, wie bei No. 1.,

$$u^2 = t (2R - t), \text{ alſo auch}$$

$$t (2R - t) = x^2 + y^2,$$

$$\text{nämlich es iſt } (h - z) \left[2R - (h - z)\right] = x^2 + y^2$$

und ſonach, wenn für R der Werth geſetzt wird,

$$(h - z) \left[\frac{\rho^2 + h^2}{h} - h + z\right] = x^2 + y^2,$$

$$\text{folglich iſt } (h - z) (\rho^2 + hz) = h (x^2 + y^2)$$

die Gleichung für die krumme Oberfläche eines Kugelabſchnittes, welche nur deswegen von der in No. 1. gefundenen abweicht, weil hier die Coordinaten auf eine andere Ebene, die hier zu jener parallel iſt, bezogen werden.

6 Dreht ſich endlich der Kreisbogen αna, Fig. 77., um

ſeinen Sinus αp, und man ſetzt $\alpha p = h$, $pa = a$ und $pc = mq = b$, ſo iſt der Radius $R = a + b$ und

$$a : h = h : 2R - a, \text{ alſo } \frac{h^2 + a^2}{2a} = R$$

und es iſt daher $b = R - a = \frac{h^2 - a^2}{2a}$;

die Werthe von R und b ſind alſo durch a und h vollkommen beſtimmt. Nun iſt

$$(\alpha m)(mp + p\alpha) = (nm) \times (mq + qn)$$

oder, weil $\alpha m = t$ und $mn = u$,

$$t(h - t + h) = u(b + b + u),$$

alſo $t(2h - t) = u(2b + u)$,

folglich iſt $u^2 + 2bu + b^2 = t(2h - t) + b^2$;

nämlich es iſt, weil $t = h - z$,

$$(u + b)^2 = (h - z)(h + z) + b^2$$

und daher auch $(u + b)^2 = h^2 + b^2 - z^2 = R^2 - z^2$.

Es iſt alſo $u = -b + \sqrt{(R^2 - z^2)}$

und weil ganz allgemein

$$u^2 = x^2 + y^2,$$

ſo wird $b^2 + R^2 - z^2 - 2b\sqrt{(R^2 - z^2)} = x^2 + y^2$

die Gleichung für die krumme Oberfläche eines Konoids, welches entſteht, wenn ein Kreisbogen um ſeinen Sinus gedreht wird.

II. Es ſoll die Gleichung für die krumme Oberfläche eines pyramidenförmigen Körpers angegeben werden, deſſen Grundfläche irgend eine krummlinige Figur iſt, alſo eines Körpers, der dadurch entſteht, daß von einem außerhalb einer Fläche gegebenen Punkte eine gerade Linie um den Umfang dieſer Fläche herumgeführt wird.

Es ſei, Fig. 93., bam in der Grundfläche und u ein Punkt in dem Umfange derſelben, der Umfang aber ſei eine Curve, deren Eigenthümlichkeiten durch eine Gleichung zwiſchen den rechtwinkligen Coordinaten $At = t$ und $tu = u$, alſo durch die Gleichung $u = f(t)$ gegeben iſt. Ferner ſei c der außerhalb der Grundfläche gegebene Punkt, alſo die Spitze der Pyramide, und die Lage dieſes Punktes in Beziehung auf die Grundfläche ſei durch die Coordinaten $Aa = a$, $ab = b$ und $bc = c$ beſtimmt. Verbindet man nun c mit u durch eine

gerade Linie, ſo liegt dieſe in der krummen Oberfläche des pyramidenförmigen Körpers, und es iſt irgend ein Punkt z dieſer Linie, und alſo auch der krummen Oberfläche, beſtimmt durch $Ax = x$, $xy = y$ und $yz = z$. Die Linie ub liegt in der Grundfläche, und ſchneidet die Abſciſſenlinie at in m unter einem veränderlichen Winkel bma, die Ebene cbu ſteht normal auf der Grundfläche, und auch der Winkel cub iſt veränderlich.

Es iſt aber $mx : mt = xy : tu$

und $ma : mt = ab : tu$

alſo auch $mx : (mx + mt) = xy : (xy + tu)$

und $ma : (ma + mt) = ab : (ab + tu)$.

Da nun $mx : ma = xy : ab$,

ſo iſt auch $(mx + mt) : (ma + mt) = (xy + tu) : (ab + tu)$

oder $tx \quad : \quad ta \quad = (xy + tu) : (ab + tu)$,

nämlich es iſt $t + x : t + a = y + u : b + u$

und dieſes giebt die Gleichung

$$(t + x)(b + u) = (t + a)(y + u).$$

Ferner iſt $uy : ub = yz : bc$,

aber auch $uy : ub = (tu + xy) : (tu + ab)$;

alſo iſt $yz : bc = (tu + xy) : (tu + ab)$

und daher $z : c = u + y : u + b$,

folglich iſt auch $z(u + b) = c(u + y)$.

Dieſe letztere Gleichung giebt unmittelbar

$$1) \quad u = \frac{bz - cy}{c - z}.$$

Aus der Gleichung $(t + x)(b + u) = (t + a)(y + u)$

aber folgt $(t + x) b + xu = (t + a) y + au$

und es iſt daher $t(b - y) + bx - ay = (a - x) u$,

$$\text{alſo } t(b - y) = (a - x)\left(\frac{bz - cy}{c - z}\right) - bx + ay$$

$$= \frac{abz - ayz - bcx + cxy}{c - z}$$

$$= \frac{(b - y)(az - cx)}{c - z},$$

und es iſt daher

$$2) \quad t = \frac{az - cx}{c - z}.$$

Die drei Gleichungen, von welchen die Gleichung für die krumme Oberfläche des Körpers abhängt, ſind alſo

$$u = \frac{bz - cy}{c - z}, \quad t = \frac{az - cx}{c - z}$$

$$\text{und } u = f(t)$$

und es wird die geſuchte Gleichung unmittelbar erhalten, wenn man in der letzten die Werthe für t und u aus den beiden erſtern ſubſtituirt. Nun ſei

1. die Grundfläche ein paraboliſches Segment, A der Scheitel und At die Axe der Parabel, ſo iſt für den Parameter = p

$$u^2 = pt,$$

$$\text{alſo wird } \left(\frac{bz - cy}{c - z}\right)^2 = p\left(\frac{az - cx}{c - z}\right)$$

$$\text{und } (bz - cy)^2 = p\,(c - z)\,(az - cx)$$

die Gleichung für den Theil der krummen Oberfläche, der an der Grundfläche von dem paraboliſchen Bogen begränzt iſt.

2. Iſt die Grundfläche ein Kreis, A der Mittelpunkt und R der Radius deſſelben, ſo wird

$$t^2 + u^2 = R^2$$

$$\text{und daher } (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = R^2\,(c - z)^2$$

die Gleichung für die krumme Oberfläche eines jeden normalen oder ſchiefen Kegels mit kreisförmiger Grundfläche. Iſt der Kegel normal, ſo fällt b mit A zuſammen, und es iſt daher in dieſem Falle a = b = 0, und die Gleichung wird

$$c^2x^2 + c^2y^2 = R^2(c - z)^2;$$

eine Gleichung, die mit der in I. No. 4. gefundenen übereinſtimmt.

3. Wenn die Grundfläche eine Elypſe iſt, A der Mittelpunkt und aAt die Lage der großen Axe, und man bezeichnet die beiden Halbaxen mit A und B, ſo iſt

$$u^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - t^2),$$

$$\text{alſo } A^2u^2 = A^2B^2 - B^2t^2,$$

und dieſes giebt, wenn man für u und t die Werthe ſetzt,

$$A^2(bz - cy)^2 = A^2B^2(c - z)^2 - B^2(az - cx)^2;$$

iſt der Kegel normal, ſo liegt die Spitze c ſenkrecht über A, und es iſt alsdann a = b = 0, alſo

$$A^2c^2y^2 = A^2B^2(c - z)^2 - B^2c^2x^2.$$

Zuſatz 1. Die für die Oberfläche der Pyramiden gefundenen Gleichungen ſind

$$u = \frac{bz - cy}{c - z}, \quad t = \frac{az - cx}{c - z} \text{ und } u = f(t)$$

und es ſind, wie bereits oben bemerkt worden iſt, die Winkel bma in der Grundfläche und cub normal auf derſelben, veränderlich. Setzt man den erſten dieſer Winkel $= \psi$ und den letztern $= \varphi$, ſo iſt

$$ma : ab = 1 : \text{tg}\,\psi$$

und weil $ma : ab = mt : tu = (ma + mt) : (ab + tu)$,

also $ma : ab = a + t : b + u$,

ſo iſt auch $a + t : b + u = 1 : \text{tg}\,\psi$.

Es iſt aber $a + t = a + \frac{az - cx}{c - z} = \frac{c(a - x)}{c - z}$

und $b + u = b + \frac{bz - cy}{c - z} = \frac{c(b - y)}{c - x}$,

folglich iſt auch $a - x : b - y = 1 : \text{tg}\,\psi$

und daher $\text{tg}\,\psi = \frac{b - y}{a - x}$.

Ferner iſt nun $mb : ma = 1 : \cos\psi$

und weil $mb : ma = mu : mt = (mb + mu) : (ma + mt) = bu : at$,

ſo iſt auch $bu : at = 1 : \cos\psi$

oder $bu : a + t = 1 : \cos\psi$, alſo $(bu) = \frac{a + t}{\cos\psi}$.

Es iſt aber $ub : bc = 1 : \text{tg}\,\varphi$,

alſo iſt auch $\frac{a + t}{\cos\psi} : c = 1 : \text{tg}\,\varphi$

und daher $\text{tg}\,\varphi = \frac{c \cos\psi}{a + t}$;

es läßt ſich alſo auch φ durch die Coordinaten der Curve beſtimmen.

Da nämlich $a + t = \frac{c(a - x)}{c - z}$,

ſo iſt $\text{tg}\,\varphi = \left(\frac{c - z}{a - x}\right) \cos\psi$,

wo nur noch für $\cos\psi$ der Werth geſetzt zu werden braucht, $\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{tg}^2\psi)}}$ und man erhält hiernach

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{c-z}{\sqrt{((a+x)^2+(b-y)^2)}}.$$

Iſt nun der Kegel normal mit kreisförmiger Grundfläche, ſo wird $a=b=0$, weil alsdann b mit m und A zuſammenfällt, und man erhält in dieſem Falle

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{c-z}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{c-z}{\varrho},$$

wenn $(my)=\varrho$ geſetzt wird. Da aber jetzt $bu=mu=R$ der Radius der Grundfläche iſt, ſo hat man

$$R : R-\varrho = c : z,$$

alſo auch $R : \varrho = c : c-z$

und es iſt daher $\operatorname{tg}\varphi = \frac{c-z}{\varrho} = \frac{c}{R}$ conſtant, was eine bekannte Eigenſchaft des normalen Kegels iſt.

Zuſatz 2. Setzt man in den Gleichungen

$$t = \frac{az-cx}{c-z} \text{ und } u = \frac{bz-cy}{c-z}$$

$$a-x=x',\ b-y=y' \text{ und } c-z=z',$$

ſo erhält man

$$t = \frac{cx'-az'}{z'} \text{ und } u = \frac{cy'-bz'}{z'};$$

es wird alſo in dieſem Falle

$$t = c\cdot\frac{x'}{z'}-a \text{ und } u = c\cdot\frac{y'}{z'}-b$$

und der Anfangspunkt der Abſciſſen iſt jetzt im Scheitel c, die Coordinatenebenen aber ſind den früheren parallel.

Welche Function nun auch u von t ſein mag, ſo kann man doch immer ſetzen

$$u^m = t^m + At^{m-1} + B^2t^{m-2} + C^3t^{m-3}$$

wo A, B und C ꝛc. Linien, alſo Größen von einer Dimenſion ſind. Hiernach iſt, wenn zur Abkürzung $\frac{x'}{z'}=X$ und $\frac{y'}{z'}=Y$ geſetzt wird,

$$(cX-a)^m = (cY-b)^m + A(cY-b)^{m-1} + B^2(cY-b)^{m-2} \ldots.$$

und da hier in Beziehung auf die veränderliche Größe die Dimenſion von X und $Y=0$ iſt, ſo hat auch die Gleichung für die Curve eine Dimenſion $=0$ und es wird, wenn man

wieder $\frac{x'}{z'}$ für X und $\frac{y'}{z'}$ für Y ſetzt und durchgehends mit $(z')^m$ multiplicirt, in Beziehung auf die veränderlichen Größen, die Dimenſion eines jeden Gliedes = m, und die Gleichung iſt alſo homogen, eine Eigenthümlichkeit, die allen coniſchen Körpern zukommt, wie Euler in dem zweiten Kapitel des Anhanges zu dem zweiten Buche der Einleitung in die Analyſis des Unendlichen beweiſet.

III. Die Gleichung für die krumme Fläche eines keilförmigen Körpers ſoll angegeben werden, der die Eigenſchaft hat, daß er von zwei ebenen Figuren, apb und aqb, Fig. 94., begränzt wird, die ſich in der Kante ab ſchneiden, und daß alle Flächen, welche, wie xpq normal die Kante ab ſchneiden, geradlinige, bei x rechtwinklige Dreiecke ſind, und daß alſo die, in der von apb und aqb begränzten krummen Fläche, für welche die Gleichung geſucht wird, liegende Linie qp des Querſchnitts gerade iſt.

Zieht man von irgend einem Punkte z der krummen Oberfläche die Normale zy auf apb, ſo iſt dieſe Linie parallel zu qx, und es iſt daher

$$(px) : (xq) = (py) : (yz).$$

Sind alſo ax = x, xy = y und yz = z die Coordinaten für den Punkt z der krummen Oberfläche, ax = x und xp = v die Coordinaten der Curve apb, und ax = x und xq = w die der Curve aqb, ſo wird die obige Proportion

$$v : w = (v - y) : z;$$

$$\text{es iſt alſo } vz = w\,(v - y).$$

Weil aber die Curven apb und aqb gegeben ſind, ſo kennt man auch die Gleichungen für dieſelben, und es ſind daher die 3 Gleichungen gegeben

$$v = f'(x),\ w = f''(x) \text{ und } vz = w(v - y),$$

wo nur in der letzten die Werthe für v und w zu ſubſtituiren ſind, um die geſuchte Gleichung für die krumme Oberfläche zu erhalten, welche die Form hat

$$zf'(x) = f''(x)\,[f'(x) - y]$$

und daher iſt

$$z = f''(x) - \frac{yf''(x)}{f'(x)}.$$

Es ſei nun

1. ſowohl apb als aqb ein Halbkreis mit dem Radius $= R$, ſo iſt

$$(xp) = (xq) = f'(x) = f''(x) = \sqrt{x(2R-x)}$$

und daher die Gleichung für die krumme Oberfläche

$$z = \sqrt{x(2R-x)} - y,$$

$$\text{alſo } (z+y)^2 = 2Rx - x^2.$$

2. Iſt apb ein Halbkreis und aqb ein paraboliſches Segment, ſo iſt wieder

$$(xp) = f'(x) = \sqrt{x(2R-x)}$$

und wenn am, Fig. 78., ein Schenkel der Parabel iſt, ſo wird für $mn = x$, $n\beta = w$, $md = b$ und $da = a$, weil

$$ac : ad = (c\beta)^2 : (dm)^2,$$

$$a - w : a = (b-x)^2 : b^2$$

oder weil hier, Fig. 94., $(ab) = 2R = 2b$ und alſo $b = R$ iſt,

$$a - w : a = (R-x)^2 : R^2$$

$$\text{und daher } a - w = \frac{a(R-x)^2}{R^2},$$

$$\text{alſo } w = f''(x) = a - \frac{a(R-x)^2}{R^2} = \frac{a(2Rx - x^2)}{R^2}.$$

Da nun für alle keilförmige Körper die Gleichung gilt

$$z = f''(x) - \frac{yf''(x)}{f'(x)},$$

$$\text{ſo iſt jetzt } z = \frac{a(2Rx - x^2)}{R^2} - \frac{ay(2Rx - x^2)}{R^2\sqrt{(2Rx - x^2)}}$$

$$\text{und daher } R^2z = a(2Rx - x^2) - ay\sqrt{(2Rx - x^2)}.$$

3. Wird der Körper ſtatt von der Fläche aqb, von einer geradlinigen Figur auf dieſer Seite begränzt, und iſt die obere durch q gehende Linie derſelben parallel zu ab, ſo wird

$$(xq) = w = f''(x) = a \text{ conſtant}$$

und die allgemeine Gleichung iſt alsdann

$$z = a - \frac{ay}{f'(x)},$$

woraus für die beſonderen Formen der Grundfläche apb die entſprechende Gleichung leicht gefunden werden kann.

Zuſatz. Es iſt zwar hier angenommen worden, daß $\angle qxp = 90°$; wenn dieſes aber auch nicht der Fall iſt, ſo kann man doch leicht die Gleichung finden, weil alsdann zwar

nicht qx = w parallel iſt zu zy, wohl aber w sin ψ für ∠qxp = ψ, und man erhält alsdann die Proportion

$$v - w \cos\psi : v - y - w \cos\psi = w \sin\psi : z.$$

§. 148.

Gleichungen für die Durchſchnitte der Flächen und Ebenen.

Iſt, Fig. 91., z ein Punkt einer krummen Oberfläche, zu welcher die Ordinaten-Axen dx, xy, yz gehören, und iſt der Anfangspunkt der Abſciſſen a gegeben, ſo iſt die Lage von z vollkommen beſtimmt durch eine Gleichung zwiſchen den Coordinaten $ax = x$, $xy = y$ und $yz = z$, wenn alſo die Gleichung für die krumme Fläche gegeben iſt

$$f(x, y, z) = 0.$$

Wird nun die krumme Oberfläche von einer Ebene geſchnitten, ſo iſt die Gleichung für dieſe Ebene in Beziehung auf die Coordinaten-Ebene xy, nach §. 146.,

$$Ax - By + Cz - D = 0$$

oder was daſſelbe iſt

$$\alpha x - y + \beta z - \gamma = 0$$

und es können die Coefficienten leicht berechnet werden, wenn die Lage der ſchneidenden Ebene gegeben iſt. Nimmt man nun für dieſe ſchneidende Ebene ebenfalls dx als Abſciſſenlinie und a als den Anfangspunkt der Abſciſſen, ſo müſſen, wenn z ein Punkt der gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinie iſt, die Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0 \text{ und } \alpha x - y + \beta z - \gamma = 0$$

denſelben Werthen der Coordinaten entſprechen, und umgekehrt: es müſſen nämlich die Punkte, welchen beide Gleichungen entſprechen, zu der gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinie gehören. Werden aber beide Gleichungen mit einander verbunden, ſo kann man die eine veränderliche Größe eliminiren, und erhält hierdurch eine Gleichung für die Durchſchnittslinie, welche nur zwei veränderliche Größen enthält.

Werden die Werthe von z in beiden Gleichungen einander gleich geſetzt, und erhält man hierdurch

$$\varphi(x, y) = 0,$$

ſo iſt dieſes zwar nicht die Gleichung für die Durchſchnittslinie ſelbſt, ſondern es iſt die für die Projection derſelben auf der Ebene der Coordinaten x, y; da aber eben ſo, durch Elimination von y, die hierdurch erhaltene Gleichung

$$\varphi'(x, z) = 0$$

die Projection der Curve auf der Ebene der Coordinaten x, z ausdrückt, ſo iſt die Curve ſelbſt vollkommen beſtimmt. Da bei dem Durchſchnitte einer Fläche von einer Ebene die Durchſchnittslinie in dieſer Ebene liegen muß, und alſo in jedem Falle nur eine Curve mit einfacher Krümmung ſeyn kann, ſo muß ſich für dieſelbe auch eine unmittelbare Gleichung auffinden laſſen, ſo daß die Abſciſſenlinie in der ſchneidenden Ebene liegt, und die Ordinaten unmittelbar die einzelnen Punkte der Curve angeben. Um eine ſolche unmittelbare Gleichung für die Curve zu erhalten, braucht man nur die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie der ſchneidenden Ebene mit der Coordinaten-Ebene x, y als Abſciſſenlinie anzunehmen, und von den Ordinaten der Ebene x, y die für die Durchſchnitts-Ebene abzuleiten, was in jedem Falle geſchehen kann. Um das hierbei anzuwendende Verfahren näher kennen zu lernen, iſt es zweckmäßig, jeden der hier möglichen Fälle beſonders in Erwägung zu ziehen. Alſo

1. Wird die Coordinaten-Ebene x, y ſelbſt als die ſchneidende Ebene angeſehen, ſo fällt natürlich die Gleichung $\alpha x - y + \beta z - \gamma = 0$ weg, und man behält alſo blos $f(x,y,z)=0$, wo jedoch $z = 0$ ſeyn muß, und es iſt daher

$$f(x, y) = 0$$

die Gleichung für die Curve, in welcher die krumme Oberfläche von der Coordinaten-Ebene x, y geſchnitten wird. Eben ſo ſind auch

$$f(x, z) = 0 \text{ und } f(y, z) = 0$$

die Gleichungen für die Curven, in welchen die krumme Oberfläche von den übrigen Coordinaten-Ebenen geſchnitten wird. Iſt z. B. die Gleichung für die krumme Oberfläche

$$ax^2 - b^2x + cy^2 + g^2z - hz^2 + k^2 = 0,$$

ſo erhält man, für $z = 0$, $y^2 = \frac{b^2}{c}\, x - \frac{a}{c}\, x^2 - \frac{k^2}{c}$

und es iſt daher der Durchſchnitt der Ebene x, y eine Elypſe.

Für $x=0$ wird die Gleichung $y^2 = \frac{h}{c} z^2 - \frac{g}{c} z - \frac{k}{c} = 0$ ꝛc.

2. Läuft die Durchſchnittsebene zu der Coordinatenebene parallel, ſo wird z conſtant und behält für jedes x und y denſelben Werth. Es iſt alſo in dieſem Falle $f(x, y, a) = 0$ die Gleichung für die Projection der Durchſchnittslinie, welche hier zugleich die Gleichung für die Curve ſelbſt giebt.

3. Schneidet die Durchſchnittsebene die der Coordinaten x, y in der Abſciſſenlinie, iſt alſo, Fig. 91., dx die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie beider, ſo iſt der Winkel $zxy=\psi$ der Neigungswinkel beider Ebenen bekannt, und da nun

$$xy; yz = 1 : \operatorname{tg}\psi \text{ oder } y : z = 1 : \operatorname{tg}\psi,$$

ſo iſt $z = y \operatorname{tg}\psi$ und daher

$$f(x, y, y \operatorname{tg}\psi) = 0$$

die Gleichung für die Projection der Durchſchnittslinie auf der Ebene x, y; weil aber, wenn man $xz=v$ ſetzt, die Proportion ſtatt findet

$$v : y = 1 : \cos\psi, \text{ ſo iſt } y = v\cos\psi$$

und da $z = y \operatorname{tg}\psi = v\cos\psi \operatorname{tg}\psi = v\sin\psi$, ſo iſt

$$f(x, v\cos\psi, v\sin\psi) = 0$$

die Gleichung für die Durchſchnittslinie ſelbſt.

So iſt z. B., nach §. 147. I. No. 4., die Gleichung für die krumme Oberfläche eines normalen Kegels

$$R^2(h-z)^2 = h^2(x^2+y^2),$$

und es iſt daher, wenn die ſchneidende Ebene einen Durchmeſſer der Grundfläche mit dieſer Durchſchnittslinie gemein hat, und beide Ebenen unter einem Winkel ψ gegen einander geneigt ſind,

$$R^2(h - v\sin\psi)^2 = h^2(x^2 + v^2\cos^2\psi)$$

die Gleichung für die Durchſchnittslinie und

$$R^2(h - y\operatorname{tg}\psi)^2 = h^2(x^2+y^2)$$

die für die Projection derſelben.

Es ſei, Fig. 63., b ein Punkt der gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinie, $eb=bf$ und $ab=v$ für $x=0$ parallel zu ce, alſo $ce = 2 \times ab$, ſo iſt, wenn man $ce=q$ ſetzt,

$$q : h = 1 : \sin\psi \text{ und } q : R = 1 : \cos\psi;$$

die Gleichung für die Curve iſt alſo

$$R^2\left[h-\frac{hv}{q}\right]^2=h^2\left[x^2+v^2\cdot\frac{R^2}{q^2}\right]$$

und $R^2(q-v)^2=(q^2x^2+R^2v^2)$;

es iſt alſo $R^2q^2-2R^2qv=q^2x^2$,

alſo auch $q(R^2-x^2)=2R^2v$

und daher, wenn man $R^2-x^2=t^2$ ſetzt,

$$t^2=\frac{2R^2}{q}\,v,$$

woraus ſich ergiebt, daß, wie ſich von ſelbſt verſteht, die Durchſchnitslinie eine Parabel ſein muß. Da ferner in dieſem Falle

$$R:h=1:\mathrm{tg}\,\psi,\ \text{alſo}\ \mathrm{tg}\,\psi=\frac{h}{R},$$

ſo wird die Gleichung für die Projection der Parabel auf der Grundfläche des Kegels

$$R\left(h-y\cdot\frac{h}{R}\right)^2=h^2(x^2+y^2)$$

und daher auch $(R-y)^2=x^2+y^2$;

es iſt alſo $R^2-2Ry=x^2$, oder, wenn $R-2y=u$ geſetzt wird,

$$Ru=x^2,$$

woraus hervorgeht, daß die Projection der Parabel ebenfalls eine Parabel iſt.

Zuſatz. Wird in der Gleichung für die Durchſchnittslinie eines normalen Kegels, wenn die Durchſchnittsebene die der Coordinaten x, y in einem Durchmeſſer ſchneidet, alſo in

$$R^2(h-v\sin\psi)^2=h^2(x^2+v^2\cos^2\psi),$$

der Winkel $\psi=90^0$ angenommen, ſo iſt

$$R(h-v)=hx,$$

alſo die Durchſchnittslinie gerade, wie es ſein muß, da in dieſem Falle der Axentriangel ſelbſt der Durchſchnitt iſt.

4. Wird die krumme Fläche von einer Ebene ſo geſchnitten, daß die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie mit der Coordinatenebene x, y parallel iſt, und man ſetzt, wenn dx' dieſe Durchſchnittslinie iſt, $a\alpha=xx'=a$, ſo wird, wenn man $\delta x'$ als Abſciſſenlinie annimmt und α als den Anfangspunkt der Abſciſſen, in der gegebenen Gleichung x und z nicht verändert. Es iſt aber für $x'y=y'$ der Werth von $y=y'-a$, und daher iſt in Beziehung auf die neue Abſciſſenlinie die Gleichung für die krumme Oberfläche

$$f(x, y'-a, z)=0.$$

Iſt nun der bekannte Neigungswinkel der beiden ſich ſchneidenden Ebenen, alſo $zx'y=\psi$, ſo wird, für $x'z=v$, $z=y'\operatorname{tg}\psi$,

$$y'=v\cos\psi \text{ und } z=v\sin\psi;$$

die Gleichung für die Curve iſt alſo jetzt

$$f(x, v\cos\psi-a, v\sin\psi)=0$$

und die für die Projection derſelben

$$f(x'y'-a, y'\operatorname{tg}\psi)=0.$$

5. Nun ſei endlich, um die Aufgabe ganz allgemein zu löſen, die Lage des Punktes z, Fig. 95., in der krummen Oberfläche durch die Gleichung zwiſchen den Coordinaten $ax=x$, $xy=y$ und $yz=z$ gegeben:

$$f(x, y, z)=0,$$

und es ſei z ein Punkt der Durchſchnittslinie dieſer Fläche von einer Ebene, welche die der Ordinaten in der Linie $\alpha\beta$ ſchneidet. Man ziehe durch a die Linie $a\alpha$ parallel zu yx, durch α die αn parallel zu ax und durch zy die Ebene zty normal auf $\alpha\beta$, ſo iſt $zty=\varphi$ der Neigungswinkel der ſchneidenden Ebene mit der der Coordinaten x, y. Außerdem ſei der durch die Lage der ſchneidenden Ebene gegebene Winkel $\beta\alpha n=\alpha$, ſo iſt die Gleichung für die Curve gegeben, wenn man die Abhängigkeit der Abſciſſe $\alpha t=t$ und der Ordinate $tz=v$ von einander kennt, und die ihrer Projection iſt beſtimmt, wenn die Abhängigkeit der Abſciſſe $\alpha t=t$ und der dazu gehörigen Ordinate $ty=u$ ermittelt wird.

Es iſt aber

$$tz:zy=1:\sin\varphi \text{ oder } v:z=1:\sin\varphi, \quad \text{alſo } z=v\sin\varphi$$
$$\text{und } tz:ty=1:\cos\varphi \;\;\text{„}\;\; v:u=1:\cos\varphi, \quad \text{„}\;\; u=v\cos\varphi$$
$$ty:yp=1:\cos\alpha \;\;\text{„}\;\; u:(yp)=1:\cos\alpha, \quad \text{„}\;\; (yp)=v\cos\varphi\cos\alpha$$
$$ty:tp=1:\sin\alpha \;\;\text{„}\;\; u:(tp)=1:\sin\alpha, \quad \text{„}\;\; (tp)=v\cos\varphi\sin\alpha$$
$$\alpha t:\alpha m=1:\cos\alpha \;\;\text{„}\;\; t:(\alpha m)=1:\cos\alpha, \quad \text{„}\;\; (\alpha m)=t\cos\alpha$$
$$\alpha t:tm=1:\sin\alpha \;\;\text{„}\;\; t:(tm)=1:\sin\alpha, \quad \text{„}\;\; (tm)=t\sin\alpha.$$

Nun iſt $a\alpha=a$ eine bekannte Größe und

$$py=pn+nx+xy=(tm)+a+y,$$

nämlich es iſt $v\cos\varphi\cos\alpha=t\sin\alpha+a+y$,

und daher 1) $y=v\cos\varphi\cos\alpha-t\sin\alpha-a$

$$\alpha n=\alpha m+mn=\alpha m+tp,$$

und daher 2) $x=t\cos\alpha+v\cos\varphi\sin\alpha$,

und

und hierzu kommt noch der bereits oben gefundene Werth

$$3)\ z = v \sin\varphi.$$

Werden dieſe Werthe für x, y und z in der gegebenen Gleichung der krummen Fläche

$$f(x, y, z) = 0$$

ſubſtituirt, ſo erhält man die geſuchte Gleichung für die Curve, in welcher die Fläche von der Ebene geſchnitten wird. Weil aber auch

$$tz : ty = 1 : \cos\varphi, \text{ alſo } v : u = 1 : \cos\varphi, \text{ und } v = \frac{u}{\cos\varphi},$$

ſo iſt, wenn man in der gefundenen Gleichung für die Curve

$$F(t, v) = 0$$

für v den Werth ſetzt $\frac{u}{\cos\varphi}$,

$$F\left(t, \frac{u}{\cos\varphi}\right) = 0$$

die Gleichung für die Projection derſelben.

§. 149.

Erläuterungen.

Es iſt beiſpielsweiſe ſchon im vorigen §. gezeigt worden, wie, wenigſtens in einem beſondern Falle, aus der Gleichung für die krumme Fläche eines Kegels, die für den Durchſchnitt derſelben mit einer Ebene gefunden werden kann; es ſoll nun hier, um das Vorgetragene näher zu erläutern, noch gezeigt werden, wie man auf analytiſchem Wege auch die Gleichungen für Kugel- und Cylinderſchnitte, deren Eigenſchaften ſchon aus den Elementen bekannt ſind, zu finden im Stande iſt.

Es ſei alſo ACBD, Fig. 96., ein größter Kreis der Kugel, welche von einer Ebene ſo geſchnitten wird, daß ſie die des größten Kreiſes in der Linie $\alpha\beta$ unter einem Winkel $=\varphi$ ſchneidet, und es ſei z ein Punkt des Schnittes auf der Oberfläche der Kugel, ſo iſt für $ax = x$, $xy = y$ und $yz = z$, wenn der Radius der Kugel $= R$ geſetzt wird, die Gleichung für die krumme Oberfläche

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Die Abſciſſenlinie AB ſei ſo gezogen, daß ſie die Durchſchnittslinie $\alpha\beta$ in α normal trifft, und es ſei von z in der Ebene des

Schnittes zt ebenfalls ſenkrecht auf $\alpha\beta$, ſo iſt, wenn man ty zieht, $\angle zty = \varphi$ der bekannte Neigungswinkel der ſchneidenden Ebene mit ACBD, und es iſt außerdem auch $a\alpha = a$, alſo der Abſtand der Durchſchnittslinie $\alpha\beta$ von dem Mittelpunkte der Kugel gegeben; es kommt nun blos darauf an, eine Gleichung zwiſchen $\alpha t = t$ und $tz = u$ zu finden.

Da das Dreieck tyz bei y rechtwinklig iſt, ſo hat man

$$tz : zy = 1 : \sin\varphi \text{ und } tz : ty = 1 : \cos\varphi,$$

oder $$v : z = 1 : \sin\varphi \text{ und } v : (a-x) = 1 : \cos\varphi,$$

folglich iſt $z = v\sin\varphi$ und $a - x = v\cos\varphi$, alſo $x = a - v\cos\varphi$,

$$\text{außerdem iſt } (\alpha t) = t = (xy) = y.$$

Werden nun dieſe Werthe für x, y und z in der allgemeinen Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

geſetzt, ſo erhält man

$$(a - v\cos\varphi)^2 + t^2 + v^2\sin^2\varphi = R^2,$$

$$\text{oder } a^2 - 2av\cos\varphi + v^2 + t^2 = R^2.$$

Setzt man in dieſer Gleichung $v - a\cos\varphi = w$, [alſo $v^2 - 2av\cos\varphi = w^2 - a^2\cos^2\varphi$, ſo wird dieſelbe

$$a^2 + w^2 - a^2\cos^2\varphi + t^2 = R^2,$$

$$\text{und daher } w^2 + t^2 = R^2 - a^2\sin^2\varphi,$$

eine Gleichung für den Kreis, von welchem $\sqrt{(R^2 - a^2\sin^2\varphi)} = \varrho$ der Radius iſt.

Da $(ty) = v\cos\varphi$, ſo iſt auch, wenn man in der zuerſt gefundenen Gleichung $(ty) = v\cos\varphi = a$ ſetzt,

$$a^2 - 2av\cos\varphi + v^2 + t^2 = R^2$$

$$a^2 - 2au + \frac{u^2}{\cos^2\varphi} + t^2 = R^2$$

eine Gleichung für die Projection des Schnittes, und es iſt alſo dieſe Gleichung

$$u^2 - 2au\cos^2\varphi + t^2\cos^2\varphi = (R^2 - a^2)\cos^2\varphi.$$

Setzt man hier a = R, iſt alſo B ein Punkt des Durchſchnittes, ſo wird

$$t^2 = 2au - \frac{u^2}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}(2au\cos^2\varphi - u^2),$$

welches eine Gleichung für eine Elypſe iſt, und vergleicht man dieſelbe mit der Form

$$t^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(2\alpha u - u^2),$$

wo α und β die beiden Halbaxen ſind, ſo erhält man

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi}, \text{ alſo } \frac{\alpha}{\beta} = \cos\varphi$$

und $a\cos^2\varphi = \alpha$, woraus folgt $\beta = a\cos\varphi$.

Es iſt alſo hier β die größere und α die kleinere Halbaxe: nur für $\varphi = 0$ wird $\alpha = \beta$. Die Projection iſt nämlich nur in dem Falle ein Kreis, wenn der Schnitt parallel iſt zu ACBD.

Um nun auch die Eigenſchaften der Cylinderſchnitte analytiſch zu entwickeln, nehme man an, es ſei C, Fig. 97., der Mittelpunkt, ABC ein Theil der Grundfläche und Cc die Axe deſſelben, ſo kann dieſe, ſelbſt wenn der Cylinder ein ſchiefer iſt, doch immer als normal auf ABC angenommen werden, wenn man ABC als einen normalen Schnitt des Cylinders annimmt, ſo daß für einen ſchiefen Cylinder AB der Bogen einer Elypſe wird. Iſt nun y irgend ein Punkt des Umfanges der Grundfläche, ſo iſt, wenn CA = a und CB = b die beiden Halbaxen der Elypſe ſind, welche bei dem normalen Cylinder, deſſen Grundfläche ein Kreis iſt, einander gleich werden, und wenn Cx = x und xy = y geſetzt wird,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

oder $a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$,

und es entſpricht dieſe Gleichung zugleich jedem Punkte der krummen Oberfläche; es hat nämlich, wenn man durch y die Linie yz parallel zur Axe Cc zieht, die yz = z keinen Einfluß auf die Gleichung, indem alle in der yz liegenden Punkte denſelben Punkt y der Grundfläche treffen. Es iſt dieſes eine bekannte Eigenſchaft der Cylinder, daß alle zur Grundfläche parallelen Schnitte ihrer Projection auf der Grundfläche congruent ſind.

Der Cylinder werde nun von einer Ebene ſo geſchnitten, daß dieſe die Grundfläche in der Linie $\alpha\beta$ unter dem Neigungswinkel $zty = c\alpha C = \varphi$ ſchneidet, und es ſei die Lage der $\alpha\beta$ gegen den Mittelpunkt C der Grundfläche durch den normalen Abſtand $C\alpha = a$ und den Winkel $AC\alpha = \psi$ beſtimmt,

wobei alſo die Ebenen zty und $c\alpha C$ parallel ſind, und die $\alpha\beta$ normal treffen.

Da in dem bei C rechtwinkligen Dreiecke $C\alpha c$ gegeben iſt $C\alpha = a$ und $\angle C\alpha c = \varphi$, ſo iſt hierdurch

$$(\alpha c) = \frac{a}{\cos\varphi} \text{ und } (Cc) = a \operatorname{tg}\varphi$$

beſtimmt. Ferner iſt $(\alpha\gamma) = (xe) = x\sin\psi$,

$$\text{und } (x\gamma) = (C\alpha - Ce) = a - x\cos\psi,$$

$$(yd) = y\sin\psi \text{ und } (xd) = y\cos\psi;$$

endlich iſt für $yz = z$

$$(tz) = \frac{z}{\sin\varphi} \text{ und } (ty) = z\cot\varphi.$$

Hierdurch iſt es nun allerdings möglich, die Gleichung für die Curve zu finden, in welcher die Oberfläche des Cylinders geſchnitten wird, wenn man αt und tz als Coordinaten des Punktes z derſelben annimmt. Um indeſſen bequemer die Eigenthümlichkeiten dieſer Curve zu überſehen, iſt es zweckmäßiger, wenn man c, alſo den Punkt, in welchem die Axe des Cylinders die ſchneidende Ebene trifft, als den Anfangspunkt der Abſciſſen annimmt, und alſo, wenn durch z die zS parallel zu αt gelegt wird, cS und Sz als Coordinaten derſelben. Man ſetze daher $cS = t$ und $Sz = v$, ſo iſt, weil

$$Sz = \alpha t = \alpha\gamma + xd,$$

$$v = x\sin\psi + y\cos\psi,$$

$$\text{und da } cS = \alpha S - \alpha c = tz - \alpha c,$$

$$\text{ſo iſt } t = \frac{z}{\sin\varphi} - \frac{a}{\cos\varphi},$$

$$\text{und weil } z\cot\varphi = (ty) = td + dy,$$

$$\text{alſo } z\cot\varphi = a - x\cos\psi + y\sin\psi,$$

$$\text{ſo wird } t = \frac{a - x\cos\psi + y\sin\psi}{\cos\varphi} - \frac{a}{\cos\varphi} = \frac{y\sin\psi - x\cos\psi}{\cos\varphi}.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$v = x\sin\psi + y\cos\psi \text{ und } t\cos\varphi = y\sin\psi - x\cos\psi,$$

$$\text{folgt nun } x = v\sin\psi - t\cos\psi\cos\varphi$$

$$\text{und } y = v\cos\psi + t\sin\psi\cos\varphi,$$

und werden dieſe Werthe in der Gleichung

$$a^2b^2 = a^2y^2 + b^2x^2$$

ſubſtituirt, ſo erhält man die geſuchte Gleichung für die

Curve, in welcher die Oberfläche des Cylinders von der Ebene geſchnitten wird; nämlich es iſt

$$a^2b^2 = a^2(v\cos\psi + t\sin\psi\cos\varphi)^2 + b^2(v^2\sin^2\psi - t\cos\psi\cos\varphi)^2,$$

wofür zur Abkürzung geſetzt werden kann

$$a^2b^2 = \alpha v^2 + 2\beta vt + \gamma t^2.$$

Hieraus iſt unmittelbar zu erſehen, daß die Curve zu der Gattung der Elypſen gehören muß.

Die Werthe der Coefficienten α, β, γ findet man

$$\alpha = a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi,$$

$$\beta = (a^2 - b^2)\sin\psi\cos\psi\cos\varphi$$

und $\gamma = (a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi)\cos^2\varphi$.

In der hier gefundenen Gleichung für die Elypſe ſind zwar die Coordinaten cS und Sz ſenkrecht auf einander, und es iſt auch c der Mittelpunkt der Elypſe; die Abſciſſenlinie aber fällt hier nicht mit einer der Axen der Curve zuſammen, wie daraus hervorgeht, daß die Gleichung

$$a^2b^2 = \alpha v^2 + 2\beta vt + \gamma t^2$$

zu jedem Werthe von t zwei verſchiedene Werthe von t giebt, die nicht gleiche Größe haben. Nur in dem Falle, wenn $\beta = 0$ iſt, wird $v = \pm\sqrt{\left(\frac{a^2b^2 - \gamma t^2}{\alpha}\right)}$, und es gehören hiernach alsdann zu jeder Abſciſſe zwei gleich große, einander entgegengeſetzte Ordinaten, und in dieſem Falle iſt alſo cS die Lage der einen Axe. Da aber

$$\beta = (a^2 - b^2)\sin\psi\cos\psi\cos\varphi,$$

ſo giebt es vier Fälle in welchen $\beta = 0$ wird; nämlich

1. Wenn a = b iſt, alſo AC = CB und daher die Grundfläche des normalen Cylinders ein Kreis. Wird alsdann von dem Mittelpunkte C eine Senkrechte Cα gezogen, ſo lauſt die eine Axe der Elypſe, welche den Durchſchnitt bildet, mit $\alpha\beta$ parallel, und die andere fällt mit Cα zuſammen.

2. Wenn $\varphi = 0$; alsdann iſt der Durchſchnitt des Cylinders parallel zur Grundfläche, und es laufen die Axen des Durchſchnitts mit denen der Grundfläche parallel.

3. Wenn $\psi = 0$; in dieſem Fall iſt $\alpha\beta$ normal auf CA und parallel zu CB, und

4. Wenn $\psi = 90°$, in welchem Falle $\alpha\beta$ normal auf CB und parallel zu CA iſt.

Ganz allgemein aber kann man die Lage der Axen gegen Sα und die Größe derſelben auf folgende Art ermitteln: Es ſei, Fig. 69., bda die Elypſe, in welcher der Cylinder geſchnitten wird, cβ die Abſciſſenlinie für die Gleichung

$$a^2b^2 = \alpha v^2 + 2\beta vt + \gamma t^2,$$

alſo ct=t und tk=v, cb und cd die beiden Halbaxen, welche gegen cβ eine ſolche Lage haben ſollen, daß $\angle bc\beta = \mu$ iſt. Zieht man nun die Normale kx, und ſetzt cx=x und xk=y, ſo laſſen ſich die Werthe von x und y aus t, v und $\angle\mu$ ganz auf dieſelbe Weiſe beſtimmen, wie §. 66 u. f. bei den Kegelhufen gezeigt worden iſt, und man findet

$$t = x\cos\mu - y\sin\mu \text{ und } v = x\sin\mu + y\cos\mu.$$

Werden dieſe Werthe ſtatt t und v geſetzt, ſo erhält man aus der für die Curve gefundenen Gleichung

$$a^2b^2 = \alpha(x\sin\mu + y\cos\mu)^2 + 2\beta(x\sin\mu + y\cos\mu)(x\cos\mu - y\sin\mu)$$
$$+ \gamma(x\cos\mu - y\sin\mu)^2,$$

und ſetzt man dafür zur Abkürzung

$$a^2b^2 = px^2 + 2rxy + qy^2,$$

ſo ſind die Werthe der Coefficienten

$$p = \alpha\sin^2\mu + 2\beta\sin\mu\cos\mu + \gamma\cos^2\mu$$
$$r = (\alpha - \gamma)\sin\mu\cos\mu + \beta(\cos^2\mu - \sin^2\mu)$$
$$q = \alpha^2\cos^2\mu - 2\beta\sin\mu\cos\mu + \gamma\sin^2\mu.$$

Die Gleichung $a^2b^2 = px^2 + 2rxy + qy^2$ bezieht ſich auf Coordinaten, von welchen die Abſciſſe in der einen Axe ab liegt, und die Ordinate zu der andern parallel iſt, und der Mittelpunkt c der Elypſe iſt der Anfangspunkt der Abſciſſen; die Gleichung muß daher die Form haben

$$a^2b^2 = px^2 + qy^2,$$

folglich iſt r=0 und daher auch

$$(\alpha - \gamma)\sin\mu\cos\mu + \beta(\cos^2\mu - \sin^2\mu) = 0,$$

nämlich es iſt

$$\frac{(\alpha - \gamma)\sin 2\mu}{2} + \beta\cos 2\mu = 0$$

$$\text{und folglich } \operatorname{tg} 2\mu = \frac{2\beta}{\gamma - \alpha},$$

wodurch alſo der Neigungswinkel, welchen, Fig. 97., die Abſciſſenlinie cS mit der einen Axe der Elypſe macht, beſtimmt iſt.

Die Gleichung für den Cylinderſchnitt iſt daher

$$a^2b^2 = px^2 + qy^2,$$

$$\text{alſo } y^2 = \frac{a^2b^2}{q} - \frac{p}{q}x^2 = \frac{p}{q}\left(\frac{a^2b^2}{p} - x^2\right).$$

Wenn aber die beiden Halbaxen der Elypſe, zu welcher dieſe Gleichung gehört, A und B ſind, ſo wird dieſelbe auch durch die Gleichung ausgedrückt

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2),$$

und vergleicht man dieſen Ausdruck mit

$$y^2 = \frac{p}{q}\left(\frac{a^2b^2}{p} - x^2\right),$$

ſo laſſen ſich nun die Werthe der Axen beſtimmen durch die beiden Gleichungen

$$A^2 = \frac{a^2b^2}{p} \text{ und } \frac{B^2}{A^2} = \frac{p}{q},$$

$$\text{nämlich es iſt } A = \frac{ab}{\sqrt{p}} \text{ und } B = \frac{ab}{\sqrt{q}}.$$

Hieraus erhält man das Produkt der beiden Halbaxen der Elypſe

$$AB = \frac{a^2b^2}{\sqrt{pq}}$$

und es läßt ſich dieſer Werth auf folgende Art näher beſtimmen: Da

$$p = \alpha\sin^2\mu + 2\beta\sin\mu\cos\mu + \gamma\cos^2\mu$$

$$\text{und } q = \alpha\cos^2\mu - 2\beta\sin\mu\cos\mu + \gamma\sin^2\mu,$$

ſo iſt auch, wenn man einſtweilen zur Abkürzung $\sin\mu = m$ und $\cos\mu = n$ ſetzt, ſo daß hiernach wird $m^2 + n^2 = 1$,

$$p = \alpha m^2 + 2\beta mn + \gamma n^2,$$

$$q = \alpha n^2 - 2\beta mn + \gamma m^2,$$

und daher wird

$$pq = (\alpha^2 + \gamma^2)m^2n^2 + \alpha\gamma(n^4 + m^4) - 4\beta^2m^2n^2$$
$$- 2\beta(\gamma - \alpha)mn(n^2 - m^2),$$

$$\text{und weil } r = (\alpha - \gamma)mn + \beta(n^2 - m^2) = 0,$$

$$\text{ſo iſt } \beta = \frac{(\gamma - \alpha)mn}{n^2 - m^2},$$

und daher auch, wenn dieſer Werth für β geſetzt wird,

$$pq = (\alpha^2 + \gamma^2)m^2n^2 + \alpha\gamma(n^4 + m^4) - 4\beta^2m^2n^2 - 2(\gamma - \alpha)^2m^2n^2.$$

Ferner iſt

$$n^4+2n^2m^2+m^4=(n^2+m^2)^2=1,$$

$$\text{alſo } n^4+m^4=1-2n^2m^2,$$

folglich iſt auch $pq=$

$$(\alpha^2+\gamma^2)m^2n^2+\alpha\gamma(1-2n^2m^2)-4\beta^2m^2n^2-2(\gamma-\alpha)^2m^2n^2;$$

nämlich es iſt

$$pq=(\gamma-\alpha)^2m^2n^2+\alpha\gamma-4\beta^2m^2n^2-2(\gamma-\alpha)^2m^2n^2$$
$$=\alpha\gamma-4\beta^2m^2n^2-(\gamma-\alpha)^2m^2n^2.$$

Aus der Gleichung $r=0$ aber folgt

$$(\gamma-\alpha)^2=\frac{\beta^2(n^2-m^2)^2}{m^2n^2},$$

$$\text{alſo iſt auch } pq=\alpha\gamma-4\beta^2m^2n^2-\beta^2(n^2-m^2)^2$$
$$=\alpha\gamma-\beta^2[4m^2n^2+(n^2-m^2)^2]$$
$$=\alpha\gamma-\beta^2(n^2+m^2)^2,$$

und weil $n^2+m^2=1$, ſo iſt endlich

$$pq=\alpha\gamma-\beta^2.$$

Nun iſt das Produckt beider Axen der Elypſe gefunden worden

$$AB=\frac{a^2b^2}{\sqrt{pq}},$$

$$\text{folglich iſt auch } AB=\frac{a^2b^2}{\sqrt{(\alpha\gamma-\beta^2)}}.$$

Es iſt aber $\alpha=a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi$,

$$\gamma=(a^2\sin^2\psi+b^2\cos^2\psi)\cos^2\varphi$$

und $\beta=(a^2-b^2)\sin\psi\cos\psi\cos\varphi$,

folglich iſt

$$\alpha\gamma=[(a^4+b^4)\sin^2\psi\cos^2\psi+a^2b^2(\sin^4\psi+\cos^4\psi)]\cos^2\varphi$$

und $\beta^2=[(a^4+b^4)\sin^2\psi\cos^2\psi-2a^2b^2\sin^2\psi\cos^2\psi]\cos^2\varphi$,

und daher

$$\alpha\gamma-\beta^2=a^2b^2[\sin^4\psi+2\sin^2\psi\cos^2\psi+\cos^4\psi]\cos^2\varphi$$
$$=a^2b^2(\sin^2\psi+\cos^2\psi)^2\cos^2\varphi;$$

nämlich es iſt $\alpha\gamma-\beta^2=a^2b^2\cos^2\varphi$,

alſo $\sqrt{pq}=\sqrt{(\alpha\gamma-\beta^2)}=ab\cos\varphi$,

und daher wird endlich

$$AB=\frac{ab}{\cos\varphi}=ab\sec\varphi.$$

Da nun der Flächeninhalt der Elypſe ausgedrückt wird durch $AB\pi$, ſo iſt, wenn man den Inhalt des elyptiſchen Schnittes, in welchem der Cylinder von der, unter dem Winkel $=\varphi$

gegen die Grundfläche geneigten Ebene geſchnitten wird, $=\mathrm{F}$ ſetzt,

$$F=AB\pi=ab\pi\sec\varphi.$$

Der Inhalt f der Grundfläche iſt $=ab\pi$

$$\text{und daher } F : f = \sec\varphi : 1,$$

$$\text{alſo } F = f \cdot \sec\varphi.$$

Der Inhalt des Schnittes wird alſo erhalten, wenn man den der Grundfläche mit der Secante des Neigungswinkels der ſchneidenden Ebene multiplicirt. Hiernach iſt es nun auch leicht, den Neigungswinkel der ſchneidenden Ebene für den Fall anzugeben, wenn der Schnitt ein gegebenes Verhältniß zu der Grundfläche haben ſoll. Iſt der Neigungswinkel $\varphi = 60^0$, ſo wird $F=2f$ etc.

Anmerkung. Ein Theil der in dieſem §. vorkommenden Unterſuchungen iſt aus dem dritten Kapitel des Anhanges zu dem zweiten Buche von Euler's Einleitung in die Analyſis des Unendlichen entlehnt.

§. 150.

Von dem Durchſchnitte der Flächen.

Wenn zwei Flächen ſich ſchneiden, ſo iſt der gemeinſchaftliche Durchſchnitt immer eine Linie, und zwar entweder eine gerade oder eine krumme oder eine doppelt gekrümmte. Schneiden ſich zwei Ebenen, ſo iſt der Durchſchnitt immer eine gerade Linie, und wenn eine krumme Fläche von einer Ebene geſchnitten wird, ſo liegt der Durchſchnitt in der ſchneidenden Ebene, und kann daher nie doppelt gekrümmt ſein: daß aber auch in dieſem Falle der Durchſchnitt eine gerade Linie ſein kann, geht bereits daraus hervor, daß, wenn ein Cylinder oder ein Kegel von einer Ebene durch die Axe geſchnitten wird, die krumme Oberfläche des Körpers immer in einer geraden Linie geſchnitten wird. Eine doppelt gekrümmte Curve kann der Schnitt nur alsdann ſein, wenn zwei krumme Flächen ſich ſchneiden, obgleich es auch in dieſem Falle möglich iſt, daß der Schnitt blos einfach gekrümmt oder ſelbſt eine gerade Linie iſt. Erſteres iſt z. B. der Fall, wenn ein normaler Cylinder ſo durch eine Kugel geht, daß der Mittelpunkt derſelben in der Axe des Cylinders iſt; der gemeinſchaft-

liche Durchſchnitt der Oberfläche der Kugel und des Cylinders iſt alsdann ein Kreis. Schneiden ſich zwei Cylinder ſo, daß ihre Axen parallel laufen, ſo iſt der Durchſchnitt eine gerade Linie.

Es iſt bereits, §. 145., bemerkt worden, daß die Eigenthümlichkeiten einer doppelt gekrümmten Curve ſich mittelſt zweier Gleichungen, die drei veränderliche Coordinaten enthalten, erkennen laſſen, und es müſſen daher auch zwei ſolche Gleichungen gegeben ſein, wenn die Natur des Schnittes zweier Flächen beſtimmt ſein ſoll; es wird ſich, wenn in einem beſondern Falle der Schnitt blos einfach gekrümmt, oder vielleicht gar eine gerade Linie iſt, dieſes aus den gegebenen Gleichungen leicht erkennen laſſen.

Die beiden Gleichungen für den Durchſchnitt zweier Flächen werden aus den für die ſich ſchneidenden Flächen ſelbſt unmittelbar erhalten, wenn man die eine derſelben ſo umformt, daß ſie mit der andern die Coordinaten-Axen und den Anfangspunkt der Abſciſſen gemein hat. Denn iſt z. B. die Gleichung für die eine Fläche

$$f(x, y, z) = 0$$

und für die andere $F(x, y, z) = 0$

und ſind die Coordinaten-Axen und der Anfangspunkt der Abſciſſen für beide dieſelben, ſo werden, weil die Flächen ſelbſt verſchieden ſind, oder wenigſtens eine verſchiedene Lage haben, für ein und denſelben Werth von x und y die entſprechenden Werthe von z in beiden Gleichungen verſchieden ſein, wenn nicht x und y ſo angenommen werden, daß das dazu gehörige z einen Punkt der gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinie beider trifft: und hieraus folgt umgekehrt, daß, wenn die Werthe von z in beiden Gleichungen einander gleich ſind, die dazu gehörigen Werthe von x und y immer dem Durchſchnitte beider entſprechen müſſen. Dieſes führt zu der Regel, durch welche die Eigenthümlichkeiten der Durchſchnittslinie zweier Flächen ſich beſtimmen laſſen. Sind nämlich

$$f(x, y, z) = 0 \text{ und } F(x, y, z) = 0,$$

für denſelben Anfangspunkt der Abſciſſen und in Beziehung auf dieſelben Coordinaten-Axen, die Gleichungen für die beiden krummen Flächen, ſo ſehe man dieſelben als eine und dieſelbe

Curve beſtimmend an, ſo iſt dieſe die Durchſchnittslinie, und man erhält, wenn z eliminirt wird, die Gleichung

$$f'(x, y) = 0$$

für die Projection der Curve in der Ebene x, y, und es läßt ſich eben ſo, wenn man y oder x eliminirt, die Gleichung für die Projection derſelben in der Ebene x, z oder y, z ableiten.

Führt die durch Elimination von z erhaltene Gleichung

$$f'(x, y) = 0$$

zu keinem reellen Werthe von y, welchen Werth man auch für x annehmen mag, oder vielmehr entſpricht dieſelbe keiner Linie, wie z. B. wenn die Gleichung iſt

$$x^2 + y^2 + a^2 = 0,$$

ſo folgt hieraus, daß die beiden den gegebenen Gleichungen entſprechenden Flächen ſich gar nicht ſchneiden, und führt die Gleichung $f'(x, y) = 0$ zu einem einfachen Punkte, ſo iſt dieſer die Projection eines Berührungspunktes beider Flächen, und es iſt leicht einzuſehen, daß ſich dieſelben auch in mehreren Punkten berühren können, oder in einer geraden Linie, oder auch wohl in einer krummen Linie; ſo berührt z. B. eine Kugel, die in einem Kegel beſchrieben iſt, dieſen in einer Kreislinie.

§. 151.

Erläuterungen.

1. Zwei normale Cylinder, deren Grundflächen Kreiſe ſind, ſchneiden ſich normal; es ſollen die Gleichungen für die Projection ihres gemeinſchaftlichen Durchſchnittes gefunden werden.

Es ſei ABCD, Fig. 98., ein Axendurchſchnitt des einen Cylinders, mn die Axe deſſelben und βdc die Grundfläche des andern, welcher normal auf ABCD ſteht. Man ziehe durch den Mittelpunkt die Normale gb auf CD, ſo iſt ab = a der Radius der Grundfläche des einen Cylinders A, und $\alpha\beta = \alpha$ der des andern B; der Abſtand aα ſei = d. Wird nun a als der Anfangspunkt der Abſciſſen angenommen, und ſind mn und bg die Coordinaten-Axen für x und y, ſo daß alſo die Axe für z durch a parallel zu dem Cylinder B iſt, ſo wird die krumme Oberfläche des Cylinders A durch die Gleichung ausgedrückt

$$z^2 = (a + y)(a - y) = a^2 - y^2$$

und für den Cylinder B iſt die Gleichung

$$\alpha^2 = x^2 + (y - d)^2$$

und es ſind dieſe beiden Gleichungen, da jede derſelben nur zwei veränderliche Größen enthält, zugleich die für die Projectionen in den Coordinaten-Ebenen x, y und y, z, welche beide Kreiſe ſind. Um nun auch die Projection auf der Ebene x, z zu erhalten, alſo auf der Ebene, welche durch mn parallel zu der Axe des Cylinders B geht, muß y eliminirt werden; es iſt aber

$$y^2 - 2dy + d^2 = \alpha^2 - x^2$$

$$\text{und } y^2 = a^2 - z^2,$$

folglich iſt auch $a^2 - z^2 - 2d\sqrt{(a^2 - z^2)} + d^2 = \alpha^2 - x^2$ die geſuchte Gleichung, welche in beſonderen Fällen eine einfachere Form erhält. Iſt nämlich $d = 0$, fällt alſo α mit a zuſammen, ſo wird dieſelbe

$$a^2 - z^2 = \alpha^2 - x^2,$$

alſo wenn $a > \alpha$ iſt, $a^2 - \alpha^2 = z^2 - x^2$

und daher, wenn man $a^2 - \alpha^2 = p^2$ ſetzt,

$$z^2 = p^2 + x^2,$$

und dieſes iſt die Gleichung für eine gleichſeitige Hyperbel, nämlich für eine ſolche, in welcher beide Axen gleich groß ſind. Haben beide Cylinder, die ſich gegenſeitig in den Axen ſchneiden, gleiche Radien, iſt alſo außer $d = 0$ auch noch $a = \alpha$, ſo wird $p = 0$, und die Gleichung für die Projection iſt

$$x = z;$$

es iſt alſo die Projection der Ebene x, z eine gerade Linie.

2. Ein normaler Cylinder wird von einer Kugel durchſchnitten; es ſollen die Gleichungen für die Projectionen der Durchſchnittscurve angegeben werden. — Legt man eine Ebene durch den Mittelpunkt α der Kugel und die Axe mn des Cylinders, nimmt a als den Anfangspunkt der Abſciſſen, auf mn die Abſciſſen = x, auf gb die Ordinaten y, und auf der dritten Axe, welche in a normal auf ABCD ſteht, die z, ſo iſt die Gleichung für die Cylinderfläche, von welchem der Radius ab = a iſt,

$$z^2 = a^2 - y^2$$

und die Gleichung für die Kugel iſt, wenn man den Radius derſelben $\alpha\beta = \alpha$ und den Abſtand $\alpha a = d$ ſetzt,

$$(y \pm d)^2 + x^2 + z^2 = \alpha^2.$$

Aus der erſten Gleichung geht hervor, daß die Projection auf der Ebene y, z ein Kreis iſt. Setzt man den Werth von z^2 aus der erſten Gleichung in die zweite, ſo wird dieſe

$$(y \pm d)^2 + x^2 + a^2 - y^2 = \alpha^2$$

und es iſt daher $x^2 = \alpha^2 - a^2 - d^2 \pm 2dy$,

alſo die Projection auf der Ebene x, y, nämlich in der Ebene ABCD, eine Parabel, und für d=0, wenn alſo α mit a zuſammenfällt, iſt

$$x^2 = \alpha^2 - a^2, \text{ folglich } x = \pm\sqrt{(\alpha^2 - a^2)}$$

conſtant für alle Werthe von y; die Projektion iſt alſo in dieſem Falle eine gerade Linie, welche parallel zu bg läuft.

Die zweite Gleichung giebt

$$y^2 \pm 2dy + d^2 + x^2 + z^2 = \alpha^2$$

und aus der erſten folgt $y^2 = a^2 - z^2$;

es iſt alſo auch

$$a^2 \pm 2d\sqrt{(a^2 - z^2)} + d^2 + x^2 = \alpha^2,$$

$$\text{alſo iſt } x^2 = \alpha^2 - a^2 - d^2 \mp 2d\sqrt{(a^2 - z^2)}$$

und es gehören daher in der Projection auf x, z zu jedem poſitiven oder negativen Werthe von z, vier Werthe von x.

3. Es iſt ABCD, Fig. 98., der Axendurchſchnitt eines normalen Cylinders und deβ der Durchſchnitt eines normalen Kegels, welcher parallel zur Grundfläche deſſelben iſt; man ſoll die Gleichungen für die Projectionen des Durchſchnitts beider Körper angeben.

Werden hier die Coordinaten-Axen eben ſo wie in den beiden vorhergehenden Beiſpielen angenommen, ſo iſt wiederum die Gleichung für die Oberfläche des Cylinders

$$z^2 = a^2 - y^2;$$

die Gleichung für die Oberfläche des Kegels iſt, nach §. 147. I. No. 4.,

$$R^2(h - z)^2 = h^2(x^2 + y^2),$$

wo aber der Mittelpunkt α als Anfangspunkt der Abſciſſen angenommen iſt, und man muß hier, weil $a\alpha = d$ iſt, $y \pm d$ für y ſetzen und α für R, wenn der Radius αa der Grundfläche des Kegels $= \alpha$ iſt; h bedeutet auch hier die Höhe

des Kegels, alſo die Linie von α bis zur Spitze deſſelben. Hierdurch wird die zweite Gleichung

$$\alpha^2(h-z)^2 = h^2x^2 + h^2(y \pm d)^2.$$

Die erſte Gleichung $z^2 = a^2 - y^2$ giebt zu erkennen, daß hier ebenfalls die Projection auf der Ebene z, y ein Kreis iſt. Die beiden übrigen Projectionen erhält man, wenn y oder z eliminirt wird. Um hier nicht zu weitläufig zu werden, wollen wir blos den einfachen Fall betrachten, wenn $d = 0$, alſo die Gleichung iſt

$$\alpha^2(h-z)^2 = h^2x^2 + h^2y^2$$

und daher, wenn man für y^2 den Werth ſetzt,

$$\alpha^2(h-z)^2 = h^2x^2 + h^2(a^2 - z^2),$$

woraus zu erſehen iſt, was die Projection auf der Ebene x, z für eine Curve wird; nämlich es iſt

$$\alpha^2h^2 - 2\alpha^2hz + \alpha^2z^2 = h^2x^2 + h^2a^2 - h^2z^2,$$

$$\text{alſo } (\alpha^2 - a^2)h^2 + (\alpha^2 + h^2)z^2 - 2\alpha^2hz = h^2x^2.$$

Dieſe Gleichung gehört zu einer Hyperbel, und ſie wird für $\alpha = h$, wenn alſo die Höhe des Kegels dem Radius der Grundfläche gleich iſt,

$$\alpha^2 - a^2 + 2z^2 - 2\alpha z = x^2.$$

4. Es iſt, Fig. 99., bdce die Grundfläche eines normalen Kegels, von welchem der Radius der Grundfläche ab $= ac = a$ und die Höhe $= H$ iſt; $\beta d\gamma e$ iſt die Grundfläche eines ebenfalls normalen Kegels, von welchem der Radius $= \alpha$ und die Höhe $= h$ ſein ſoll: man ſuche die Gleichungen für die Projectionen der Durchſchnittscurve.

Wird die Linie $b\gamma$, welche beider Flächen Mittelpunkte verbindet, als Ordinatenlinie für y angenommen und a als der Anfangspunkt der Abſciſſen, ſo iſt für die Oberfläche des erſten Kegels A die Gleichung

$$a^2(H-z)^2 = H^2(x^2 + y^2)$$

und für den andern Kegel B iſt die Gleichung, wenn man $a\alpha = d$ ſetzt, eben dieſelbe, nur daß α ſtatt a, h ſtatt H und $y \pm d$ für y geſetzt werden muß. Die zweite Gleichung iſt alſo

$$\alpha^2(h-z)^2 = h^2[x^2 + (y \pm d)^2]$$

und wenn aus beiden Gleichungen eine dritte abgeleitet wird, welche x nicht enthält, ſo erhält man

$$\frac{\alpha^2(h-z)^2}{h^2} - (y \pm d)^2 = \frac{a^2(H-z)^2}{H^2} - y^2$$

und daher iſt $\alpha^2 - \frac{2\alpha^2 z}{h} + \frac{\alpha^2 z^2}{h^2} \pm 2dy - d^2 = a^2 - \frac{2a^2 z}{H} + \frac{a^2 z^2}{H^2}$ die geſuchte Gleichung für die Projection in der Ebene y, z, welche alſo normal auf der Grundfläche die Abſciſſenlinie $b\gamma$ ſchneidet: eine Gleichung, die leicht geordnet werden kann.

Sind beide Kegel einander gleich, iſt alſo $a = \alpha$ und $H = h$, ſo wird $y = \pm \frac{1}{2}d$ conſtant, und es iſt daher alsdann ſowohl die Projection auf x, y als auch auf y, z eine gerade Linie, welche beide die Abſciſſenlinie $b\gamma$ normal ſchneiden. Die Gleichung für die Projection auf der Ebene x, z wird alsdann

$$a^2(H-z)^2 = H^2\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)$$

und es iſt daher $H - z = \frac{H}{a}\sqrt{\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)}$

und wenn man $H - z = v$ ſetzt, alſo die Coordinaten-Ebene durch die Spitze des Kegels parallel zur Grundfläche legt,

$$v^2 = \frac{H^2}{a^2}\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right),$$

welches eine Gleichung für die Hyperbel iſt, wenn man die zweite Axe derſelben als Abſciſſenlinie annimmt. Werden dieſe Axen mit A und B bezeichnet, ſo wird die Gleichung

$$v^2 = \frac{A^2}{B^2}\left(x^2 + B^2\right),$$

es iſt daher $B = \frac{1}{2}D$ und $A = \frac{H}{a} \cdot \frac{d}{2}$.

Zugleich leuchtet ein, daß in dieſem Falle die Durchſchnittslinie der Flächen beider Kegel in einer Ebene liegen muß, welche zu der Projectionsebene parallel läuft, und daher ſelbſt eine Hyperbel iſt.

5. Zwei Kugeln ſchneiden ſich; man ſoll die Formel für Projectionen der Durchſchnittslinie angeben.

Sind bdce und $\beta d\gamma e$, Fig. 99., ein paar größte Kreiſe dieſer Kugel, welche in der durch die Mittelpunkte a und α beider gelegten Projectionsebene liegen, und man nimmt a als den Anfangspunkt der Abſciſſen an, ſetzt $ab = a$, $\alpha\beta = \alpha$ und

$a\alpha = d$, ſo iſt die Gleichung für die Oberfläche der Kugel, die ihren Mittelpunkt in a hat,

$$a^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und für die Oberfläche der Kugel, welche ihren Mittelpunkt in α hat, iſt die Gleichung

$$\alpha^2 = (x - d)^2 + y^2 + z^2.$$

Beide Gleichungen zuſammengenommen geben

$$a^2 - x^2 = \alpha^2 - (x - d)^2,$$

$$\text{folglich iſt } \frac{a^2 + d^2 - \alpha^2}{2d} = x,$$

woraus hervorgeht, daß nur einem beſtimmten Werthe von x reelle Werthe von y und z entſprechen, und es iſt daher die Durchſchnittslinie beider Kugeln in einer Ebene, die der Projectionsebene y, z parallel iſt. Die Gleichung für die Projection der Curve auf y, z iſt daher die für die Curve ſelbſt. Setzt man den conſtanten Werth für $x = h$, ſo wird die erſte Gleichung

$$a^2 = h^2 + y^2 + z^2,$$

$$\text{folglich iſt } a^2 - h^2 = y^2 + z^2$$

$$\text{oder für } a^2 - h^2 = \varrho^2$$

$$y^2 = \varrho^2 - z^2,$$

woraus hervorgeht, daß die Durchſchnittscurve immer ein Kreis ſein muß, deſſen Mittelpunkt in der Abſciſſenlinie liegt, nämlich in der Linie, welche die Mittelpunkte beider Kugeln verbindet. Der Radius dieſes Kreiſes iſt durch die Gleichung beſtimmt

$$\varrho^2 = a^2 - h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + d^2 - \alpha^2}{2d}\right)^2$$

$$= \left(a + \frac{a^2 + d^2 - \alpha^2}{2d}\right)\left(a - \frac{a^2 + d^2 - \alpha^2}{2d}\right)$$

$$= \frac{((a + d)^2 - \alpha^2)}{2d} \cdot \frac{(\alpha^2 - (a - d)^2)}{2d}$$

und daher $4d^2\varrho^2 = (a + d + \alpha)(a + d - \alpha)(\alpha + a - d)(\alpha + d - a)$, woraus hervorgeht, daß ϱ die Höhe eines Dreiecks iſt, das für die Grundlinie $= d$ aus den Linien a, α und d beſchrieben werden kann. Iſt in einem beſonderen Falle $\alpha + d = a$, ſo wird $\varrho = 0$, und die Kugeln berühren ſich beide in einem Punkte: iſt aber $\alpha + d < a$, ſo liegt die eine Kugel ganz innerhalb der andern, ohne daß ſie ſich berühren oder ſchneiden.

§. 152.

§. 152.

Einiges von dem Flächeninhalte der Figuren auf krummen Oberflächen.

Es iſt bereits früher bemerkt worden, daß jede auf einer krummen Fläche verzeichnete Figur als dadurch entſtanden gedacht werden kann, daß ein cylinderförmiger oder überhaupt ein prismatiſcher Körper durch dieſe Fläche hindurchgeht, ſo daß die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie die Curve giebt, und es iſt alsdann die Grundfläche des prismatiſchen Körpers die Projection der Curve. Hieraus läßt ſich abnehmen, daß es möglich iſt, aus dieſer Projection und den bekannten Eigenthümlichkeiten der krummen Flächen eine Formel für den Inhalt der Figur aufzufinden, welche von der Curve auf der krummen Oberfläche eingeſchloſſen wird, wobei übrigens ſchon zum Voraus ſich vermuthen läßt, daß man in den meiſten Fällen Differentialformeln erhalten wird, die nur ſelten vollſtändig integrirt werden können. Indeſſen zeigt ſich hier der merkwürdige Fall, daß man bei einigen krummen Flächen ſogar vollſtändig quadrirbare Figuren erhält, und es iſt dies namentlich bei dem normalen Kegel und bei der Kugel der Fall, die hier näher betrachtet werden ſollen.

Iſt abd, Fig. 100., die Grundfläche eines normalen Kegels, deſſen Spitze alſo, die mit m bezeichnet werden ſoll, ſenkrecht über dem Mittelpunkte c der Grundfläche liegt, ſo iſt der Kreisausſchnitt acb die Projection des Theils mab der krummen Oberfläche des Kegels. Setzt man nun die Seite ma des Kegels $=$a und den Radius der Grundfläche ca$=$R, ſo iſt

$$\text{mab} = \tfrac{1}{2}\text{a} \times (\text{ab}) \text{ und cab} = \tfrac{1}{2}\text{R} \times (\text{ab}),$$

$$\text{alſo mab} : \text{cab} = \text{a} : \text{R}.$$

Der zu ac concentriſche Bogen $\alpha\beta$ iſt die Projection eines Bogens $\alpha'\beta'$, der parallel iſt zu ab, und man findet den Abſtand dieſes Bogens von m durch die Proportion

$$\text{ma} : \text{m}\alpha' = \text{ca} : \text{c}\alpha$$

$$\text{oder a} : (\text{m}\alpha') = \text{R} : (\text{c}\alpha),$$

$$\text{alſo iſt } (\text{m}\alpha') = \frac{\text{a}}{\text{R}} \times (\text{c}\alpha)$$

und es iſt daher

$$m\alpha'\beta' = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{R} \cdot (c\alpha) \times (\alpha'\beta')$$

und $c\alpha\beta = \frac{1}{2}(c\alpha) \times (\alpha\beta)$

und weil $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, ſo folgt

$$m\alpha'\beta' : c\alpha\beta = a : R.$$

Eben ſo iſt auch, wenn $\gamma\delta$ die Projection von $\gamma'\delta'$ iſt,

$$m\gamma'\delta' : c\gamma\delta = a : R$$

und hieraus folgt nun auch

$$(m\alpha'\beta' - m\gamma'\delta') : (c\alpha\beta - c\gamma\delta) = a : R,$$

folglich iſt ebenfalls

$$\alpha'\beta'\gamma'\delta' : \alpha\beta\gamma\delta = a : R.$$

Da nun jede Figur auf der krummen Oberfläche des Kegels in Theile zerlegt werden kann, wie $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, wenn $\alpha'\beta'$ und $\alpha'\gamma'$ hinlänglich klein angenommen werden, und jeder dieſer Theile zu ſeiner Projection wie a : R ſich verhält, ſo gilt dieſes auch von allen Theilen zuſammengenommen, und dieſes führt zu der merkwürdigen Regel: Jede Figur auf der krummen Oberfläche eines normalen Kegels verhält ſich zu der Projection derſelben auf der Grundfläche, wie die Seite a des Kegels zu dem Radius R der Grundfläche deſſelben. Wenn alſo dieſe Projection eine geradlinige oder eine quadrirbare krummlinige Figur iſt, ſo läßt ſich die entſprechende Figur auf der krummen Oberfläche des Kegels vollſtändig quadriren: es iſt nämlich immer, wenn die Fläche der Projection = P und die der dazu gehörigen Figur auf der Oberfläche des Kegels = Z geſetzt wird,

$$Z = \frac{a}{R} P.$$

Hieraus geht alſo hervor, daß — wenn auf der Grundfläche eines normalen Kegels irgend ein ſenkrechtes Prisma errichtet wird — der Theil der Oberfläche des Kegels, welchen der Durchſchnitt dieſes Prisma mit der Oberfläche des Kegels, von dieſer nach der Spitze des Kegels zu abſchneidet, immer zu der Grundfläche des Prisma, wie a : R ſich verhält.

Die Oberfläche eines Kegels läßt ſich abwickeln: nämlich es iſt immer möglich, den Mantel oder das Netz deſſelben in einer ebenen Fläche darzuſtellen, wie bereits in dem fünften Abſchnitte der erſten Abtheilung gezeigt worden iſt, und daher iſt

es auch möglich, den Inhalt einer Figur auf der Oberfläche eines Kegels, wie den einer Figur in einer ebenen Fläche zu berechnen. Die Kugel aber iſt keiner Abwicklung fähig; für ſie giebt es alſo kein vollſtändiges Netz: deſſen ungeachtet aber läßt ſich nicht nur ein jeder Theil ihrer Oberfläche berechnen, indem man ſie auf die Fläche eines Kreiſes zurückführt, wie dies bereits von Kugelabſchnitten, Zonen und ſphäriſchen Dreiecken im ſiebenten Abſchnitte der erſten Abtheilung gezeigt worden iſt, ſondern es laſſen ſich ſelbſt vollſtändig quadrirbare Flächen auf derſelben angeben, wie aus dem folgenden §. ſich ergiebt.

§. 153.

Aufgabe.

Es iſt G, Fig. 101., der Mittelpunkt einer Kugel, GBC und GBA ſind ein paar normal aufeinander ſtehende Quadranten größter Kreiſe derſelben, ſo daß der durch dieſe beiden Bogen beſtimmte Körper den vierten Theil der Halbkugel beträgt. Auf der Oberfläche dieſes Körpers iſt eine Curve BMmC von der Art beſchrieben, daß das Geſetz gegeben iſt, nach welchem jeder Punkt M derſelben von den Bogen BP und PM größter Kreiſe abhängt, ſo daß alſo die Gleichung für dieſelben durch die ſphäriſchen Coordinaten BP und PM gegeben iſt, die beide bei P einen rechten Winkel mit einander bilden, weil C der Pol des Bogens BA iſt: es ſoll die Formel für den Theil der Fläche des Quadranten der Halbkugel ermittelt werden, welcher von den Kreisquadranten AB, AC und der Curve BMmC eingeſchloſſen iſt.

Auflöſung. Man ſetze die Länge des Bogens $BP = X$, den dazu gehörigen Winkel an dem Mittelpunkte der Kugel $= \psi$, $PM = Y$, den hierzu gehörigen Winkel am Mittelpunkte $= \varphi$ und den Radius der Kugel $= R$, ſo iſt $X = R\psi$ und $Y = R\varphi$, und wenn die gegebene Gleichung iſt

$$Y = f(X),$$

ſo iſt auch $R\varphi = f(R\psi)$.

Ferner ſei $Pp = \Delta X = R\Delta\psi$ und alſo

$$(pm) = Y' = Y + \Delta Y = R(\varphi + \Delta\varphi),$$

ſo wird, wenn man die Fläche $BPM = Z$ ſetzt, $PMmp = \Delta Z$

und es iſt nun, wie aus den bei der Berechnung der Kugelzonen angegebenen Formeln ſich ergiebt,

$PMpm > (Pp) \cdot \sin (PM)$ und $PMpm < (Pp) \sin (pm)$ oder da $\sin (PM) = R \sin \varphi$ und $(pm) = R \sin(\varphi + \Delta\varphi)$,

$PMpm > (Pp) R \sin \varphi$ und $PMpm < (Pp) R \sin (\varphi + \Delta\varphi)$ und daher auch

$\Delta Z > \Delta X \cdot R \sin \varphi$ und $\Delta Z < \Delta X \cdot R \sin (\varphi + \Delta\varphi)$; hieraus folgt

$$\frac{\Delta Z}{\Delta X} > R \sin \varphi \text{ und } \frac{\Delta Z}{\Delta X} < R \sin (\varphi + \Delta\varphi).$$

Für $\Delta X = 0$ aber wird auch $\Delta Y = 0$ und $\Delta\varphi = 0$, folglich iſt

$$\frac{dZ}{dX} = R \sin \varphi.$$

Weil aber $X = R\psi$, ſo iſt $dX = Rd\psi$, und daher

$$dZ = R^2 \sin \varphi \cdot d\psi,$$

$$\text{alſo } Z = R^2 \int d\psi \sin \varphi$$

die geſuchte Formel, wo nun noch, bevor ſie integrirt werden kann, für φ der durch die gegebene Gleichung $Y = f(X)$ beſtimmte Werth durch ψ geſetzt werden muß.

Es ſei nun $f(X) = mX$, alſo $Y = mX$ und alſo auch $R\varphi = mR\psi$ und $\varphi = m\psi$, ſo wird

$$\sin \varphi = \sin m\psi \text{ und daher}$$

$$Z = R^2 \int d\psi \sin m\psi$$

$$\text{und weil } \int d\psi \sin m\psi = -\frac{\cos m\psi}{m}, \text{ ſo iſt}$$

$$Z = -\frac{R^2}{m} \cos m\psi + C.$$

Weil nun für $X = 0$ auch $Z = 0$ wird, und alsdann ebenfalls $\psi = 0$ ſein muß, alſo $\cos m\psi = \cos 0 = 1$, ſo iſt

$$C = \frac{R^2}{m}$$

$$\text{und daher } Z = \frac{R^2}{m} (1 - \cos m\psi).$$

Setzt man nun $m\psi = 90^0$, ſo wird

$$Z = \frac{R^2}{m}$$

eine vollſtändig quadrirbare Fläche.

Für m = 1 erhält man $Z = R^2$, wenn $\psi = 90^0$ angenommen wird, alſo $BP = X = R\psi = R \times \frac{1}{2}\pi = BA$, nämlich es iſt in dieſem Falle die von den Kreisquadranten AB, AC und der Curve BMmC eingeſchloſſene Fläche dem Quadrate des Radius der Kugel gleich. Da übrigens $\varphi = m\psi$ für $m = 1$ giebt $\varphi = \psi$, ſo iſt alsdann auch $X = Y$, alſo $BP = PM$. Die einzelnen Punkte M der Curve auf der Oberfläche der Kugel laſſen ſich alſo dadurch leicht angeben, daß innerhalb eines Quadranten die Breite eines jeden Punktes ſeiner Länge gleich iſt.

Zuſatz 1. Die Eigenthümlichkeit der Curve BMC beſteht vorzüglich darin, daß die Fläche BACM vollſtändig quadrirbar iſt, wenn jeder Punkt M derſelben dadurch beſtimmt wird, daß man den Bogen $PM = BP$ nimmt, und es verdient nun auch die Gleichung für die Projection dieſer Curve abgeleitet zu werden. Nimmt man BGC als die Projections-Ebene an, GB als Abſciſſenlinie und G als den Anfangspunkt der Abſciſſen, und iſt nun, Fig. 101 a., μ die Projection von M, und man ſetzt $Gx = x$, $x\mu = y$ und $\mu M = z$, ſo iſt, weil M normal über μ auf der Oberfläche der Kugel liegt, und $GM = R$ der Radius der Kugel iſt, wenn $G\mu = p$ geſetzt wird,

$$R : p = 1 : \cos(MN) = 1 : \sin(AM),$$

alſo $p = R \sin(AM)$,

und weil $G\mu : \mu x = 1 : \sin(BN)$

und BN das Maaß des Winkels PAM = A iſt, ſo wird

$$p : y = 1 : \sin A$$

und es iſt daher $y = p \sin A = R \sin(AM) \cdot \sin A$.

Es iſt aber APM ein bei P rechtwinkliges ſphäriſches Dreieck und daher

$$\sin(PM) : \sin A = \sin(AM) : 1,$$

alſo iſt $\sin(AM) \sin A = \sin(PM) = \sin\psi$,

folglich $y = R \sin(AM) \sin A = R \sin\psi$.

Ferner iſt $Gx : x\mu = 1 : \text{tg}(BN)$

oder $x : y = 1 : \text{tg} A$

und daher auch $y = x \,\text{tg} A$.

In dem rechtwinklig-ſphäriſchen Dreieck APM aber iſt

$$1 : \sin(AP) = \text{tg} A : \text{tg}(PM)$$

und weil sin (AP) = cos BP = cos ψ und tg (PM) = tg ψ, ſo iſt

$$1 : \cos \psi = \text{tg } A : \text{tg } \psi,$$

$$\text{alſo tg } A = \frac{\text{tg } \psi}{\cos \psi} = \frac{\sin \psi}{\cos^2 \psi}$$

$$\text{und daher iſt auch } y = x \text{ tg } A = \frac{x \sin \psi}{\cos^2 \psi}.$$

Wird nun dieſer Werth von y dem früher gefundenen

$$y = R \sin \psi$$

gleich geſetzt, ſo erhält man

$$R \sin \psi = \frac{x \sin \psi}{\cos^2 \psi}$$

$$\text{und daher iſt } x = R \cos^2 \psi.$$

Man braucht alſo jetzt nur aus den beiden Gleichungen

$$y = R \sin \psi \text{ und } x = R \cos^2 \psi = R (1 - \sin^2 \psi)$$

ψ zu eliminiren, um die geſuchte Gleichung für die Projection BμC der Curve BMC zu erhalten, nämlich es iſt

$$x = R \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right),$$

$$\text{alſo } Rx = R^2 - y^2 \text{ und } y^2 = R(R - x)$$

$$\text{oder } y^2 = Rv, \text{ wenn man } (Bx) = R - x = v \text{ ſetzt.}$$

Hieraus geht alſo hervor, daß die Projection der Curve eine Parabel iſt.

Zuſatz 2. Es iſt GM : μM = 1 : sin (MN),

$$\text{alſo } R : z = 1 : \cos (AM);$$

es iſt aber AM die Hypotenuſe des rechtwinkligen ſphäriſchen Dreiecks APM und daher

$$1 : \cos (AP) = \cos (PM) : \cos (AM),$$

$$\text{alſo } 1 : \cos (90^0 - \psi) = \cos \psi : \cos (AM),$$

$$\text{folglich iſt } \cos (AM) = \sin \psi \cos \psi$$

$$\text{und daher } R : z = 1 : \sin \psi \cos \psi,$$

$$\text{alſo iſt } z = R \sin \psi \cos \psi.$$

Die drei Coordinaten x, y und z der Curve BMC auf der Oberfläche der Kugel ſind alſo durch die Gleichungen beſtimmt

$$x = R \cos^2 \psi, \; y = R \sin \psi \text{ und } z = R \sin \psi \cos \psi.$$

Daß dieſe Werthe aber überhaupt der Gleichung für die Oberfläche einer Kugel, nämlich $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ entſprechen, iſt

leicht nachzuweiſen: denn es iſt, wenn für x, y und z die obigen Werthe geſetzt werden,

$$R^2[\cos^4\psi+\sin^2\psi+\sin^2\psi\cos^2\psi]=R^2,$$

alſo $\cos^2\psi(\cos^2\psi+\sin^2\psi)+\sin^2\psi=1$

und daher $\cos^2\psi+\sin^2\psi=1,$

wie es ſein muß.

Zuſatz 3. Iſt, Fig. 101 a., BGC ein Axendurchſchnitt eines normalen Cylinders, GC die Seite, alſo parallel zur Axe deſſelben, und fällt daher GB mit einem Durchmeſſer deſſelben zuſammen, ſo iſt, wenn man den Radius dieſes Cylinders $=\varrho$ ſetzt, und G als den Anfangspunkt der Abſciſſen annimmt, die Gleichung für die Oberfläche dieſes Cylinders

$$z^2=x(2\varrho-x)$$

und für dieſelben Coordinaten-Axen iſt die Gleichung für die Oberfläche der Kugel

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Dieſe beiden Gleichungen zuſammen genommen geben für die Projection des Durchſchnitts beider Körper

$$y^2=R^2-2\varrho x$$

und es iſt daher, wenn man $2\varrho=R$ ſetzt,

$$y^2=R^2-Rx=R(R-x),$$

die Gleichung dieſelbe, welche auch für die Projection der Curve BMC, Figur 101., Gültigkeit hat: die in dem obigen §. betrachtete Curve wird daher erzeugt, wenn ein Cylinder, von welchem BG ein Durchmeſſer iſt, durch die Kugel hindurch geht. Dieſes führt zu dem merkwürdigen Reſultate: wenn durch eine Halbkugel zwei halbe normale Cylinder, die den Radius der Kugel zum Durchmeſſer haben, ſo hindurchgehen, daß ſie auf der Grundfläche der Kugel aufliegen, und ſich in einem Durchmeſſer derſelben, als gemeinſchaftlicher Seite, berühren, ſo wird die Halbkugel hierdurch ſo durchbrochen, daß der übrig bleibende Theil der Oberfläche derſelben vollſtändig quadrirbar iſt; nämlich es iſt, da für jeden Quadranten die bleibende Fläche ABMC $=R^2$, die ganze von der Halbkugel bleibende Oberfläche $=4R^2$, alſo dem Quadrate des Durchmeſſers der Kugel gleich.

Anmerkung. Viviani in Florenz gab den Analyſten im Jahr 1692 eine geometriſche Aufgabe, die er auf folgende Art einkleidete: Un-

ter den Denkmälern des alten Griechenlands iſt noch ein Tempel vorhanden, welcher der Geometrie gewidmet iſt, von kreisrunder Form, mit einem Gewölbe bedeckt, das inwendig eine vollkommene Halbkugel bildet. Dieſes iſt von vier gleich großen Oeffnungen rings an der Grundfläche herum durchbrochen, die ſo geſtaltet ſind, daß die übrige Fläche vollſtändig quadrirbar iſt. — Man ſieht leicht ein, daß dieſe Aufgabe von der eben behandelten nicht verſchieden iſt, und daß dieſelbe, auch allgemeiner genommen, auf mehrfach verſchiedene Art gelöſt werden kann. Man vergleiche hiermit Klügel's mathematiſches Wörterbuch, Theil II., Artikel: Florentiniſche Aufgabe.

§. 154.

Aufgabe.

Von dem vierten Theil einer Halbkugel iſt AGB, Fig. 101 b., die Grundfläche, und BM′G iſt die eines halben normalen Cylinders, der durch die Kugel hindurchgeht; es ſoll der Kubikinhalt des Stückes berechnet werden, welches beide Körper gemein haben.

Auflöſung. Man ſetze das Stück des gemeinſchaftlichen Körpers, wovon BGM′ die Baſis bildet, = Z und den dazu gehörigen Winkel $BGP = \psi$, ſo iſt hier $\angle PGp = \Delta\psi$ der Theil des Körpers über $M'Gm' = \Delta Z$. Der Halbkreis BM′G iſt die Projection der Curve BMNC, Fig. 101., auf der Fläche AGB, und es liegen daher die Punkte M und m normal über M′ und m′. Werden von G gerade Linien an M und m gezogen, ſo wird hierdurch der ganze Körper $= \Delta Z$ in zwei Pyramiden zerlegt, die ihre Spitze gemeinſchaftlich in G haben, und von welchen die eine das Viereck MmM′m′, und die andere das Dreieck CMm zur Grundfläche hat. Man bezeichne den Inhalt der erſteren dieſer Pyramiden mit P, ihre Grundfläche mit G und ihre Höhe mit H, und bei der andern ſetze man dieſe Größen p, g und h, ſo iſt

$$P = \tfrac{1}{3}GH \text{ und } p = \tfrac{1}{3}gh,$$

$$\text{und daher } \Delta Z = P + p = \tfrac{1}{3}(GH + gh).$$

Es iſt aber MM′ die, §. 153. mit y bezeichnete, Ordinate $= x\mu$, Fig. 101 a., und daher $MM' = R \sin \psi$; alſo $mm' = R \sin(\psi + \Delta\psi)$, und weil der Winkel PGp zugleich Centriwinkel auf dem Bogen Pp und Peripheriewinkel auf M′m′ iſt, während der Kreis BM′G nur einen halb ſo großen Ra-

dius als BPA hat, ſo ſind die Bogen Pp und M′m′ gleich lang: da nun $Pp = R\Delta\psi$, ſo iſt auch $M'm' = R\Delta\psi$. Für einen kleinen Werth von $\Delta\psi$ kann nun Mmm′M′ als ein Paralleltrapez angeſehen werden, und es iſt daher

$$G=\left(\frac{MM'+mm'}{2}\right)\cdot(M'm')=\left(\frac{R\sin\psi+R\sin(\psi+\Delta\psi)}{2}\right)\cdot R\Delta\psi,$$

alſo $G=R^2\Delta\psi\left(\frac{\sin\psi+\sin\psi\cos\Delta\psi+\cos\psi\sin\Delta\psi}{2}\right)$,

und wenn $\Delta\psi$ in $d\psi$ übergeht, ſo wird $\cos\Delta\psi = 1$ und $\sin\Delta\psi = 0$, und daher für dieſen Fall

$$G=R^2\sin\psi\cdot d\psi.$$

Da Mmm′M′ normal ſteht auf der Fläche BM′G, ſo iſt die Höhe H der Pyramide GMmm′M′ der Senkrechten von G auf M′m′ gleich, und weil M′m′ als gerade Linie angeſehen werden kann, ſo iſt H die Senkrechte von G auf der Tangente an M′, alſo $H = (Gt)$. Es iſt aber $\angle GM't$ der Winkel, welchen die Sehne GM′ mit der Tangente an M′ bildet, und auch M′GH iſt ein ſolcher Winkel in Beziehung auf denſelben Bogen, folglich iſt

$$\angle GM't=\angle M'GA=90^0-\angle M'GB=90^0-\psi,$$

folglich iſt $GM' : Gt = 1 : \cos\psi$,
und da $GM' : M'K = 1 : \sin\psi$,
ſo folgt $M'K : Gt = \sin\psi : \cos\psi$.

Es iſt aber M′K der normale Abſtand des Punktes M, Fig. 101., von der Fläche BGC und alſo nach der, §. 153 gebrauchten Bezeichnung $= z = R\sin\psi\cos\psi$, folglich iſt

$$R\sin\psi\cos\psi : (Gt) = \sin\psi : \cos\psi,$$

und daher $H = (Gt) = R\cos^2\psi$;

hiernach iſt $P=\frac{1}{3}GH=\frac{1}{3}R^3\sin\psi\cos^2\psi\, d\psi$.

Von der zweiten Pyramide $= p$ iſt die Grundfläche $g = CMm$, Fig. 101., und die Höhe $h=R$; es iſt alſo

$$g = CPp - PpmM$$
$$= R(Pp) - PpmM.$$

Nach §. 153. aber iſt $PpmM = R^2\sin\psi\, d\psi$ und $Pp = Rd\psi$

und daher $g = R^2 d\psi - R^2\sin\psi\, d\psi$,

folglich iſt $p=\frac{1}{3}gh=\frac{1}{3}R^3(d\psi-\sin\psi\, d\psi)$.

Da nun $\Delta Z = P + p$, ſo iſt auch, wenn man dz ſtatt ΔZ ſetzt,

$$dZ = \tfrac{1}{3}R^3(\sin\psi\cos^2\psi\, d\psi + d\psi - \sin\psi\, d\psi),$$

und daher $Z + \tfrac{1}{3}R^3[\int\cos^2\psi\sin\psi\, d\psi + \psi - \int\sin\psi\, d\psi]$;
nämlich es iſt

$$Z = \tfrac{1}{3}R^3\left[-\tfrac{1}{3}\cos^3\psi + \psi + \cos\psi\right] + C.$$

Nun muß $Z = 0$ werden für $\psi = 0$, alſo iſt

$$0 = \tfrac{1}{3}R^3\left[-\frac{1}{3} + 1\right] + C, \text{ und } C = -\tfrac{1}{3}R^3 \cdot \frac{2}{3}$$

und daher $Z = \tfrac{1}{3}R^3\left[-\tfrac{1}{3}\cos^3\psi + \psi + \cos\psi - \frac{2}{3}\right]$.

Dieſes iſt alſo der Ausdruck für den Inhalt des Körpers, welcher ein Stück bildet von dem gemeinſchaftlichen Theile des Cylinders und der Kugel. Um den Inhalt des ganzen gemeinſchaftlichen Theils beider Körper zu erhalten, muß man den Halbkreis BM′m′G, ſtatt des Ausſchnitts BGM′ als Baſis annehmen, man muß alſo $\psi = 90^0$ ſetzen, wodurch $\cos\psi = 0$ und $\psi = \tfrac{1}{2}\pi$ wird. Folglich iſt der Inhalt des ganzen gemeinſchaftlichen Theils beider Körper

$$Z = \tfrac{1}{3}R^3\left[\tfrac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right] = \tfrac{1}{6}R^3\pi - \tfrac{2}{9}R^3,$$

der Inhalt des ganzen Kugeloctanten iſt $= \tfrac{1}{8} \cdot \frac{4R^3\pi}{3} = \tfrac{1}{6}R^3\pi$,

und daher der übrig bleibende Theil, wenn hiervon der durchgehende Cylinder weggenommen wird, $= \tfrac{2}{9}R^3$ vollſtändig kubirbar.

§. 155.

Von durchbrochenen Cylindern.

Iſt auf der Oberfläche eines normalen Cylinders irgend eine geſchloſſene Figur, deren Projection auf der Ebene ABCD, Fig. 98, eines Axendurchſchnitts des Cylinders gegeben iſt, ſo läßt ſich die Formel für den Flächeninhalt dieſer Figur auf folgende Art ermitteln:

Man nehme irgend einen Punkt der Axe mn als den Anfangspunkt der Abſciſſen und den Radius ab=R als Abſciſſenlinie, ſo iſt, wenn β die Projection eines Punktes der auf der Oberfläche des Cylinders beſchriebenen Figur iſt, für

$a\beta = x$, der zu dieſer Linie gehörige Bogen $v = R \operatorname{Arc} \sin \frac{x}{R}$. Da nun in der Projection, weil ab die Abſciſſenlinie bildet, die Ordinaten parallel zur Axe laufen, ſo iſt, wenn die in der Projection zu $a\beta = x$ gehörige Ordinate $= y$ geſetzt wird, auf der Oberfläche des Cylinders die zu der krummen Linie $v = R \operatorname{Arc} \sin \frac{x}{R}$ als Abſciſſe gehörige Ordinate ebenfalls $= y$. Setzt man nun die Fläche des durch x und y beſtimmten Theils der Projection $= P$, und die Fläche, welche hierzu auf der Oberfläche des Cylinders gehört $= Z$, ſo iſt

$$dP = ydx \text{ und } dZ = ydv;$$

weil aber $v = R \operatorname{Arc} \sin \frac{x}{R}$, ſo iſt

$$dv = \frac{dx}{\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)}} = \frac{Rdx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}},$$

und daher $dZ = \frac{Rydx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}}$,

wofür man auch ſetzen kann

$$dZ = \frac{RdP}{\sqrt{(R^2 - x^2)}}$$

und es iſt daher $Z = R \int \frac{ydx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}} = R \int \frac{dP}{\sqrt{(R^2 - x^2)}}$ eine Formel für den Inhalt einer jeden Figur auf der Oberfläche des Cylinders, deren Projection durch die Gleichung $y = f(x)$ gegeben iſt, oder von welcher man die Fläche der Projection als eine Function von x kennt.

Iſt nun die Projection P die Grundfläche eines normalen Prisma, welches durch den Cylinder hindurchgeht, und ſetzt man den normalen über β auf der Oberfläche befindlichen Punkt $= \beta'$, ſo iſt $\beta\beta' = z$, und der durch dieſe Linie parallel zur Axe mn geführte Schnitt giebt für den gemeinſchaftlichen Theil des Cylinders und des Prisma eine Durchſchnittsfläche $= yz$, oder weil $z = \sqrt{(R^2 - x^2)}$, ſo iſt dieſe Fläche $= y\sqrt{(R^2 - x^2)}$, und daher iſt, wenn der gemeinſchaftliche Theil beider Körper mit V bezeichnet wird,

$$dV = yzdx = ydx\sqrt{(R^2 - x^2)}$$

und daher iſt $V = \int yzdx = \int ydx\sqrt{(R^2 - x^2)}$

die Formel für den gemeinſchaftlichen Theil beider Körper. So einfach übrigens auch dieſe Formel iſt, ſo kann man ſie doch nur in den wenigſten Fällen vollſtändig integriren. Es ſei

1. Die Ordinate y conſtant = a, alſo die Projection ein Rechteck, von welchem die eine Seite parallel zur Axe iſt, und der durch den Cylinder hindurchgehende Körper ein normales Parallelepipedon, ſo iſt der Inhalt der Figur auf der Oberfläche des Cylinders

$$Z = R\int\frac{ydx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}} = aR\int\frac{dx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}},$$

und der gemeinſchaftliche Theil des Prisma und des Cylinders

$$V = \int ydx\sqrt{(R^2 - x^2)} = a\int dx\sqrt{(R^2 - x^2)},$$

und weil $\int dx\sqrt{(R^2 - x^2)} = \frac{x\sqrt{(R^2 - x^2)}}{2} + \frac{R^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}}$

und $\int\frac{dx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}} = \text{Arc sin } \frac{x}{R}$, ſo iſt

$$Z = aR \text{ Arc sin} \frac{x}{R} + C$$

und $V = \frac{ax}{2}\sqrt{(R^2 - x^2)} + \frac{aR^2}{2}\text{ Arc sin } \frac{x}{R} + C,$

und es iſt in dieſen Formeln C = 0, wenn Z und alſo auch V = 0 werden muß für x = 0, wenn alſo die eine Seite des Rechtecks mit der Axe m des Cylinders zuſammenfällt. In dieſem Falle iſt daher auch

$$V = \frac{ax}{2} \cdot Z + \frac{R}{2} \cdot Z$$

oder, weil ax = P die Fläche der Projection iſt,

$$V = \frac{Pz + RZ}{2}.$$

Der Inhalt des gemeinſchaftlichen Körpers iſt nämlich das arithmetiſche Mittel zwiſchen den beiden Prismen, von welchen das eine die Projection P des Durchſchnitts zur Grundfläche und den Abſtand des Endpunkts der Abſciſſe x von der Oberfläche des Cylinders zur Höhe, und das andere die Durchſchnittsfläche Z ſelbſt zur Grundfläche und den Radius R des Cylinders zur Höhe hat.

Fällt die eine Seite des Rechtecks, welches die Projection P bildet, nicht mit der Axe mn zuſammen, ſondern iſt der Abſtand derſelben von der Axe $= \alpha$, und alſo, weil der der andern Seite $= x$ iſt, die Höhe des Rechtecks $= x - \alpha$, ſo wird Z und auch $V = 0$, wenn man $x = \alpha$ ſetzt, wodurch nun die Werthe der Conſtanten in den gefundenen Formeln für Z und V beſtimmt ſind.

2. Iſt die Gleichung für die Projection des Durchſchnitts $y = mx$, und alſo die Projection ſelbſt ein Dreieck, ſo wird

$$Z = mR \int \frac{xdx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}} \text{ und } V = m \int xdx \sqrt{(R^2 - x^2)},$$

nämlich es iſt

$$Z = -mR\sqrt{(R^2 - x^2)} + C \text{ und } V = -\frac{m(R^2 - x^2)\sqrt{(R^2 - x^2)}}{3} + \text{Const.}$$

und wenn für $x = 0$ auch Z und $V = 0$ werden muß, ſo iſt

$$C = mR^2 \text{ und Const.} = \frac{mR^3}{3},$$

$$\text{alſo } Z = mR[R - \sqrt{(R^2 - x^2)}] = mR(R - z),$$

$$\text{und } V = \frac{m}{3}[R^3 - \sqrt{(R^2 - x^2)^3}] = \frac{m(R^3 - z^3)}{3}.$$

Berührt die Projection die Axe nicht, ſondern iſt der Abſtand des Anfangspunktes derſelben von der Axe $= \alpha$, ſo wird Z und $V = 0$, wenn man $x = \alpha$ ſetzt, und es laſſen ſich hierdurch die Werthe der Conſtanten für dieſen Fall leicht berechnen.

3. Iſt deβ, Fig. 98., die Baſis einer Halbkugel, ſo hat man, wenn ab die Abſciſſenlinie, a der Anfangspunkt der Abſciſſen und α der Mittelpunkt der Kugel iſt, für $\alpha a = \alpha$, für die Oberfläche der Kugel, wenn der Radius derſelben mit ϱ bezeichnet wird, die Gleichung

$$\varrho^2 = (\alpha + x)^2 + y^2 + z^2$$

und die Gleichung für die Oberfläche des Cylinders iſt

$$R^2 = x^2 + z^2.$$

Beide Gleichungen zuſammengenommen geben die Gleichung für die Projection des Durchſchnitts der Kugel und des Cylinders

$$\varrho^2 - R^2 = \alpha^2 + 2\alpha x + y^2,$$

alſo iſt $y^2 = \varrho^2 - R^2 - \alpha^2 - 2\alpha x,$

und wenn man zur Abkürzung ſetzt $\varrho^2 - R^2 - \alpha^2 = 2\alpha b,$

$$y^2 = 2\alpha(b-x) \text{ und } y = \sqrt{2\alpha(b-x)}.$$

Daher iſt die Gleichung für die Fläche des Schnittes

$$Z = R\int \frac{dx\sqrt{2\alpha(b-x)}}{\sqrt{(R^2-x^2)}}$$

und die für den gemeinſchaftlichen Theil des Cylinders und der Kugel iſt

$$V = \int dx\sqrt{2\alpha(b-x)(R^2-x^2)},$$

Formeln, deren Integration ſchon mit Schwierigkeiten verbunden iſt, indem hier die Auflöſung des Ausdruckes in eine Reihe am einfachſten zum Ziele führt.

4. Es ſei die Projection des Durchſchnitts eine Parabel von der Art, daß ſie durch die Gleichung ausgedrückt wird

$$x^2 = py,$$

daß alſo die Axe der Parabel entweder mit der des Cylinders zuſammenfällt, oder zu ihr parallel iſt, ſo wird

$$Z = \frac{R}{p}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(R^2-x^2)}} \text{ und } V = \frac{1}{p}\int x^2dx\sqrt{(R^2-x^2)}.$$

Nun iſt $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(R^2-x^2)}} = -\frac{x\sqrt{(R^2-x^2)}}{2} + \frac{R^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(R^2-x^2)}}$

und

$$\int x^2dx\sqrt{(R^2-x^2)} = -\frac{x\sqrt{(R^2-x^2)^3}}{4} + \frac{R^2}{4}\left[\frac{x\sqrt{(R^2-x^2)}}{2} + \frac{R^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(R^2-x^2)}}\right]$$

$$= -\frac{x\sqrt{(R^2-x^2)^3}}{4} + \frac{R^2x\sqrt{(R^2-x^2)}}{8} + \frac{R^4}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{(R^2-x^2)}}$$

nach Meier Hirſch's Integraltafeln S. 142 und 153.

Da nun $\int\frac{dx}{\sqrt{(R^2-x^2)}} = \text{Arc}\sin\frac{x}{R}$, ſo iſt

$$Z = -\frac{Rx}{2p}\sqrt{(R^2-x^2)} + \frac{R^3}{2p}\text{Arc}\sin\frac{x}{R} + C$$

und $V = \frac{(2x^2-R^2)x}{8p}\cdot\sqrt{(R^2-x^2)} + \frac{R^4}{8p}\text{Arc}\sin\frac{x}{R} + \text{Const.}$

Die Conſtanten ſind hier $= 0$, ſobald für $x = 0$ auch Z und $V = 0$ ſein müſſen.

Für $x = R$ erhalten dieſe Ausdrücke die Werthe

$$Z = \frac{R^3}{2p} \cdot \text{Arc sin } 1 = \frac{R^3}{2p} \cdot \tfrac{1}{2}\pi = \frac{R^3\pi}{4p}$$

und $V = \frac{R^4}{8p} \text{ Arc sin } 1 = \frac{R^4}{8p} \cdot \tfrac{1}{2}\pi = \frac{R^4\pi}{16p}$

und es iſt für $p = \tfrac{1}{4}R$

$$Z = R^2\pi \text{ und } V = \frac{R^3\pi}{4}.$$

5. Iſt $dc\beta$ der Durchſchnitt eines normalen Cylinders, der $\alpha\beta = \varrho$ zum Radius hat, ſo gehört, wenn man $\alpha a = \alpha$ ſetzt, zu jeder Abſciſſe x eine Ordinate y, deren Größe durch die Gleichung ausgedrückt wird

$$y^2 = \varrho^2 - (\alpha + x)^2,$$

daher wird in dieſem Falle

$$Z = R\int \frac{dx\sqrt{[\varrho^2 - (\alpha + x)^2]}}{\sqrt{(R^2 - x^2)}}$$

$$\text{und } V = \int dx \sqrt{[\varrho^2 - (\alpha + x)^2]} \cdot \sqrt{(R^2 - x^2)}$$

und für $\alpha = 0$, wenn alſo die Cylinder in ihren Axen ſich ſchneiden, wird

$$Z = R\int dx \sqrt{\left(\frac{\varrho^2 - x^2}{R^2 - x^2}\right)}$$

$$\text{und } V = \int dx \sqrt{(\varrho^2 - x^2)(R^2 - x^2)}.$$

Einfach werden dieſe Formeln alsdann, wenn $\varrho = R$ iſt, wenn alſo die Radien der Grundflächen beider Cylinder gleich groß ſind. Es iſt alsdann

$$Z = Rx$$

$$\text{und } V = \int dx (R^2 - x^2) = R^2 x - \frac{x^3}{3},$$

wo beide Ausdrücke rational ſind, und es wird für $x = R$,

$$Z = R^2 \text{ und } V = \tfrac{2}{3}R^3.$$

Da dieſe Ausdrücke nur auf den vierten Theil der Cylinder ſich beziehen, nämlich auf den Theil oberhalb nmDC, ſo iſt, wenn zwei gleich große normale Cylinder ſo durch einander gehen, daß ſich ihre Axen ſenkrecht ſchneiden, die ganze Durchſchnittsfläche beider $= 4R^2$ dem Quadrate des Durchmeſſers gleich, und der gemeinſchaftliche Theil beider Körper iſt $= 4 \times \tfrac{2}{3}R^3 = \tfrac{8}{3}R^3 = \frac{(2R)^3}{3}$, alſo der dritte Theil von dem Würfel des Durchmeſſers ihrer Grundflächen.

§. 156.
Uebungen.

1. Wenn, Fig. 98., ABCD der Axendurchſchnitt eines Cylinders iſt, und man nimmt a als den Anfangspunkt der Abſciſſen und den Radius ab=R als Abſciſſenlinie, ſo iſt die Gleichung für die Oberfläche des Cylinders

$$x^2+z^2=R^2.$$

Iſt nun deβ die Grundfläche eines Kegels, α der Mittelpunkt derſelben, $\alpha\beta=\varrho$, $\alpha a=\alpha$ und die Höhe des Kegels =h, ſo iſt für dieſelben Coordinaten, wie bei dem Cylinder, die Gleichung für die Oberfläche des Kegels

$$\frac{\varrho^2}{h^2}(h-z)^2=(x+\alpha)^2+y^2.$$

Wird nun aus dieſen beiden Gleichungen z eliminirt, und man erhält hierdurch $y=f(x)$, ſo iſt, nach §. 155., indem der Kegel durch den Cylinder hindurch geht, die Fläche Z des Durchſchnittes durch die Formel beſtimmt

$$Z=R\int\frac{ydx}{\sqrt{(R^2-x^2)}}=R\int\frac{dx f(x)}{\sqrt{(R^2-x^2)}},$$

und die Formel für den gemeinſchaftlichen Theil V beider Körper iſt

$$V=\int ydx\sqrt{(R^2-x^2)}=\int dx\, f(x)\sqrt{(R^2-x^2)}.$$

Welche Form erhalten dieſe Formeln in dem angeführten Falle, und wie laſſen ſich näherungsweiſe die Werthe der Integralien beſtimmen?

2. Iſt acb, Fig. 102., der einen normalen Kegel erzeugende rechtwinklige Triangel, und man ſetzt ax=x, xy=y, die Normale in y bis zur Oberfläche des Kegels =z, und man bezeichnet die auf der Oberfläche des Kegels normal über x und y liegenden Punkte mit x′ und y′, ſo daß nun yy′=z und für xm=v auch xx′=v, ſo iſt die Fläche $xyy'x'=\frac{1}{2}\sqrt{(v^2-y^2)}+\frac{v^2}{2}\text{Arc sin}\frac{v}{v}=Y$ und das Differential des Körpers V, von welchem xyy′x′ ein normaler Querſchnitt iſt, wird ausgedrückt durch Ydx; nämlich es iſt

$$dV=\frac{ydx\sqrt{(v^2-y^2)}}{2}+\frac{v^2dx}{2}\text{Arc sin}\frac{y}{v}.$$

Für

Für ac=h und cb=R aber iſt

$$h : R = x : v, \text{ alſo } v = \frac{Rx}{h} = mx,$$

wenn zur Abkürzung $\frac{R}{h} = m$ geſetzt wird; alſo wird

$$dV = \frac{ydx\sqrt{(m^2x^2 - y^2)}}{2} + \frac{m^2x^2dx}{2} \text{ Arc sin } \frac{y}{mx}.$$

Iſt nun y=f(x) die Gleichung für die Projection des Durchſchnitts irgend eines Körpers mit dem Kegel, ſo drückt V den Inhalt des Theils aus, welchen beide Körper gemein haben. Hieraus laſſen ſich nun eben ſo, wie im vorigen §. bei dem Cylinder, die Formeln für den Inhalt des gemeinſchaftlichen Theils ableiten, wenn der Kegel von einem Prisma, einer Kugel, einem Cylinder oder von einem andern Kegel ꝛc. durchbrochen wird. In welchen Fällen iſt hier die erforderliche Integration ausführbar, und in welchen Fällen muß man Näherungswerthe zu ermitteln ſuchen?

3. Es iſt y=f(x) die gegebene Gleichung für die Projection einer geſchloſſenen Curve auf der Oberfläche des Kegels, wobei acb, Fig. 102., die Projectionsebene bildet: durch welche Formel wird der Inhalt der von dieſer Curve eingeſchloſſenen Fläche ausgedrückt, und wie hängt dieſe Formel mit der, §. 152., aufgeſtellten Regel zuſammen?

4. Iſt ganz allgemein acb, Fig. 102., der Durchſchnitt irgend eines Körpers, und werden die auf der Oberfläche deſſelben normal über x und y liegenden Punkte mit x′ und y′ bezeichnet, ſo iſt für xy=y und yy′=z, wenn die Abhängigkeit der Ordinate z von y durch die Gleichung gegeben iſt z=f(y), die Fläche xyy′x′=Y durch die Formel beſtimmt

$$Y = \int z dy = \int dy f(y)$$

und das Differential des Körpers V, von welchem xyy′x′ ein Normal-Querſchnitt iſt, wird für ax=x durch die Formel ausgedrückt

$$V = \int Y dx = \int dx [\int dy f(y)].$$

Wenn alſo y=φ(x) die Gleichung für die Projection einer Curve auf der Oberfläche des Körpers bedeutet, ſo läßt ſich mit Hülfe dieſer Formel der Theil berechnen, welchen der gegebene Körper mit einem andern gemein hat, von welchem

die Projection des Durchſchnitts gegeben iſt. Es ſei z. B. ac die Axe und acb der Durchſchnitt eines paraboliſchen Konoids, alſo amb eine Parabel, ſo iſt für xm = v

$$Y = xyy'x' = \frac{y\sqrt{(v^2-y^2)}}{2} + \frac{v^2}{2}\,\text{Arc sin}\,\frac{y}{v},$$

und weil für den Parameter = p, iſt $(xm)^2 = p(ax)$, alſo $v^2 = px$, ſo iſt

$$Y = \frac{y\sqrt{(px-y^2)}}{2} + \frac{px}{2}\,\text{Arc sin}\sqrt{\frac{y^2}{px}}$$

und es iſt daher die Formel für den Inhalt des Theils, welchen ein Paraboloid mit einem es durchbrechenden Körper gemein hat,

$$V = \int\frac{ydv\sqrt{(px-y^2)}}{2} + \int\frac{pxdx}{2}\,\text{Arc sin}\sqrt{\frac{y^2}{px}}.$$

In welchen Fällen iſt hier die Integration ausführbar, und welche Formeln erhält man aus der allgemeinen für das elyptiſche Sphäroid ꝛc.?

5. Wie findet man die allgemeine Formel für den Inhalt einer Figur auf der Oberfläche eines Körpers, wenn die Projection derſelben gegeben iſt?

6. Wenn die Gleichungen für zwei verſchiedene Flächen, indem man ſie auf dieſelben Coordinaten bezieht, mit einander verbunden werden, ſo laſſen ſich hieraus die für die verſchiedenen Projectionen ihres gemeinſchaftlichen Durchſchnitts ableiten, wie §. 150. gezeigt worden iſt. Es iſt aber möglich, daß zwei ſolche Flächen gar nicht zuſammen treffen, oder ſich blos in einem Punkte oder in einer geraden Linie berühren. Wie läßt ſich dieſes unmittelbar aus den abgeleiteten Formeln erkennen?

7. Die Coordinatenaxen einer ebenen Curve ſchneiden ſich unter einem rechten Winkel, und es wird die Curve durch die Axen in vier Theile getheilt, von welchen der erſte einem poſitiven x und y, alſo einem +x und +y entſpricht, der zweite gehört zu einem +x und −y, der dritte zu −x und +y, und der vierte gehört zu einem −x und −y; es hängt nun von der Natur der Gleichung für die Curve ab, ob jeder der vier Theile reell iſt, ob einige derſelben gleich ſind ꝛc. Die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ für eine Fläche be-

zieht ſich auf drei Coordinatenaxen, die ſenkrecht auf einander ſtehen, und als die in dem Mittelpunkte eines Würfels ſich ſchneidenden drei Linien angeſehen werden können, von welchen jede die Mittelpunkte zweier, einander gegenüberliegender Parallelogramme verbindet, und es wird daher die krumme Fläche durch dieſe Axen in acht Theile getheilt, die man mit den Zahlen 1 bis 8 bezeichnen kann, ſo daß jeder Theil von einem anderen ſich wenigſtens dadurch unterſcheidet, daß eine der Coordinaten ein anderes Zeichen hat. Wird nun verſtanden

unter	1	der	Theil,	in	welchem	iſt $+x, +y, +z$
„	2	„	„	„	„	„ $+x, +y, -z$
„	3	„	„	„	„	„ $+x, -y, +z$
„	4	„	„	„	„	„ $-x, +y, +z$
„	5	„	„	„	„	„ $+x, -y, -z$
„	6	„	„	„	„	„ $-x, +y, -z$
„	7	„	„	„	„	„ $-x, -y, +z$
„	8	„	„	„	„	„ $-x, -y, -z$,

ſo läßt ſich nun leicht das Verhalten der einzelnen Theile der Fläche zu einander ausdrücken. Haben nämlich zwei Theile zwei Coordinaten gemein und eine verſchieden, ſo werden ſie verbundene Theile genannt; haben ſie eine gemein und zwei verſchieden, ſo nennt man ſie getrennt, und wenn ſie keine gemein haben, ſo werden ſie entgegengeſetzt genannt; es iſt alſo leicht einzuſehen, daß zu jedem Theile drei verbundene, eben ſo viel getrennte und ein entgegengeſetzter Theil gehören. Die Abhängigkeit der ſämmtlichen Theile von einander wird nun durch folgende Tabelle ausgedrückt:

Mit	ſind verbunden,	getrennt,	entgegengeſetzt.
1	2, 3, 4	5, 6, 7	8
2	1, 5, 6	3, 4, 8	7
3	5, 1, 7	2, 8, 4	6
4	6, 7, 1	8, 2, 3	5
5	3, 2, 8	1, 7, 6	4
6	4, 8, 2	7, 1, 5	3
7	8, 4, 3	6, 5, 1	2
8	7, 6, 5	4, 3, 2	1

Es läßt ſich nun leicht beſtimmen, unter welchen Bedingungen einige der acht verſchiedenen Theile einer Fläche übereinſtimmen, alſo gleich und ähnlich ſind. Iſt nämlich die Gleichung für die Fläche von einer ſolchen Art, daß nur gerade Potenzen von x vorkommen, ſo ſtimmen überein die Theile

1 u. 4, 2 u. 6, 3 u. 7, 5 u. 8;

enthält die Gleichung blos gerade Potenzen von y, ſo ſtimmen überein die Theile

1 u. 3, 2 u. 5, 4 u. 7, 6 u. 8;

wenn aber blos gerade Potenzen von z vorkommen, ſo ſind übereinſtimmend die Theile

1 u. 2, 3 u. 5, 4 u. 6, 7 u. 8.

Hier laſſen ſich nun leicht folgende Fragen beantworten:

1) Welche Theile der Fläche ſtimmen überein, wenn alle Glieder der Gleichung eine gerade oder alle eine ungerade Dimenſion haben

a) in Beziehung auf x u. y,
b) = = = x u. z,
c) = = = y u. z,
d) = = = x, y, z?

2) Welche Theile der Fläche ſtimmen überein, wenn in der Gleichung nur gerade Potenzen vorkommen

a) von x und von y jede für ſich
b) = x = = z = = =
c) = y = = z = = =?

3) Welche Theile der Fläche ſtimmen alsdann überein, wenn in jedem Gliede der Gleichung die eine Coordinate x, y oder z eine gerade Dimenſion hat, während die übrigen beiden zuſammen genommen überall eine gerade oder überall eine ungerade Dimenſion haben?

Anmerkung. Eine vollſtändige Entwickelung aller hier angeführten Fälle findet man in dem erſten Kapitel des Anhanges zu dem zweiten Buche von Euler's Einleitung in die Analyſis des Unendlichen.

Dritte Abtheilung.

Einige Anwendungen der Stereometrie.

Erſter Abſchnitt.

Von den Körpermaaßen und von den verſchiedenen praktiſchen Methoden, den Inhalt der Körper zu ermitteln.

§. 157.

Von den Körpermaaßen überhaupt.

Ein unmittelbares Meſſen des Inhalts eines Körpers findet nur bei dem Gebrauche der Hohlmaaße ſtatt, in allen andern Fällen aber werden bloße Längen gemeſſen und der Kubikinhalt hieraus berechnet. Ueberhaupt dient der Würfel, alſo der Kubikfuß oder der Kubikzoll als Einheit bei allen Körpermeſſungen, obgleich derſelbe unmittelbar nie oder wenigſtens nur ſehr ſelten angewendet werden kann. Ueberall, wo der Inhalt eines Körpers durch Rechnung ermittelt wird, finden Längenmeſſungen ſtatt, und da die hierbei benutzte Länge, z. B. der Fuß oder der Zoll von verſchiedener Größe ſein kann, ſo folgt, daß das Reſultat nur erſt alsdann einen vollkommen beſtimmten Werth ausdrückt, wenn die richtige Länge des gebrauchten Maaßes genau bekannt iſt, und es muß hierbei zuletzt noch immer eine Reduction ſtatt finden, wenn der Inhalt durch ein anderes Maaß ausgedrückt werden ſoll, als das iſt, deſſen man ſich bei der Meſſung bedient hat. Auch die zu unmittelbaren Meſſungen gebräuchlichen Hohlmaaße ſind von verſchiedenen Arten, von verſchiedener Größe, und es iſt daher für dieſelben eine Angabe ihres richtigen Inhalts er-

forderlich, wenn die Reſultate der, mit verſchiedenen ſolchen Maaßen gemachten Meſſungen miteinander ſollen verglichen werden können, wobei wieder der Würfel als Einheit benutzt wird. Faſt allgemein iſt die hierbei gebräuchliche Einheit der franzöſiſche Kubikzoll, und es wird alſo die Größe der Hohlmaaße dadurch beſtimmt, daß man angiebt, wie viel franzöſiſche Kubikzoll dieſelben enthalten.

Jedes Land hat ſein eigenes Maaß- und Gewichtsſyſtem, und hierdurch iſt geſetzlich beſtimmt, wie die verſchiedenen Maaße unter ſich und insbeſondere von der Normal-Längeneinheit abhängen: iſt alſo das Verhältniß der Längeneinheiten zweier Maaßſyſteme unmittelbar oder mittelbar gegeben, ſo iſt dadurch auch das Verhältniß aller verſchiedenen Maaße beider Syſteme zueinander beſtimmt, und es kann durch Rechnung das eine auf das andere zurückgeführt werden.

Bei dem neuen preußiſchen Maaßſyſtem bildet der rheinländiſche Fuß von 139,13 franzöſiſchen Linien die Normal-Längeneinheit, und es wird derſelbe in zwölf preußiſche Zoll getheilt. Die Größe der Hohlmaaße iſt nun auf folgende Art beſtimmt: Das preußiſche Quart, als das Maaß für flüſſige Dinge, und wovon 60 auf einen Eimer gehen, hält 64 preußiſche Kubikzoll; 3 Quart betragen eine Metze, von welchen 16 den Scheffel, als das gebräuchliche Fruchtmaaß, bilden, und es ſind daher 9 Scheffel = 16 preuß. Kubikfuß. Uebrigens iſt ſelbſt das Gewicht von der Größe der Längeneinheit abhängig, indem das preußiſche Pfund den 66ſten Theil von dem Gewichte eines preußiſchen Kubikfußes deſtillirten Waſſers beträgt.

In Frankreich iſt bekanntlich der Mètre von 443,2959 franzöſiſchen Linien die Normal-Längeneinheit, und es wird derſelbe in 10 Decimètre getheilt. Die Einheit für die Hohlmaaße bildet das Litre, welches der Kubikdecimètre iſt; hierdurch iſt das Verhältniß der preußiſchen Maaße zu den franzöſiſchen vollkommen beſtimmt: ſo wie überhaupt jedes Maaß mit einem anderen verglichen werden kann, wenn man weiß, wie daſſelbe von der zum Grunde liegenden Längeneinheit abhängt, und die Größe dieſer Längeneinheit in franzöſiſchen Linien gegeben iſt. Für Hohlmaaße wird die Verglei-

chung dadurch einfacher, wenn unmittelbar gegeben iſt, wieviel franzöſiſche oder preußiſche Kubikzoll dieſelben enthalten.

Dieſe Angaben findet man in vielen Werken; doch darf man ſich nicht in allen Fällen auf die in ſolchen Tabellen enthaltenen Zahlen verlaſſen, wie aus der Vergleichung verſchiedener Tabellen mit einander ſich unmittelbar ergiebt, indem hier für ein und daſſelbe Maaß öfters bedeutend von einander abweichende Größenbeſtimmungen vorgefunden werden. Wo es auf die möglichſt größte Genauigkeit ankommt, muß man die über die Größe der Maaße vorhandenen geſetzlichen Beſtimmungen zum Grunde legen, indem nur dieſe als die richtigen angeſehen werden können, und auch in dem Falle als die wirklich richtigen angenommen werden müſſen, wenn ſie mit der wahren Größe nicht genau übereinſtimmend gefunden werden. Kommt es aber blos darauf an, ein Näherungsverhältniß kennen zu lernen, ſo ſind die in den Maaß- und Gewichtstabellen enthaltenen Zahlen ausreichend genau. Eine vollſtändige Tabelle über die Größe der verſchiedenen, in Deutſchland vorkommenden Maaße und Gewichte hier mitzutheilen, würde von wenigem Nutzen ſein, da einestheils dieſe Angaben bereits vielfach vorgefunden werden, und anderntheils die Zuverläſſigkeit dieſer Angaben in allen ihren Theilen nicht verbürgt werden kann. Es werden daher hier nur folgende wenige Größenbeſtimmungen mitgetheilt, die als vollkommen genau angeſehen werden können, da ſie aus officiellen Quellen entlehnt ſind.

Längenmaaße.

1 preußiſcher	Fuß	= 139,13	franz. Linien	hält	12	Zoll
1 heſſendarmſt.	„	= 110,824	„	„	10	„
1 baierſcher	„	= 129,38	„	„	12	„
1 würtembergiſch.	„	= 127	„	„	10	„
1 rheinbaierſcher	„	= 147,765	„	„	12	„
(dieſer Fuß iſt der dritte Theil des franzöſiſchen Mètre)						
1 öſtreichiſcher	Fuß	= 140,13	franz. Linien	hält	12	Zoll
1 pariſer	„	= 144	„	„	12	„
1 franzöſ. Mètre		= 443,2959	frz. L.	hält	10	Decimètre.

1 preußiſche Elle	= 295,65125 frz. L.	hält $25\frac{1}{2}$ preuß. Zoll,
1 heſſiſche „	= 265,9776 „	„ „ 6 frz. Decimètre
1 baierſche „	= 369,27 „	„
1 würtemberg. „	= 272,288 „	„ „ 2,144 würtemb. F.
1 öſtreichiſche „	= 345,42 „	„ „ 2,465 öſtr. Fuß.
1 franzöſ. Aune	= 526,8	

Körpermaaße.

1 preußiſche Klafter	= 108 preußiſche	Kubikfuß
1 baierſche „	= 126 baierſche	„
1 würtemb. „	= 144 würtemb.	„
1 heſſiſcher Stecken	= 100 heſſiſche	„
1 öſtreich. Klafter	= 216 öſtreich.	„
1 franzöſiſcher Stère	= 1	Kubikmètre
1 „ Corde	= 112	pariſer Fuß.

---

1 preußiſcher Eimer hält 60 Quart à 64 preußiſche Kubikzoll = 57,7238 franzöſiſche Kubikzoll.

1 heſſiſcher Ohm hält 8 Maaß à 2 franzöſiſche Litre = 100,8248 franzöſiſche Kubikzoll.

1 baierſcher Eimer hält 64 Maaß à 43 baierſche Decimal-Kubikzoll = 53,8922 franzöſ. Kubiklinien.

1 würtemberger Eimer hält 160 Maaß à $78\frac{1}{8}$ würtemb. Kubikzoll = 92,6099 franzöſiſche Kubikzoll.

1 oeſtreichiſcher Eimer hält 160 Seidel und iſt = 1,792 öſtreich. Kubikfuß = 2852 franzöſiſche Kubikzoll.

1 franzöſiſches Feuillete hält 144 Pintes à 48 franz. Kubikzoll.

1 „ Hectolitre hält 100 Litres oder 100 Kubikcentimètre à 50,4125 franz. Kubikzoll.

---

1 preuß. Scheffel hält 16 Metzen à $\frac{1}{9}$ preuß. Kubikfuß, und es iſt daher der Scheffel = 2770,742 franz. Kubikzoll.

1 heſſiſcher Malter hält 4 Simmer à 16 Geſcheid oder Maaß, und es iſt daher der Simmer = 1613,1973 frz. Kubikzoll.

1 baierſcher Scheffel hält 6 Metzen à $34\frac{2}{3}$ baierſche Maaß, und es iſt daher die Metze = 1886,264 frz. Kubikzoll.

1 würtemberger Scheffel = 8 Simri à $942\frac{1}{8}$ würtemberger oder 1116,8014 franz. Kubikzoll.

1 öſtreichiſche Muth = 30 Metzen à 1,9471 öſtreichiſche Kubikfuß oder 3100 franz. Kubikzoll.
1 franzöſiſches Muid = 144 Boisseaux à 640 frz. Kubikzoll.

Gewichte.

1 preußiſcher	Ctr.	hält	110 ℔	à 467,711	franz.	Grammes
1 heſſiſcher	=	=	100 =	= 500	=	=
1 baierſcher	=	=	100 =	= 560	=	=
1 würtemb.	=	=	104 =	= 467,728	=	=
1 öſtreichiſcher	=	=	100 =	= 561,407	=	=

1 franzöſ. Quintal hält 100 Kilogramme à 1000 Grammes.

§. 158.

Reduction der Körpermaaße und Ermittelung der Näherungsverhältniſſe für dieſelben.

Iſt die Größe zweier verſchiedenen Körpermaaße durch ein gemeinſchaftliches drittes ausgedrückt, ſo iſt dadurch auch das Verhältniß beider zu einander gegeben, und es läßt ſich alsdann auch ganz einfach das eine auf das andere zurückführen. Da z. B. der preußiſche Scheffel 2770,742 und der heſſiſche Simmer 1613,1973 franzöſiſche Kubikzoll hält, ſo folgt hieraus unmittelbar, daß

1613,1973 preuß. Scheffel = 2770,742 heſſiſche Simmer.

Kennt man aber von zwei Körpermaaßen nur das Verhältniß der ihnen zum Grunde liegenden Längenmaaße, ſo iſt die Reduction weitläufiger, und man darf hierbei nicht außer Acht laſſen, daß ähnliche Körper wie die dritten Potenzen ähnlich liegender Seiten, und daher auch Kubikeinheiten wie die dritten Potenzen ihrer Längen ſich verhalten. So iſt z. B. der öſtreichiſche Eimer = 1,792 öſtreichiſche Kubikfuß, und die Länge dieſes Fußes beträgt 140,13 franzöſiſche Linien; das preußiſche Quart hält 64 preußiſche Kubikzoll, während in Preußen der Fuß von 139,13 franz. Linien in 12 Zoll getheilt wird. Um nun zu ermitteln, wie viel preußiſche Quart der öſtreichiſche Eimer enthält, muß folgender Anſatz gebildet werden:

x preuß. Quart	=	1	öſtr.	Eimer,
1	=	1,792	=	Kubikfuß,
1	=	$140{,}13^3$	frz.	Kubiklinien,
$139{,}13^3$	=	1	preuß.	Kubikfuß,
1	=	12^3	=	Kubikzoll,
64	=	1	=	Quart,

daher iſt 1 öſtr. Eimer $= \frac{1{,}792 \cdot 140{,}13^3 \cdot 12^3}{139{,}13^3 \cdot 64}$ pr. Quart;
nämlich es iſt 1 öſtr. Eimer = 49,435 preuß. Quart.

Gewöhnlich ermittelt man das Verhältniß zweier Körpermaaße in der Abſicht, um bei verſchiedenen Gelegenheiten davon Gebrauch machen zu können, und es iſt daher auch nöthig, dieſes Verhältniß auf die möglichſt einfachſte Art auszudrücken, was nun entweder dadurch geſchehen kann, daß man angiebt, wieviel die Einheit des einen Maaßes, durch das andere ausgedrückt, beträgt, und dieſe Zahl auf eine hinlängliche Anzahl von Decimalſtellen berechnet; alſo z. B.

1 öſtreichiſcher Eimer = 49,435 preuß. Quart

und umgekehrt

1 preußiſcher Eimer = 194,194 öſtreichiſche Seidel,

wo nun in jedem beſondern Falle die der erforderlichen Genauigkeit entſprechende Anzahl von Decimalſtellen benutzt wird: oder man ſucht aus dem durch Rechnung gefundenen Verhältniſſe, welches gewöhnlich zu große Zahlen enthält, als daß man es unmittelbar benutzen könnte, bequeme Näherungsverhältniſſe mittelſt eines Kettenbruches, und benutzt nun in jedem beſondern Falle dasjenige, von welchem ein hinlänglich genaues Reſultat für den beſondern Zweck erhalten wird.

Da z. B.

1613,1973 preuß. Scheffel = 2770,742 heſſiſche Simmer

oder

16131973 = = = 27707420 = = ,

ſo müſſen nun dieſe Zahlen durch einander getheilt werden, als wenn ihr gemeinſchaftlicher Factor aufgefunden werden ſollte, wodurch nach und nach die Quotienten erhalten werden

1, 1, 2, 1, 1, 5, 1, 2, 5, 3, 1, 2, 3, 2, 2, 52, 2,

und dieſe führen zu den Partialbrüchen

$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{12}{7}, \frac{67}{39}, \frac{79}{46}, \frac{225}{131}$ ꝛc.;

es ſind daher ungefähr

	7	preuß. Scheffel	=	12	heſſiſche Simmer	
oder genauer	39	„	„	=	67	„	„
	46	„	„	=	79	„	„
u. ziemlich genau	131	„	„	=	225	„	„ ꝛc.

Oefters kommt es vor, daß Decimalmaaß auf Duodecimalmaaß oder umgekehrt reducirt werden muß; auch für dieſen Fall laſſen ſich leicht die entſprechenden Verhältnißzahlen auffinden. So wird z. B. bei dem Gebrauche des Duodecimalmaaßes in Preußen, die Ruthe, welche die unveränderliche Einheit bildet, in 12 Fuß à 12 Zoll getheilt, und bei dem Gebrauche des Decimalmaaßes theilt man dieſelbe Ruthe in 10 Fuß à 10 Zoll. Daher hält die Kubikruthe 12^3 Kubikfuß $= 12^3 \cdot 12^3 = 12^6$ Kubikzoll Duodecimalmaaß, und es iſt die Kubikruthe $= 10^3$ Kubikfuß $= 10^3 \cdot 10^3 = 10^6$ Kubikzoll Decimalmaaß. Folglich ſind

6^3 Duodecimal-Kubikfuß = 5^3 Decimal-Kubikfuß,

alſo

216 „ „ = 125 „ „

und

6^6 „ Kubikzoll = 5^6 „ Kubikzoll,

oder

46656 „ „ = 15625 „ „

alſo Näherungsweiſe

74 „ „ = 24 „ „ .

Es iſt alſo der Decimal-Kubikzoll beinahe dreimal ſo groß, als der Duodecimal-Kubikzoll.

§. 159.

Verſchiedene Gattungen der Körper.

Um bei jedem vorkommenden Körper den Kubikinhalt deſſelben auf die möglichſt einfachſte Art beſtimmen zu können, muß man die Körper überhaupt ihrer Form und ihrem Zuſtande nach in verſchiedene Gattungen unterſcheiden, da für verſchiedene Formen auch verſchiedene einfache Regeln zum Zwecke führen, die nur in beſtimmten Fällen ſich anwenden laſſen. Zunächſt müſſen zu dieſer Abſicht die Körper unterſchieden werden in maſſive und in hohle, da bei den letzteren

ein Verfahren anwendbar iſt, welches bei den erſteren nur in ſehr wenigen Fällen benutzt werden kann. Die maſſiven Körper ſind in ſtarre von beſtimmter Geſtalt, und in ſolche zu unterſcheiden, die ohne bedeutende Kraftanwendung und ohne dadurch ihren Zuſtand zu verändern, jede beliebige Form annehmen, oder ſich in dieſelbe fügen. Zu den letzteren gehören die flüſſigen Körper, ſo wie diejenigen, welche aus einzelnen ganz kleinen Theilen beſtehen. Die ſtarren Körper haben entweder eine einfache regelmäßige Form, oder ſie ſind unregelmäßig. Unter einer regelmäßigen Form wird hier überhaupt eine ſolche verſtanden, für welche unmittelbar die in den beiden vorhergehenden Abtheilungen gegebenen Regeln bei der Berechnung des Inhalts angewendet werden können. Es gehören alſo hierzu die Prismen, die Pyramiden, die Kugeln ꝛc. Bei den unregelmäßigen ſtarren Körpern endlich iſt noch zu unterſcheiden, ob dieſelben von bedeutender Größe ſind oder nicht ꝛc.

§. 160.

Von den Hohlmaaßen.

Es ſind zwei verſchiedene Gattungen von Hohlmaaßen im Gebrauch, die man in Flüſſigkeitsmaaße und Getraidemaaße gewöhnlich unterſcheidet; die Größe und alſo auch der Kubikinhalt dieſer Maaße iſt beſtimmt, und der Gebrauch derſelben iſt ſehr bequem, da mittelſt dieſer Maaße der Kubikinhalt einer gegebenen Menge eines Körpers unmittelbar ohne alle Rechnung gefunden werden kann, und man auch umgekehrt jede beliebige zum Voraus beſtimmte Quantität abzumeſſen im Stande iſt. Die mit Hülfe der Hohlmaaße gefundenen Reſultate ſind aber nur in dem Falle zuverläſſig, wenn der mit denſelben zu meſſende Körper eine ſolche Beſchaffenheit hat, daß er nicht nur mit der größten Leichtigkeit die Form des Maaßes annimmt, ſondern auch durch einen mechaniſchen Druck ſeine Dichtigkeit nicht ändert, womit natürlich auch immer eine Raumverminderung verbunden ſein würde. Man wendet daher die Hohlmaaße vorzugsweiſe nur bei flüſſigen Körpern mit Sicherheit an, während die Fruchtmaaße nur innerhalb gewiſſer Gränzen richtige Reſultate geben, da,

wie leicht einzuſehen iſt, die Quantität der Körner, welche das Gemäß füllen, davon abhängt, ob ſie dichter oder lockerer eingeſchüttet werden. Aus dieſem Grunde iſt es bei Beſtimmung der Maſſe eines Körpers, der mit einem Hohlmaaße gemeſſen werden könnte, immer zuverläſſiger, denſelben zu wiegen als zu meſſen.

Das Eichen der Hohlmaaße, nämlich das Reguliren derſelben, ſo daß ſie den richtigen, geſetzlich beſtimmten Kubikinhalt faſſen, iſt keinesweges ſo einfach, als es dem erſten Anſcheine nach zu ſein ſcheint. Da dieſelben gewöhnlich die Form von hohlen Cylindern haben, ſo müßte ſich eigentlich der Inhalt mit Hülfe der Formel $k = hR^2\pi$ berechnen laſſen, und es würde hiernach zu der Ermittelung ihres Inhalts nichts weiter nöthig ſein, als daß man mit einem richtigen Maaßſtabe den Durchmeſſer ihrer Grundfläche und die Tiefe derſelben beſtimmte; allein es iſt hierbei zu berückſichtigen, daß die Form eines ſolchen Gefäßes faſt nie vollkommen ein mathematiſcher Cylinder iſt, daß nur ſelten der Boden eine richtige Ebene bildet, und daß, abgeſehen hiervon, das Meſſen der Dimenſionen an und für ſich ſchwierig iſt, da hierbei jedenfalls ein mit einem Nonius verſehener Maaßſtab angewendet werden müßte. Aus dieſem Grunde geſchieht das Eichen der Hohlmaaße gewöhnlich durch die Vergleichung derſelben mit einem Normalmaaße, welches von Meſſing oder Kupfer mit aller möglichen Sorgfalt vollkommen cylindriſch mit vorgeſchriebenen Dimenſionen ſo gearbeitet iſt, daß es den geſetzlichen Inhalt faßt.

Um nun die Richtigkeit der Flüſſigkeitsmaaße zu prüfen, bedient man ſich des Waſſers, indem man unterſucht, ob die Menge Waſſer, welche in das Normalmaaß geht, auch das zu prüfende Maaß vollkommen ausfüllt. Bei dieſem an und für ſich einfachen Verfahren iſt doch aus dem Grunde viele Vorſicht nöthig, weil es bereits einige Uebung erfordert, die Flüſſigkeit aus einem Maaße in das andere zu ſchütten, ohne daß etwas von der Flüſſigkeit verlohren geht, und außerdem iſt, wegen der Adhäſion des Waſſers gegen das Gefäß, die vollkommene Ausfüllung deſſelben, ſo daß die Oberfläche mit dem Rande genau eine Ebene bildet, nur bei vieler Vorſicht zu bewerkſtelligen.

Das Eichen der Fruchtmaaße iſt ſchwieriger noch als das der Flüſſigkeitsmaaße, weil hier, wegen des Stoffes, aus welchem die Fruchtmaaße gewöhnlich gearbeitet ſind, und wegen der Größe derſelben, das Waſſer nicht angewendet werden kann. Man bedient ſich hierzu ſolcher Körner, die vermöge ihrer Form und Schwere ſo wenig als möglich Zwiſchenräume laſſen, wenn ſie übereinander geſchüttet werden. Der Zweck kann daher weder mit Korn noch mit Waitzen erreicht werden, weil ſie zu leicht ſind, ſondern man bedient ſich ſtatt deſſen gewöhnlich der Hirſe zur Vergleichung eines Fruchtmaaßes mit dem gegebenen Normalmaaße, und braucht bei dem Einſchütten derſelben die Vorſicht, es durch einen Trichter laufen zu laſſen, der erſt, nachdem die erforderliche Quantität in demſelben aufgenommen iſt, unten geöffnet wird; und dennoch darf während der Meſſung auch nicht die geringſte Erſchütterung ſtatt finden, wenn das Reſultat nicht unzuverläſſig werden ſoll. Wie groß die hierbei anzuwendende Vorſicht ſein muß, davon kann man ſich leicht überzeugen, wenn man ein und daſſelbe Gemäß mehrmals prüft; man findet hier z. B. bei der Prüfung eines Scheffels gewiß eine Differenz von einigen Kubikzollen.

§. 161.

Berechnung des Inhalts hohler Körper.

Hohle Räume können natürlich nach denſelben Regeln, wie maſſive Körper, berechnet werden, und es werden dieſe Regeln auch angewendet, wenn ihre beſondere Form nicht ein einfacheres Verfahren zuläßt. So wird von den ſtereometriſchen Regeln Gebrauch gemacht, wenn der Inhalt von Gebäuden oder einzelnen Räumen derſelben, wenn der Inhalt von Kellern oder Gewölben überhaupt ꝛc. ermittelt werden ſoll. Ein einfacheres Verfahren aber iſt bei den häufig vorkommenden Fällen anwendbar, wenn es darauf ankommt, den Inhalt ſolcher Gemäße zu beſtimmen, die in den verſchiedenen Gewerben vielfach gebraucht werden, wie dieſes z. B. der Fall iſt bei der Berechnung der Eimer, Bottiche, Wannen und Fäſſer ꝛc. Das nächſte, bei dieſen Gefäßen ſich darbietende Mittel, um ihren Inhalt zu meſſen, beſteht darin, daß man ſie mit

Waſſer anfüllt, und die Menge dieſes Waſſers mit einem Gefäße von bekanntem Inhalte mißt. Findet man z. B. auf dieſe Weiſe den Inhalt = 780 preußiſche Quart, ſo iſt, wenn der Inhalt durch preußiſche Kubikfuß ausgedrückt werden ſoll, weil das Quart 64 Kubikzoll hält und der Fuß = $12^3 = 1728$ Kubikzoll, der Inhalt dieſes Gefäßes = $\frac{780 \times 64}{1728} = 28\frac{8}{9}$ Kubikfuß. Indeſſen iſt es nur ſelten der Fall, daß man den Inhalt eines ſolchen Gefäßes in Kubikfuß wiſſen will, ſondern man will gewöhnlich ermitteln, wie viel Quart oder Eimer ꝛc. daſſelbe faßt. Auch iſt bei der Ermittelung des Inhalts eines ſolchen Gefäßes mit Hülfe des Waſſers nicht eine ſo große Vorſicht nöthig, als bei dem Eichen der Gefäße, weil es dort, wo die Richtigkeit eines Gefäßes anerkannt werden ſoll, nach welchem täglich gekauft und verkauft wird, ſelbſt auf den Decimaltheil eines Kubikzolles ankommt: eine Genauigkeit, die bei der Beſtimmung des Inhalts anderer Gefäße nie gefordert wird. Aus dieſem Grunde und beſonders auch, weil ſie gewöhnlich ſchon ziemlich groß ſind, wird der Inhalt derſelben auch öfters durch Rechnung beſtimmt, und der Kubikinhalt auf das Maaß reducirt, durch welches als Einheit der Inhalt ausgedrückt werden ſoll.

Die meiſten Gefäße haben entweder eine cylindriſche Form, oder es laſſen ſich dieſelben auf die Form eines Cylinders zurückführen, und alſo nach denſelben Regeln wie die Cylinder berechnen; daher hat man auch verſchiedene einfache Methoden zur Ermittelung des Inhalts eines Cylinders angegeben, und es verdienen die vorzüglichſten hiervon um ſo mehr angeführt zu werden, da es durch dieſelben auch demjenigen, der wenig oder gar nichts von der Stereometrie verſteht, möglich wird, den Inhalt der am häufigſten vorkommenden Gefäße zu beſtimmen.

Eigentlich iſt die Formel für den Kubikinhalt eines Cylinders = $hR^2\pi = hR^2 \times 3{,}1416$; man muß alſo die Höhe mit dem Quadrate des Radius der Grundfläche und mit der Zahl = 3,1416 multipliciren. Bedient man ſich nun hierbei eines Zollſtockes, und weiß man, wie viel Kubikzoll das Gemäß hält, durch welches der Inhalt ausgedrückt werden ſoll, ſo

braucht man das Produkt nur noch durch dieſe Zahl zu theilen, um den geſuchten Inhalt zu erhalten. Es iſt alſo, wenn der Inhalt des Gemäßes, welches die Einheit bilden ſoll, $= m$ iſt, der Inhalt ſelbſt $= hR^2 \times \frac{3{,}1416}{m}$, wo $\frac{3{,}1416}{m}$ ein beſtändiger Factor iſt, der immer wieder vorkommt, und man kann dieſen daher ein für allemal auf eine einfache Form zurückführen. Bedient man ſich z. B. bei dem Meſſen des preußiſchen, in 12 Zoll getheilten Fußes, und ſoll der Inhalt durch preußiſche Quart ausgedrückt werden, von welchen jedes, wie bekannt, 64 Kubikzoll hält, ſo wird der beſtändige Factor $= \frac{3{,}1416}{64} = \frac{0{,}3927}{8} = 0{,}0490875$, wofür in den meiſten Fällen 0,049 geſetzt werden kann, und weil

$$0{,}049 = 0{,}05 - 0{,}001 = \left(1 - \frac{1}{50}\right) \cdot 0{,}05 = \frac{1}{20}\left(1 - \frac{1}{50}\right),$$

ſo wird der Inhalt eines cylindriſchen Gefäßes in preußiſchen Quart ausgedrückt durch die Formel

$$= \frac{hR^2}{20}\left(1 - \frac{1}{50}\right);$$

man braucht alſo nur von dem 20ſten Theile des Produktes aus der Höhe und dem Quadrate des Radius $\frac{1}{50}$ abzuziehen.

Iſt z. B. $h = 28{,}4$ und $R = 6{,}5$, ſo iſt

$$\begin{aligned} hR^2 &= 1199{,}9 \\ : 20 &= 59{,}995 \\ : 50 &\quad 1{,}1999 \\ \text{Inhalt} &= 58{,}7951 = 58\tfrac{3}{4} \text{ Quart circa.} \end{aligned}$$

Einem gewandten Rechner wird es nicht ſchwer werden, auch in jedem andern Falle dem beſtändigen Factor $\frac{3{,}1416}{m}$ eine für die Rechnung bequeme Form zu geben.

Man ſuchte ferner die Formel $hR^2\pi$ noch in der Art abzuändern, daß die Berechnung des Quadrats von R bei dem Gebrauch derſelben nicht nöthig wäre, und conſtruirte zu dieſer Abſicht einen ſogenannten quadratiſchen Maaßſtab, auf welchem, indem man die Einheit des gemeinen Maaßſtabes beibehielt, die Werthe der Quadratwurzeln der natürlichen Zahlen-

reihe

reihe angegeben ſind, ſo daß bei $\sqrt{2}$ die Zahl 2, bei $\sqrt{3}$ die Zahl 3, und ganz allgemein bei $\sqrt{n}$ die Zahl n verzeichnet ſteht. Wird nun mit dieſem Maaßſtabe der Radius der Grundfläche eines Cylinders gemeſſen, und ſteht auf dem Maaßſtabe bei der abgenommenen Länge deſſelben die Zahl n, ſo iſt die eigentliche Länge von $R = \sqrt{n}$, und daher iſt $R^2 = n$. Der quadratiſche Maaßſtab giebt alſo unmittelbar den Werth von R^2, und es iſt daher die Formel für den Inhalt des Cylinders nun einfacher $= hn\pi$, wo h mit dem gemeinen und n mit dem quadratiſchen Maaßſtabe gemeſſen wird.

Uebrigens verdient hierbei noch bemerkt zu werden, daß man bei der Anwendung nur ſelten den Radius mißt, ſondern ſtatt deſſen den Durchmeſſer D, und es iſt alſo, weil der Inhalt des Cylinders $= \frac{1}{4}hD^2\pi$, wenn die Länge von D auf dem quadratiſchen Maaßſtab $= n$ gefunden wird, der Inhalt $= hn \cdot \frac{\pi}{4} = hn \cdot 0{,}7854$, und liegt dem gemeinen, ſo wie dem quadratiſchen Maaßſtabe die Einheit zum Grunde, von welchen m Kubik-Einheiten das Maaß bilden, durch welches der Inhalt des Gefäßes ausgedrückt werden ſoll, ſo iſt der Inhalt in ſolchem Maaße =

$$K = hn \times \frac{0{,}7854}{m},$$

wo $\frac{0{,}7854}{m}$ einen beſtändigen Factor bildet. Es iſt nun nicht ſchwer, Tabellen anzufertigen, in welchen für jeden Werth von h und n die entſprechenden Werthe von K ſogleich angegeben ſind: man braucht zu dieſer Abſicht nur die verſchiedenen Werthe von h alle neben einander zu ſetzen, die von n auf der Seite unter einander, und die von K dahin, wo die von den dazu gehörigen h und n, indem von dem erſteren eine Vertikale und von dem letztern eine Horizontale gezogen wird, zuſammentreffen.

Die eigentlichen kubiſchen **Viſirſtäbe**, welche bei der Ermittelung des Inhaltes der verſchiedenen cylindriſchen Gefäße benutzt werden, haben noch eine bequemere Einrichtung; nur iſt ihr Gebrauch dadurch beſchränkt, daß mit Hülfe derſelben der Inhalt, durch eine beſtimmte Gattung von Gemäß

ausgedrückt, erhalten wird. So kann z. B. ein Viſirſtab, welcher ſo conſtruirt iſt, daß man durch ihn den Inhalt in preußiſchen Quart ausgedrückt erhält, nicht benutzt werden, wenn der Inhalt im öſtreichiſchen Maaß ꝛc. geſucht wird; deſſen ungeachtet ſind dieſe Viſirſtäbe ſehr bequem. Die Einrichtung derſelben beruhet auf folgenden Gründen:

Es halte die Maaßeinheit, durch welche der Inhalt des Gefäßes ausgedrückt werden ſoll, m Kubikzoll, ſo iſt, wenn ein Cylinder, deſſen Höhe dem Durchmeſſer ſeiner Grundfläche gleich iſt, eine ſolche Maaßeinheit halten ſoll, für die Höhe dieſes Cylinders $= x$,

$$x \cdot \frac{x^2}{4} \pi = m,$$

$$\text{alſo } x^3 \cdot 0{,}7854 = m,$$

$$\text{und daher } x = \sqrt[3]{\frac{m}{0{,}7854}}.$$

Nimmt man dieſen Werth von x als Einheit eines Maaßſtabes, und conſtruirt auf der andern Seite deſſelben einen quadratiſchen Maaßſtab, dem dieſelbe Einheit zum Grunde liegt, ſetzt alſo hier bei einer Länge $= x$ die Zahl 1, bei einer Länge $= x\sqrt{2}$ die Zahl 2, und allgemein bei einer Länge $= x\sqrt{n}$ die Zahl n, ſo kann man mit Hülfe eines ſolchen Maaßſtabes den Inhalt eines cylindriſchen Gefäßes ganz einfach dadurch berechnen, daß man die Höhe deſſelben mit dem einfachen und den Durchmeſſer der Grundfläche mit dem quadratiſchen Maaßſtabe mißt, und die beiden hierbei erhaltenen Zahlen mit einander multiplicirt. Denn findet man, mit dem einfachen Maaßſtabe gemeſſen, die Höhe des Cylinders $= h$, ſo iſt die wirkliche Höhe in Zoll ausgedrückt $= hx$, und wird die Länge des Durchmeſſers, mit dem quadratiſchen Maaßſtabe gemeſſen, $= d$ gefunden, ſo beträgt dieſe Länge $x\sqrt{d}$ Zoll; es iſt daher der Inhalt

$$K = \frac{HD^2\pi}{4} = \frac{hx \cdot x^2 d\pi}{4} = hdx^3 \cdot 0{,}7854;$$

nun iſt, vermöge der Conſtruction des Maaßſtabes, $x^3 \cdot 0{,}7854 = m$ Kubikzoll $= 1$ Maaß, alſo iſt der Inhalt des ganzen Gefäßes $= hd$ Maaß.

Zuſatz. Man hat außer den hier angeführten noch

mehrere verſchiedene andere Einrichtungen für die Viſirſtäbe, worüber das weſentlichſte im §. 18. der praktiſchen Stereometrie von Tobias Mayer vorkommt.

§. 162.

Berechnung des Inhalts verſchiedener Gefäße.

1. Die Bottiche, welche in den Brauereien gebraucht werden, haben durchgehends die Form von abgeſtumpften Kegeln, und unterſcheiden ſich von den kreisrunden Waſchtrögen nur dadurch, daß ſie oben enger als unten ſind, während die Tröge oben weiter ſind als unten.

Die Ermittelung des Kubikinhalts aller Gefäße dieſer Gattung iſt daher, wenn ſie eine kreisrunde Form haben, nicht ſchwierig; es wird derſelbe ausgedrückt durch

$$K = \left(\frac{R^2 + Rr + r^2}{3}\right) h\pi,$$

oder, weil es immer leichter iſt, die Durchmeſſer D und d, als die Radien R und r der Grundfläche zu meſſen,

$$K = h(D^2 + Dd + d^2) \cdot \frac{\pi}{12} = h(D^2 + Dd + d^2) \times 0{,}2618,$$

und der Inhalt in Maaßen ausgedrückt à m Kubikzoll, wenn h, D und d mit einem Zollſtabe gemeſſen werden, iſt

$$K = \frac{0{,}2618}{m} \times h\,(D^2 + Dd + d^2)$$

$$= \frac{0{,}2618}{m} \times h\,[(D + d)^2 - Dd].$$

Die allgemeine Formel für den abgeſtumpften Kegel

$$K = \left(\frac{R^2 + Rr + r^2}{3}\right) h\pi$$

läßt ſich auch noch auf eine bequemere Form bringen, nämlich es iſt

$$\frac{R^2 + Rr + r^2}{3} = \left(\frac{R + r}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{R - r}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{D + d}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{D - d}{4}\right)^2,$$

und daher auch

$$K = \left[\left(\frac{D+d}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{D-d}{4}\right)^2\right] h\pi,$$

nämlich es iſt

$$K = h\left(\frac{D+d}{4}\right)^2 \pi + \frac{h}{3}\left(\frac{D-d}{4}\right)^2 \pi;$$

der abgeſtumpfte Kegel iſt alſo ſo groß wie zwei Cylinder, von welchen der erſte die Höhe des abgeſtumpften Kegels zur Höhe und den vierten Theil der Summe der Durchmeſſer beider Grundflächen zum Radius hat, und die Höhe des andern iſt dem dritten Theile der Höhe des erſtern gleich, und der Radius der Grundfläche deſſelben iſt ſo groß, wie der vierte Theil der Differenz der Durchmeſſer beider Grundflächen des abgeſtumpften Kegels. Man kann alſo nun die Länge $\frac{D+d}{4}$ und $\frac{D-d}{4}$ mit dem quadratiſchen Maaßſtabe meſſen, um hierdurch das Bilden der Quadrate zu vermeiden. Oder es iſt auch

$$K = h\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{h}{3}\left(\frac{D-d}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$= h\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 \cdot 0{,}7854 + \frac{h}{3}\left(\frac{D-d}{2}\right) \cdot 0{,}7854,$$

wo $\frac{D+d}{2}$ und $\frac{D-d}{2}$ die Durchmeſſer der Grundfläche beider Cylinder ſind, und wo, wenn man einen kubiſchen Viſirſtab benutzt, und auf dieſem die Länge von $\frac{D+d}{2} = L$, und die von $\frac{D-d}{2} = l$ findet, der Inhalt des abgeſtumpften Kegels iſt

$$K = hL + \tfrac{1}{3}hl$$

im Maaß ausgedrückt. Dieſe Formel iſt unbedingt die einfachſte bei Ermittelung des Inhalts von kreisrunden Bottichen, Waſchtrögen ꝛc.

2. *Die ovalen Gefäße* ſind entweder oben und unten gleich weit, in welchem Falle man dieſelben wie Cylinder mit ovaler Grundfläche berechnet, oder ſie haben oben und

unten eine verſchiedene Weite. Von dieſer Form kommen häufig Bottiche vor, und es müſſen dieſelben wie abgeſtumpfte Pyramiden berechnet werden. Gewöhnlich ſieht man hierbei das Oval als eine Elypſe an, und es iſt unter dieſer Vorausſetzung der Inhalt des oben und unten gleich weiten Gefäßes, wenn die halbe große Axe = a, die halbe kleine = b und die Höhe = h geſetzt wird,

$$K = hab\pi,$$

oder, weil ſich die Länge der ganzen Axen leichter als die der Halbaxen meſſen läßt, für 2a = A und 2b = B,

$$K = hAB \cdot \frac{\pi}{4} = hAB \times 0{,}7854,$$

wo die Dimenſionen mit dem einfachen Maaßſtabe gemeſſen werden.

Hat das ovale Gefäß oben und unten eine verſchiedene Weite, ſo iſt, wenn von der einen Grundfläche die beiden Halbaxen a und b, und von der andern α und β ſind, für den normalen Abſtand beider von einander = h, der Inhalt =

$$K = \left(\frac{G + \sqrt{Gg} + g}{3}\right) h,$$

und es iſt, wenn die Ovale als Elypſen angeſehen werden,

$$G = ab\pi \text{ und } g = \alpha\beta\pi, \text{ alſo}$$

$$K = \left(\frac{ab + \sqrt{ab\alpha\beta} + \alpha\beta}{3}\right) h\pi;$$

weil aber hier immer ſein muß $a : b = \alpha : \beta$, ſo iſt, wenn man den Bruch $\frac{\alpha}{a} = m$ ſetzt, $\alpha = am$ und $\beta = bm$, und daher auch

$$K = \left(\frac{ab + mab + m^2ab}{3}\right) h\pi,$$

$$\text{nämlich es iſt } K = (1 + m + m^2)\, abh \cdot \frac{\pi}{3},$$

und wenn man die ganzen Axen nimmt, und 2a=A, 2b=B ſetzt,

$$K = (1 + m + m^2)\, ABh \cdot \frac{\pi}{12} = (1 + m + m^2)\, ABh \times 0{,}2618;$$

eine Formel, mit deren Hülfe ſich ſehr leicht der Inhalt eines jeden ovalen Gefäßes, das oben und unten von verſchiedener

Weite iſt, berechnen läßt, wenn man den Werth von $m = \frac{\alpha}{a} = \frac{2\alpha}{2A}$ zuvor beſtimmt.

3. Das Oval, in ſo fern es die Grundfläche eines von dem Böttcher verfertigten Gefäßes bildet, iſt keinesweges eine Elypſe, da der Böttcher ſtets nach Kreisbogen arbeitet; es iſt ein ſolches Oval daher auch aus Kreisbogen zuſammengeſetzt, wie $\alpha ab\beta$, Fig. 76., wo die Theile ab und $\alpha\beta$ Bogen eines Kreiſes ſind, welcher mit dem Radius $ca = cb = \gamma\alpha = \gamma\beta$ beſchrieben iſt, und $b\beta$ und $a\alpha$ ſind Bogen des Kreiſes, welcher $nb = n\beta = ma = m\alpha$ zum Radius hat. Wird ein ſolches Oval als Elypſe berechnet, ſo erhält man nur näherungsweiſe ein richtiges Reſultat, welches in dem Falle nicht ausreicht, wenn es darauf ankommt, den Inhalt eines ſolchen Gefäßes mit möglichſt größter Genauigkeit zu ermitteln, und es verdient daher das Verfahren hier angegeben zu werden, wodurch der richtige Inhalt eines ſolchen Ovals gefunden werden kann.

Es ſei der Radius cb des kleinern Kreiſes $= \varrho$, der des größern $nb = R$, alſo $nc = R - \varrho$, und der Winkel $dcb = \varphi$, ſo iſt, weil bei einer ſymmetriſchen Form des Ovals das Dreieck $c\gamma n = c\gamma m$ gleichſchenklig ſein muß, $\angle n = \angle m = 180^\circ - 2\varphi$, oder es iſt $\varphi = 90^\circ - \frac{1}{2}m$, daher iſt

$$\text{der Kreisausſchnitt } acb = \alpha\gamma\beta = \frac{2\varphi}{360} \cdot \varrho^2\pi$$

$$\text{„ „ } bn\beta = am\alpha = \frac{m}{360} R^2\pi,$$

$$\text{und das Dreieck } c\gamma n = c\gamma m = \frac{(R - \varrho)^2}{2} \sin m.$$

Die Fläche des ganzen Ovals = O aber iſt

$$O = 2[acb + bn\beta - \Delta c\gamma n],$$

folglich iſt auch

$$O = 2\left[\frac{2\varphi}{360} \varrho^2\pi + \frac{m}{360} R^2\pi - \tfrac{1}{2}(R - \varrho)^2 \sin m\right],$$

nämlich es iſt, weil $2\varphi = 180^\circ - m$,

$$O = \frac{180 - m}{180} \varrho^2\pi + \frac{m}{180} R^2\pi - (R - \varrho)^2 \sin m$$

die Formel für die Fläche des Ovals, welche durch die beiden

Radien und den Winkel m ausgedrückt iſt. Nennt man ſtatt des letztern die Excentricität $c\gamma = 2c$, ſo iſt

$$R - \varrho : c = 1 : \sin \tfrac{1}{2}m,$$

und es iſt daher der Winkel m durch die Gleichung beſtimmt,

$$\sin \tfrac{1}{2}m = \frac{c}{R - \varrho}.$$

Es iſt hiernach $c = (R - \varrho) \sin \frac{1}{2}m$;
ferner iſt, wenn man $mn = 2C$ ſetzt,

$$R - \varrho : C = 1 : \cos \tfrac{1}{2}m,$$

und daher $C = (R - \varrho) \cos \frac{1}{2}m$.

Vergleicht man das Oval, deſſen Inhalt

$$O = \frac{180 - m}{180}\varrho^2\pi + \frac{m}{180}R^2\pi - (R - \varrho)^2 \sin m$$

gefunden worden iſt, mit einer Elypſe, welche dieſelben Axen wie das Oval hat, ſo iſt bei dieſer

$$a = \varrho + c \text{ und } b = R - c,$$

und weil die Fläche E der Elypſe ausgedrückt wird durch

$$E = ab\pi,$$

ſo iſt auch $E = (\varrho + c)(R - C)\pi$,

und es iſt nun auch möglich zu beſtimmen, in wie fern die Fläche des Ovals von der der Elypſe abweicht.

Um dieſe Vergleichung wenigſtens für einen beſondern Fall anzuführen, nehme man an, es ſei in dem Ovale $\angle m = 90^\circ$ und alſo auch $\angle ncm = 90^\circ$, ſo iſt $nm = c\gamma$ und $C = c$, alſo wird

$$O = \tfrac{1}{2}(R^2 + \varrho^2)\pi - (R - \varrho)^2$$

und $E = (\varrho + c)(R - c)\pi = [R\varrho + c(R - \varrho) - c^2]\pi$,

und weil jetzt $2c^2 = (R - \varrho)^2$, ſo wird

$$E = \left[R\varrho + \frac{(R-\varrho)^2}{\sqrt{2}} - \frac{(R-\varrho)^2}{2}\right]\pi$$

$$= \left[2R\varrho + \frac{(R-\varrho)^2}{\sqrt{2}} - \frac{R^2 + \varrho^2}{2}\right]\pi.$$

Hiernach iſt nun

$$E = 2R\varrho\pi + \frac{(R-\varrho)^2\pi}{\sqrt{2}} - \left(\frac{R^2 + \varrho^2}{2}\right)\pi$$

$$\text{und } O = \qquad - (R-\varrho)^2 + \left(\frac{R^2 + \varrho^2}{2}\right)\pi;$$

folglich wird die Differenz, wenn man das Oval von der Elypſe abzieht,

$$E - O = 2R\varrho\pi - (R^2 + \varrho^2)\pi + (R - \varrho)^2 \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}} + 1\right]$$

$$= -(R - \varrho)^2\pi + (R - \varrho)^2 \left[\frac{\pi + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right],$$

nämlich es iſt

$$E - O = (R - \varrho)^2 \left[\frac{\pi + \sqrt{2} - \pi\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right] = \frac{0,113}{\sqrt{2}} (R - \varrho)^2.$$

Die Elypſe iſt alſo etwas größer als das Oval, doch iſt die Differenz ſo unbedeutend, daß man in den meiſten Fällen das Oval als eine Elypſe anſehen kann, beſonders wenn die Differenz $R - \varrho$ nicht groß iſt. Uebrigens verſteht es ſich von ſelbſt, daß bei der Berechnung eines ovalen Bottiches, wenn einmal die Fläche des Ovals gefunden iſt, nun die Formel für die abgeſtumpfte Pyramide angewendet wird, wobei auch noch dadurch die Rechnung abgekürzt werden kann, daß die beiden Grundflächen einander ähnlich ſein müſſen, und daher zu einander ſich verhalten, wie die Quadrate ähnlich liegender Linien; es läßt ſich daher die Fläche des zweiten Ovals aus der des erſten durch eine einfache Proportion berechnen.

4. Die Badewannen und alle Gefäße, welche mit denſelben zu einer Gattung gerechnet werden können, ſind oben weiter als unten, und gehören in ſo fern zu den abgeſtumpften Pyramiden; es muß daher der Inhalt derſelben nach der bekannten Formel berechnet werden,

$$K = \left(\frac{G + \sqrt{Gg} + g}{3}\right) h\pi.$$

Die Grundfläche G und alſo auch g dieſer Gefäße aber iſt ein eiförmiges Oval, alſo ein ſolches, das, wie Fig. 103., wo $d\delta$ die Axe iſt, bei d und δ verſchiedene Breite hat, und es ſind daher auch die Radien, mit welchen die Kreisbogen adb und $\alpha\delta\beta$ beſchrieben ſind, von verſchiedener Größe. Die Form eines ſolchen Ovals iſt durch 4 Größen beſtimmt: nämlich durch die Radien der drei Kreisbogen db, $b\beta$ und $\beta\delta$, welche die halbe Figur bilden, und durch einen der Winkel, welche von dieſen Bogen gemeſſen werden. Statt deſſen kann übrigens auch blos einer der Radien gegeben ſein und das Dreieck $c\gamma u$,

deſſen Spitzen die Mittelpunkte der drei Kreiſe ſind. Die Conſtruction eines ſolchen Ovals ergiebt ſich unmittelbar aus der Figur: es iſt nämlich $\Delta cm\gamma = \Delta cn\gamma$; aus c iſt mit cd der Bogen adb ſo beſchrieben, daß ad = db, aus m und n die beiden, gleich großen Bogen $a\alpha$ und $b\beta$, und aus γ mit $\gamma\alpha = \gamma\beta$ der Bogen $\alpha\delta\beta$. Bezeichnet man die drei Winkel des Dreiecks $cm\gamma$ mit c, m und γ, und ſetzt $ca = r$, $ma = R$ und $\gamma\alpha = \varrho$, alſo $mc = R - r$ und $m\gamma = R - \varrho$, ſo iſt:

der Kreisausſchnitt $dca = \frac{c}{360} \cdot r^2\pi$,

" " " $am\alpha = \frac{m}{360} \cdot R^2\pi$,

" " " $\alpha\gamma\delta = \frac{\gamma}{360} \cdot \varrho^2\pi$,

und das Dreyeck $cm\gamma = \frac{1}{2}(R - r)(R - \varrho) \sin m$, und es wird die Fläche des halben Ovals erhalten, wenn man die Fläche des Dreiecks von der der drei Ausſchnitte abzieht; die Fläche O des ganzen Ovals iſt daher

$$O = 2\left[\frac{c}{360} r^2\pi + \frac{m}{360} \cdot R^2\pi + \frac{\gamma}{360} \cdot \varrho^2\pi - \tfrac{1}{2}(R-r)(R-\varrho)\sin m\right],$$

nämlich es iſt

$$O = \frac{c}{180} \cdot r^2\pi + \frac{m}{180} \cdot R^2\pi + \frac{\gamma}{180} \cdot \varrho^2\pi - (R-r)(R-\varrho) \sin m,$$

oder wenn c, m und γ nicht durch Grade, ſondern ihrer Länge nach ausgedrückt werden, für den Radius = 1, wo denn $\pi = 180^0$ iſt, ſo wird

$$O = cr^2 + mR^2 + \gamma\varrho^2 - (R - r)(R - \varrho) \sin m.$$

Dieſe Formel enthält zwar 6 verſchiedene Größen, allein es iſt leicht einzuſehen, daß in dem Dreiecke $cm\gamma$ die Winkel c und γ durch mc, $m\gamma$ und $\angle m$ gefunden werden können; übrigens kann, ſtatt des Winkels m, auch die dritte Seite $c\gamma$ des Dreiecks gegeben ſein.

Iſt die Grundfläche $adb\delta$ gefunden, ſo hat die Berechnung des Inhalts des ganzen Gefäßes nichts Schwieriges weiter: denn ſetzt man die gegenüberliegende Fläche = Q, die Axe $d\delta = A$ und die gleichliegende in Q = a, ſo iſt

$$O : Q = A^2 : a^2, \text{ alſo } Q = \frac{a^2}{A^2}\, O,$$

und wenn die Höhe des Gefäßes = h geſetzt wird, ſo iſt nun

$$K = \tfrac{1}{3}[O + \sqrt{OQ} + Q]\, h\pi,$$
$$= \tfrac{1}{3}\left[O + \frac{a}{A}\, O + \frac{A^2}{a^2}\, O\right] h\pi,$$

nämlich es iſt, wenn man den Bruch $\frac{a}{A} = p$ ſetzt,

$$K = \left(\frac{1 + p + p^2}{3}\right) Oh\pi.$$

5. Aus dem bisher Geſagten laſſen ſich nun leicht die Formeln auffinden für den Inhalt aller Gefäße, welche die Form von Cylindern oder von abgeſtumpften Kegeln haben, und deren Grundfläche von verſchiedenen Kreisbogen, oder von dieſen und geraden Linien begränzt werden.

6. Die Fäſſer unterſcheiden ſich von den hierher betrachteten Gefäßen beſonders dadurch, daß die Seitenflächen derſelben auch der Länge nach gekrümmt ſind, und es iſt ſchwierig, eine vollkommen genaue Formel für den Inhalt derſelben aufzufinden, weil ſich keine Gleichung für die Curve angeben läßt, in welcher die Faßdauben gekrümmt ſind. Die Erfahrung lehrt, daß dieſe Krümmung von Zufälligkeiten abhängt, und in verſchiedenen Fällen verſchieden iſt. Aus dieſem Grunde iſt die Ermittelung des Inhalts eines Faſſes mit Hülfe des Waſſers immer das zuverläſſigſte Verfahren. Nach den in Preußen beſtehenden geſetzlichen Beſtimmungen muß der Böttcher auf jedem von ihm gefertigten Faſſe den Inhalt deſſelben durch eingebrannte Zahlen angeben, und die Richtigkeit der Angabe durch die Beifügung eines Stempels, der ſeinen Namen enthält, verbürgen. Es iſt zu bedauern, daß dieſe Vorſchrift, durch welche jede Berechnung über den wahrſcheinlichen Inhalt der Fäſſer vermieden werden könnte, nicht mit gehöriger Strenge befolgt wird.

Bei der Ermittelung einer theoretiſchen Formel für den Inhalt eines Faſſes muß natürlich den Faßdauben eine beſtimmte Krümmung beigelegt werden, und man muß die erhaltene Formel, um ihr eine für den Gebrauch bequeme Form zu geben, auf einen einfachen Näherungsausdruck zurückzuführen ſuchen, woraus hervorgeht, daß eine ſo abgeleitete Formel in

keinem Fall ein ſtreng genaues Reſultat liefern kann. Die Ableitung einer ſolchen Näherungsformel kann nun auf folgende Art geſchehen: Jedes kreisrunde Faß kann, als durch die Umdrehung einer Fläche um eine Axe entſtanden, gedacht werden, und es iſt daher, wenn nmcbd, Fig. 104., die das Faß erzeugende Fläche und mn die Axe darſtellt, für ax = x und xy, die Formel für den Inhalt 2K des Faſſes

$$2K = 2\pi\int y^2 dx,$$

wo nun für y der durch x beſtimmte Werth geſetzt werden muß, wie er aus den Eigenthümlichkeiten der Curve dbc, welche die Krümmung der Dauben darſtellt, ſich ergiebt. Nimmt man an, daß die Curve ein Kreisbogen iſt, zu welchem der Radius gb = R gehört, und ſetzt man die halbe Spundweite ab = A, die halbe Bodenweite, alſo den Radius des Kreiſes, mit welchem der Boden des Faſſes, der hier als ganz eben vorausgeſetzt wird, beſchrieben iſt, = a, und wird endlich die halbe Tiefe des Faſſes, alſo am = an = h geſetzt, ſo iſt, wenn man ga = gb − ab = R − A = p ſetzt, die Gleichung für die Curve

$$(p + y)^2 + x^2 = R^2,$$

und daher $y = -p + \sqrt{(R^2 - x^2)}$,

alſo iſt $y^2 = p^2 + R^2 - x^2 - 2p\sqrt{(R^2 - x^2)}$,

und hieraus folgt

$$2K = 2\pi\int y^2 dx = 2\pi\int(p^2 + R^2 - x^2)\,dx - 4p\pi\int dx\sqrt{(R^2 - x^2)},$$

nämlich es iſt

$$2K = 2\pi\left(p^2x + R^2x - \frac{x^3}{3}\right) - 4p\pi\left[\frac{x}{2}\sqrt{(R^2 - x^2)} + \frac{R^2}{2}\text{Arc}\sin\frac{x}{R}\right],$$

wo keine Conſtante hinzukommt, und es iſt daher für x = h der Inhalt des ganzen Faſſes, deſſen Dauben in einem Kreisbogen gekrümmt ſind,

$$2K = 2h\pi\left[p^2 + R^2 - \frac{h^2}{3} - p\sqrt{(R^2 - h^2)}\right] - 2pR^2\pi\,\text{Arc}\sin\frac{h}{R}$$

oder weil $R^2 - h^2 = (cp)^2 = (p + a)^2$, ſo iſt

$$2K = 2h\pi\left[R^2 - ap - \frac{h^2}{3}\right] - 2pR^2\pi\,\text{Arc}\sin\frac{h}{R}.$$

Es iſt aber p = R − A und daher auch

$$2K = 2h\pi\left[R^2 - a(R - A) - \frac{h^2}{3}\right] - 2(R - A)R^2\pi\,\text{Arc}\sin\frac{h}{R}.$$

wo nur R nicht unmittelbar gemeſſen werden kann; da ferner

$$bp : pc = pc : (2R - bp),$$

ſo iſt, wenn bp = A − a mit c bezeichnet wird,

$$c : h = h : 2R - c;$$

folglich iſt $R = \frac{h^2 + c^2}{2c}$.

Der zuerſt für 2K gefundene Ausdruck iſt auch

$$2K = 2h\pi\left(p^2 + R^2 - \frac{h^2}{3}\right) - 2ph\pi\left[\sqrt{(R^2 - h^2)} + \frac{R^2}{h}\,\text{Arc sin}\,\frac{h}{R}\right]$$

und es iſt daher

$$\frac{K}{h\pi} = p^2 + R^2 - \frac{h^2}{3} - pR\left[\sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right)} + \frac{R}{h}\,\text{Arc sin}\,\frac{h}{R}\right]$$

und weil

$$\sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right)} = 1 - \frac{h^2}{2R^2} - \frac{h^4}{8R^4} - \frac{h^6}{16R^6} \cdots$$

und $\frac{R}{h}\sin\frac{h}{B} = 1 + \frac{h^2}{6R^2} + \frac{3h^4}{40R^4} + \frac{5h^6}{112R^6} \cdots$,

ſo iſt auch

$$\frac{K}{h\pi} = p^2 + R^2 - \frac{h^2}{3}$$

$$- pR\left[2 - \frac{h^2}{3R^2} - \frac{h^4}{20R^4} - \frac{h^6}{56R^2} \cdots\right]$$

$$= (R - p)^2 - \frac{h^2}{3} + (R - A)\,R\left[\frac{h^2}{3R^2} + \frac{h^4}{20R^4} + \frac{h^6}{56R^6} \cdots\right]$$

$$= A^2 + R^2\left[\frac{h^4}{20R^4} + \frac{h^6}{56R^6} \cdots\right] - AR\left[\frac{h^2}{3R^2} + \frac{h^4}{20R^4} + \frac{h^6}{56R^6} \cdots\right],$$

und es iſt daher

$$\frac{K}{h\pi} = A^2 - \frac{Ah}{3} \cdot \frac{h}{R} + \frac{h^2}{20} \cdot \frac{h^2}{R^2} - \frac{Ah}{20} \cdot \frac{h^3}{R^3} + \frac{h^2}{56} \cdot \frac{h^4}{R^4} \cdots$$

Nun iſt $\frac{h}{R} = \frac{2hc}{h^2 + c^2} = \frac{2c}{h}\left(1 - \frac{c^2}{h^2} + \frac{c^4}{h^4} - \frac{c^6}{h^6} \cdots\right)$,

wo die höheren Potenzen von $\frac{c}{h}$ um ſo mehr außer Acht gelaſſen werden können, da c im Verhältniß zu h immer ſehr klein iſt. Hiernach iſt

$$\frac{K}{h\pi} = A^2 - \frac{Ah}{3} \cdot \frac{2c}{h}\left(1 - \frac{c^2}{h^2} + \frac{c^4}{h^4} \cdots\right)$$

$$+\frac{h^2}{20}\cdot\frac{4c^2}{h^2}\left(1-\frac{c^2}{h^2}+\frac{c^4}{h^4}\cdots\right)^2$$
$$-\frac{Ah}{20}\cdot\frac{8c^3}{h^3}\left(1-\frac{c^2}{h^2}+\frac{c^4}{h^4}\cdots\right)^3\cdots\cdot,$$

und hieraus erhält man

$$\frac{K}{h\pi}=A^2-\tfrac{2}{3}Ac+\tfrac{1}{5}c^2+P\cdot\frac{c^2}{h^2},$$

wo P die Summe aller Glieder bedeutet, welche ſämmtlich den kleinen Bruch $\frac{c^2}{h^2}$ zum Factor haben, und es iſt daher Näherungsweiſe, weil überhaupt keine ſtrenge Genauigkeit verlangt wird,

$$K=h\pi(A^2-\tfrac{2}{3}Ac+\tfrac{1}{5}c^2),$$

und für $H=2h$ wird nun der Inhalt des ganzen Faſſes ausgedrückt durch

$$2K=H\pi(A^2-\tfrac{2}{3}Ac+\tfrac{1}{5}c^2),$$

und weil $c=A-a$, ſo iſt auch

$$2K=H\pi\left(\frac{15A^2-10A(A-a)+3(A-a)^2}{15}\right)$$
$$=H\pi\left(\frac{8A^2-4Aa+3a^2}{15}\right);$$

eine Formel, die ein hinreichend genaues Reſultat giebt. Es iſt die gefundene Formel auch

$$2K=H\pi(A^2-\tfrac{2}{3}Ac+\tfrac{1}{9}c^2+\tfrac{4}{45}c^2)$$
$$=H\pi(A-\tfrac{1}{3}c)^2+\tfrac{4}{45}c^2H\pi,$$

und weil $A-\frac{1}{3}c=\dfrac{2A+a}{3}$, ſo wird

$$2K=H\pi\left(\frac{2A+a}{3}\right)^2+\tfrac{4}{45}c^2H\pi,$$

woraus man, wenn das letzte Glied weggelaſſen wird, erhält

$$2K=H\left(\frac{2A+a}{3}\right)^2\pi,$$

und dieſes iſt die Formel, welche bei dem Viſiren der Fäſſer gewöhnlich angewendet wird; ſie giebt die Regel: Ein kreisrundes Faß iſt einem Cylinder gleich, der mit demſelben gleiche Höhe hat, und deſſen Durchmeſſer der dritte Theil von der doppelten Spundtiefe und dem Durchmeſſer des Bodens iſt.

Bei der Ableitung der hier angegebenen Formel für den

Inhalt eines Faſſes wurde vorausgeſetzt, daß die Dauben eine kreisförmige Krümmung haben, was aber keinesweges genau genommen der Fall iſt, und ſchon deswegen kann man die Formel, wenn auch nicht einige Glieder derſelben außer Acht gelaſſen werden, nur als einen Näherungswerth anſehen. Man kann auch einen ſolchen Näherungswerth unter der Vorausſetzung ableiten, daß die Curve der Dauben eine Conchoide ſei, wie ay, Fig. 80., daß ſie eine elyptiſche Krümmung habe ꝛc., doch werden hierdurch in keinem Falle zuverläſſigere Reſultate erhalten. Das Wichtigſte über die Ermittelung des Inhalts der Fäſſer findet man in dem 9ten Kapitel von T. Mayer's praktiſcher Stereometrie.

7. In Beziehung auf die Fäſſer verdienen hier noch folgende Bemerkungen angeführt zu werden:

a. Der Inhalt eines ovalen Faſſes iſt dem eines kreisrunden gleich, in welchem die Durchmeſſer die mittlern Proportionalen zwiſchen beiden Axen des Ovals ſind, welches hierbei als eine Elypſe angeſehen wird. Der Grund hiervon iſt, weil die Fläche einer Elypſe = $ab\pi$, alſo = $\varrho^2\pi$ für $\sqrt{ab} = \varrho$. Setzt man nun in dem ovalen Faſſe die halbe große Axe bei dem Spunde = A und die halbe kleine Axe = B, am Boden des Faſſes aber die halbe große Axe = a und halbe kleine Axe = b, ſo iſt, wenn der Inhalt des elyptiſchen Faſſes mit E bezeichnet wird, und der eines kreisrunden Faſſes, deſſen Radien A und a ſind, mit K,

$$K = \left(\frac{2A + a}{3}\right)^2 H\pi \text{ und } E = \left(\frac{2\sqrt{AB} + \sqrt{ab}}{3}\right)^2 H\pi,$$

und es iſt daher

$$K : E = (2A + a)^2 : (2\sqrt{AB} + \sqrt{ab})^2$$
$$= (2A + a)^2 : (4AB + 4\sqrt{ABab} + ab);$$

weil aber $A : B = a : b$,

ſo iſt $Ab = Ba$, und daher $\sqrt{ABab} = Ab = Ba$, und daher auch

$$K : E = (2A + a)^2 : (4AB + 2Ab + 2Ba + ab)$$
$$= (2A + a)^2 : (2A + a)(2B + b)$$
$$= 2A + a : 2B + b,$$

und alſo endlich $K : E = A : B$.

Sucht man alſo den Inhalt eines kreisrunden Faſſes, welches

die großen Axen des ovalen zu Durchmeſſern hat, ſo braucht man den Inhalt deſſelben nur mit $\frac{B}{A}$ zu multipliciren, um den des ovalen Faſſes zu erhalten.

b. Die allgemeine Formel für den Inhalt eines Faſſes, wenn die Dauben als in einem Kreisbogen gekrümmt angenommen werden, iſt

$$K = \pi(p^2x + R^2x - \tfrac{1}{3}x^3)$$
$$- 4p\pi\left[\frac{x}{2}\sqrt{(R^2 - x^2)} + \frac{R^2}{2}\text{Arc sin}\frac{x}{R}\right].$$

Steht nun das Faß auf dem Boden auf und iſt gerade zur Hälfte gefüllt, ſo daß nabd der halbe Durchſchnitt des gefüllten Theiles iſt, ſo muß man in dieſer Formel x = (na) = h ſetzen, um den Inhalt zu bekommen. Iſt das Faß aber mehr als bis zur Hälfte gefüllt, z. B. ſo, daß nxyd, Fig. 104., den Durchſchnitt bildet, ſo muß man für ax=q in der obigen Formel einmal x = h und einmal x=q ſetzen, und es müſſen beide Werthe addirt werden, um den geſuchten Inhalt zu bekommen. Wird aber der Werth von K für x=q von dem für x=h abgezogen, ſo bleibt der Inhalt des Raumes, von welchem mxyc den Durchſchnitt bildet.

c. Wenn ein horizontal liegendes Faß nicht ganz voll iſt, ſo berechnet man den Kreisabſchnitt am Boden des Faſſes der von der Flüſſigkeit benetzt wird, und eben ſo den in die Flüſſigkeit eingetauchten Abſchnitt von dem Kreiſe, der durch den Spund parallel zu dem Boden gedacht werden kann. Wird nun das erſtere Segment mit m und das letztere mit M bezeichnet, und iſt die ganze Höhe des Faſſes = H, ſo wird der Inhalt K durch die Formel ausgedrückt

$$K = H\left(\frac{2M + m}{3}\right),$$

und es iſt dieſe Berechnung, die ein hinlänglich genaues Reſultat giebt, nur dadurch weitläufig, daß hierbei die Flächen der Kreisſegmente berechnet werden müſſen, deren Inhalt übrigens auch in beſonders berechneten Segmententafeln nachgeſchlagen werden kann.

d. Man hat auch beſondere Formeln für den Inhalt ſolcher Fäſſer anzugeben verſucht, die gewölbte Boden ha=

ben; es ſind dieſe Formeln aber nicht brauchbar, und eine ungefähre Schätzung der Abweichung des Inhalts eines ſolchen Faſſes von dem eines Faſſes mit ebenem Boden giebt eben ſo zuverläſſige Reſultate, als durch mühſam entwickelte Formeln für dieſen Fall erhalten werden.

8. Die Keſſel, wie ſie in Fabriken gebraucht werden, haben entweder die Form von Kugelabſchnitten oder von abgeſtumpften Kegeln, die gewöhnlich in einem Kugelabſchnitte auslaufen, und es hat daher auch die Berechnung dieſer Gefäße durchaus nichts Schwieriges.

Iſt aNb, Fig. 48., der Durchſchnitt eines Keſſels, welcher einen Kugelabſchnitt bildet, ſo iſt für $Nc = x$, $ca = y$ und den Radius der Kugel $= R$,

$$y^2 = x\,(2R - x) = 2Rx - x^2,$$

und daher der Inhalt des Keſſels

$$K = \pi \int y^2 dx = (Rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3)\,\pi,$$

und weil $y^2 = 2Rx - x^2$, ſo iſt $R = \dfrac{y^2 + x^2}{2x}$

und daher auch

$$K = \left(\frac{y^2x + x^3}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\pi,$$

oder

$$K = \left(\frac{3y^2 + x^2}{6}\right)x\pi,$$

und weil $x = Nc$ die Tiefe des Keſſels und $y = ca$ die halbe obere Weite deſſelben iſt, ſo wird, wenn man die erſtere mit h und die letztere mit r bezeichnet,

$$K = \left(\frac{3r^2 + h^2}{6}\right)h\pi = \tfrac{1}{2}hr^2\pi + \tfrac{1}{6}h \cdot h^2\pi;$$

der Keſſel kann daher, als aus zwei Cylindern beſtehend, berechnet werden, von welchen der eine die Hälfte und der andere den ſechsten Theil der Tiefe des Keſſels zur Höhe hat. Die Radien der Grundfläche ſind r und h.

Iſt AanbB, Fig. 105., der Durchſchnitt des Keſſels, welcher aus einem abgeſtumpften Kegel AabB beſteht, dem unten ein Kugelabſchnitt angeſetzt iſt, ſo muß man, um den Inhalt auszudrücken, mit der ſo eben angegebenen Formel noch die

für

für die abgeſtumpften Kegel verbinden, und es iſt daher für $cn = h$, $ca = r$, $cC = H$ und $CA = R$,

$$K = \tfrac{1}{2}hr^2\pi + \tfrac{1}{6}h \cdot h^2\pi + \left(\frac{R^2 + Rr + r^2}{3}\right)H\pi,$$

eine Formel, die ſich leicht auf eine etwas einfachere Form bringen läßt.

Zwar laſſen ſich auch für die gewöhnlichen Waſchkeſſel, bei welchen die Seitenfläche, alſo in dem Durchſchnitte die Linie Aa, geſchweift iſt, Formeln zur Berechnung ihres Inhalts angeben: da dieſer aber in jedem Falle durch das Ausmeſſen mit Waſſer gefunden werden kann, ſo würde die Ableitung einer eignen Formel hier ganz überflüſſig ſein.

9. Da Keſſel gewöhnlich von Metall gemacht werden, ſo iſt die Beſtimmung ihrer Oberfläche nicht unwichtig, weil hierdurch, in ſo fern das Gefäß als durchgehends von gleicher Stärke angenommen wird, das Gewicht deſſelben beſtimmt iſt.

Die Oberfläche F eines Kugelabſchnittes wird durch die Formel ausgedrückt

$$F = h \times 2R\pi,$$

und weil der Radius der Kugel

$$R = \frac{x^2 + y^2}{2x} = \frac{h^2 + r^2}{2h},$$

$$\text{ſo iſt } F = (h^2 + r^2)\,\pi = h^2\pi + r^2\pi,$$

alſo iſt die Fläche ſo groß wie zwei Kreiſe, von welchen d er eine die Tiefe des Abſchnitts und der andere den Halbmeſſer der oberen Weite deſſelben zum Radius hat. Wird hierzu noch die Seitenfläche des abgeſtumpften Kegels AabB, Fig. 105., addirt, ſo erhält man die ganze Oberfläche des Gefäßes, von welchem AanbB der Durchſchnitt iſt, und wenn hier alle Dimenſionen in Zoll ausgedrückt ſind, und man weiß, daß eine Fläche von m Quadratzoll, die mit dem Gefäße gleiche Stärke hat, ein Pfund wiegt, ſo braucht man das erhaltene Reſultat für die ganze Oberfläche des Gefäßes nur durch m zu theilen, um zu erfahren, wieviel Pfund daſſelbe wiegt.

10. Eine Mulde oder ein rund ausgehöhlter Backtrog iſt ein Segment von einem Cylinder, dem an beiden Enden Kugelſegmente angeſetzt ſind: es läßt ſich daher leicht

eine Formel für den Inhalt derſelben angeben, wenn die obere Fläche abecdf, Fig. 106., des Gefäßes als ein Rechteck mit zwei angeſetzten Halbkreiſen angeſehen wird. Setzt man nämlich die Tiefe des Gefäßes, alſo den Abſtand der Axe gh von dem unterſten Theile der Fläche = h, gb = ge = r und gh = H, ſo ſind die Kugelſegmente bec und afd zuſammengenommen einem Kugelabſchnitte gleich, deſſen Höhe = h, und von welchem der Radius der Grundfläche = r iſt: es haben dieſe Segmente daher einen Inhalt $= \left(\frac{3r^2 + h^2}{6}\right) h\pi$; wird nun die Fläche des Keisabſchnitts, zu welchem eine Sehne bc = 2r gehört, und deſſen Höhe = h iſt, mit S bezeichnet, ſo iſt der Inhalt des Cylinderabſchnitts, deſſen Fläche abcd darſtellt, = SH; folglich iſt der Inhalt des ganzen Gefäßes

$$K = \left(\frac{3r^2 + h^2}{6}\right) h\pi + SH,$$

wo blos für S die bekannte Formel für den Kreisabſchnitt geſetzt zu werden braucht.

Für r = h wird S ein Halbkreis $= \frac{1}{2}r^2\pi$, und es iſt in dieſem Falle

$$K = \tfrac{2}{3}r^3\pi + \tfrac{1}{2}r^2 H\pi.$$

§. 163.

Aufgabe.

Es ſoll die Größe der einzelnen Dimenſionen eines Gefäßes von beſtimmter Form berechnet werden, das einen beſtimmten Kubikinhalt faßt.

Auflöſung. Man conſtruire ein Gefäß, das die vorgeſchriebene Form hat, und in welchem die Dimenſionen von beliebiger Größe, doch ſo angenommen ſind, daß ſie in dem durch die Form des Gefäßes beſtimmten Verhältniſſe zu einander ſtehen, und berechne den Inhalt dieſes Gefäßes. Findet man dieſen Inhalt = P, und ſind die einzelnen Abmeſſungen dieſes Gefäßes a, b, c ꝛc., während die des wirklich zu conſtruirenden Gefäßes der Ordnung nach A, B und C ꝛc. ſein ſollen und der Inhalt = Q, ſo iſt

$$P : Q = \begin{cases} a^3 : A^3, \\ b^3 : B^3, \\ c^3 : C^3, \end{cases} \text{alſo } \sqrt[3]{P} \cdot \sqrt[3]{Q} = \begin{cases} a : A \\ b : B \\ c : C \end{cases}$$

und es iſt daher

$$A = a\sqrt[3]{\frac{Q}{P}},\ B = b\sqrt[3]{\frac{Q}{P}},\ C = c\sqrt[3]{\frac{Q}{P}} \text{ etc.};$$

man braucht alſo nur den Inhalt, welchen das Gefäß haben ſoll, durch den berechneten zu theilen, aus dem Quotienten die Kubikwurzel zu ziehen, und hiermit die angenommenen Dimenſionen zu multipliciren, ſo geben die Produkte die einzelnen Abmeſſungen des zu conſtruirenden Gefäßes.

Beiſpiel. Es ſoll ein, aus einem abgeſtumpften Kegel mit einem angeſetzten Kugelabſchnitte beſtehender Keſſel conſtruirt werden, der 800 preußiſche Quart hält, und in welchem die einzelnen Dimenſionen ſo von einander abhängen, daß, wenn AanbB, Fig. 105., den Durchſchnitt dieſes Gefäßes bildet, in dem Kugelabſchnitt anb der Radius ac zu der Tiefe cn ſich verhält, wie 5 : 2, und von dem abgeſtumpften Kegel ABba die obere Weite zu der untern, alſo AB : ab = AC : ac = 3 : 2; ferner ſoll der abgeſtumpfte Kegel ſo conſtruirt ſein, daß, wenn er mit dem Kugelabſchnitte verbunden wird, die Seite Aa deſſelben eine Tangente des Kreisbogens an an dem Punkte a iſt.

Setzt man $ac = a = 10''$, ſo wird $cn = b = 4''$ und $AC = c = 15''$; nun iſt

$$\underline{ac : cn = 1 : \text{tg } \varphi,}$$
$$\text{alſo} \quad \text{tg } \varphi = 0{,}4$$
$$\text{und daher } \varphi = 21^\circ\ 48'\ 5'' = \angle can.$$
$$\text{Da aber } \angle A = \angle cad = 2 \times \angle can = 2\varphi,$$
$$\text{ſo iſt } A = 43^\circ\ 36'\ 10''$$
$$\text{und weil } \underline{A\alpha : \alpha a = 1 : \text{tg } A,}$$
$$\text{alſo } c - a : (\alpha a) = 1 : \text{tg } A,$$
$$\text{ſo iſt } (\alpha a) = d = (c - a)\ \text{tg } A = 5\ \text{tg } 43^\circ\ 36'\ 10'',$$

und die Höhe des abgeſtumpften Kegels iſt daher

$$(\alpha a) = (Cc) = d = 4{,}765.$$

Nun iſt der Inhalt des Kugelabſchnitts

$$= \left(\frac{3r^2+h^2}{6}\right)h\pi = \left(\frac{3a^2+b^2}{6}\right)\cdot b\pi = \left(\frac{3\cdot 10^2+4^2}{6}\right)\cdot 4\pi$$

$$= \frac{4\cdot 316}{6}\pi = \frac{632}{3}\pi,$$

und der Inhalt des abgeſtumpften Kegels iſt

$$= \left(\frac{R^2 + Rr + r^2}{3}\right) H\pi = \left(\frac{c^2 + ca + a^2}{3}\right)\cdot d\pi$$

$$= \left(\frac{15^2 + 15\cdot 10 + 10^2}{3}\right)\cdot 4{,}765\pi = \frac{475\cdot 4{,}765}{3}\pi$$

$$= \frac{2263{,}375}{3}\pi.$$

Der Inhalt des Gefäßes, von welchem a, b, c und d die Dimenſionen ſind, iſt alſo, wenn die für dieſe Größen angenommenen Werthe preußiſche Zoll bedeuten, =

$$\left(\frac{632}{3} + \frac{2263{,}375}{3}\right)\pi = \frac{2895{,}375}{3}\pi = 965{,}125\pi$$

= 3032 preußiſche Kubikzoll = P.

Nun ſoll das Gefäß 800 Quart halten, alſo iſt, da ein Quart = 64 Kubikzoll,

$$Q = 800 \times 64 = 8^3\cdot 10^2$$

und daher

$$\sqrt[3]{\frac{Q}{P}} = \sqrt{\frac{8^3\cdot 10^2}{3032}} = \frac{8\cdot 10}{\sqrt{30320}} = \frac{80}{31{,}1824}$$

$$= 2{,}56555 = n.$$

Es iſt alſo, wenn die den a, b, c, d homologen Abmeſſungen des zu conſtruirenden Gefäßes mit A, B, C und D bezeichnet werden,

$$A = na = 2{,}56555 \times 10 = 25{,}6555 \text{ Zoll}$$

der Radius des Kugelabſchnitts, welcher zugleich die halbe untere Weite des abgeſtumpften Kegels bildet;

$$B = nb = 2{,}56555 \times 4 = 10{,}2622 \text{ Zoll}$$

die Höhe des Kugelabſchnitts;

$$C = nc = 2{,}56555 \times 15 = 38{,}48325 \text{ Zoll}$$

der Radius der obern Weite des abgeſtumpften Kegels;

$$D = nd = 2{,}56555 \times 4{,}765 = 12{,}2248 \text{ Zoll}$$

die Höhe des abgeſtumpften Kegels.

Durch dieſe Reſultate ſind die ſämmtlichen verſchiedenen

Abmeſſungen des zu conſtruirenden Gefäßes, das den gegebenen Inhalt faſſen ſoll, vollkommen beſtimmt.

Zuſatz. Hat das Gefäß eine ſolche Form, daß aus den angenommenen Dimenſionen der Inhalt deſſelben ſich nicht berechnen läßt, weil die Form nicht auf ſolche Körper zurückgeführt werden kann, deren Inhalt mit Hülfe bekannter Formeln zu finden iſt, ſo conſtruirt man nach den angenommenen Dimenſionen ein Model, und ermittelt den Inhalt hiervon durch das Ausmeſſen mit Waſſer, wodurch alsdann unmittelbar der Werth von P erhalten wird.

§. 164.

Ermittelung des Kubikinhalts ſtarrer Körper von unregelmäßiger Form, deren Größe nicht bedeutend iſt.

Es giebt zwei verſchiedene praktiſche Methoden, um den Inhalt ſolcher Körper zu ermitteln: man umgiebt nämlich dieſelben entweder mit einem hohlen Gefäße von beſtimmtem Inhalt, oder man ſucht den Inhalt des Körpers aus ſeinem Gewichte zu berechnen. Das erſtere Verfahren beſteht darin, daß man den Körper, wenn er durch Waſſer nicht leidet, in ein Gefäß legt, deſſen Inhalt bekannt iſt, daſſelbe hierauf mit Waſſer ausfüllt, und die Menge des hierzu erforderlichen Waſſers von dem Inhalte des ganzen Gefäßes abzieht; der Reſt giebt den Kubikinhalt des zu meſſenden Körpers. Bedient man ſich hierbei eines Gefäßes, das die Form eines kreisrunden Cylinders hat, ſo kann man, nachdem daſſelbe mit Waſſer angefüllt iſt, den Körper herausnehmen, hierauf den Abſtand der Waſſerfläche von dem oberen Rande des Gefäßes meſſen, das hierbei natürlich einen horizontalen Stand haben muß, und nun den Kubikinhalt des Körpers durch die einfache Proportion finden

$$H : h = P : X,$$

wo H die ganze Höhe des Cylinders iſt, h der Abſtand der Waſſerfläche von dem obern Rande des Cylinders, nachdem der Körper herausgenommen iſt, P der Kubikinhalt des Cylinders und X der des Körpers.

Iſt der Körper von der Art, daß er durch das Waſſer leiden würde, ſo umgiebt man ihn mit einem hölzernen Kaſten,

der die Form eines Parallelepipedon hat, füllt den übrigen Raum mit Sand aus, und zieht hierauf die Maſſe des hierzu erforderlichen Sandes von dem Kubikinhalte des ganzen Parallelepipedon ab, um den des Körpers zu erhalten.

Bei der Ermittelung des Kubikinhaltes eines Körpers aus dem Gewichte deſſelben wird vorausgeſetzt, daß er durchaus gleichartig ſei, ſo daß, dem Raume nach, gleich große Theile deſſelben auch gleich viel wiegen. Iſt dieſes der Fall, ſo kann hierbei das Gewicht auf eine zweifache Art angewendet werden, je nachdem entweder von einem Körper derſelben Gattung der Kubikinhalt und das Gewicht, oder das eigenthümliche Gewicht deſſelben gegeben iſt.

Weiß man, daß ein Körper derſelben Art wie der zu meſſende, deſſen Rauminhalt k Kubikzoll beträgt, p℔ wiegt, und der Körper, deſſen Inhalt X ermittelt werden ſoll, P℔, ſo iſt

$$p : P = k : X$$

und daher der geſuchte Inhalt $X = \frac{Pk}{p}$ Kubikzoll.

Unter dem eigenthümlichen Gewichte eines Körpers verſteht man, wie bekannt, das Gewicht deſſelben, im Verhältniß zu dem des Waſſers, ſo daß, wenn z. B. der Kubikfuß des Körpers m mal ſo ſchwer wiegt, als der Kubikfuß Waſſer, das eigenthümliche Gewicht deſſelben = m iſt. Iſt nun das eigenthümliche Gewicht eines Körpers entweder durch unmittelbare Verſuche oder aus einer Tabelle bekannt, wie man dergleichen in jedem Lehrbuche der Phyſik findet, und iſt das wirkliche Gewicht des Körpers ebenfalls gefunden, ſo läßt ſich hieraus der Inhalt berechnen, wobei blos berückſichtigt werden muß, daß der preuß. Kubikfuß Waſſer 66 preußiſche Pfund wiegt. Es ſei nach preußiſchem Gewichte die Schwere des Körpers = P℔ und das eigenthümliche Gewicht deſſelben = S, ſo nimmt er denſelben Raum ein, welcher von $\frac{P}{S}$ ℔ Waſſer eingenommen wird, und weil 66℔ Waſſer = 1 Kubikfuß, ſo iſt der geſuchte Inhalt des Körpers

$$V = \frac{P}{S} : 66 = \frac{P}{66S} \text{ preußiſche Kubikfuß.}$$

Man findet alſo den Kubikinhalt in preußiſchen Kubikfuß ausgedrückt, wenn man das in preußiſchen Pfunden angegebene Gewicht deſſelben durch das 66fache eigenthümliche Gewicht theilt.

Zuſatz 1. Aus der Gleichung $V = \frac{P}{66S}$ folgt unmittelbar

$$P = 66VS;$$

man kann alſo auch leicht das Gewicht eines Körpers beſtimmen, wenn der Rauminhalt und das eigenthümliche Gewicht deſſelben gegeben ſind. Eben ſo findet man aus dem Rauminhalte und dem Gewichte eines Körpers ſein eigenthümliches Gewicht durch die Formel

$$S = \frac{P}{66V}.$$

Zuſatz 2. Es ſei von dem Körper
A das Gewicht $=P'$, der Inhalt $=V'$ u. das eigenth. Gew. $=S'$
B „ „ $=P''$, „ „ $=V''$ „ „ „ „ $=S''$.
Werden nun beide Körper mit einander verbunden, ſo iſt von dieſem Körper C
das Gewicht $P=P'+P''$ und der Inhalt $V=V'+V''$;
weil nun das eigenthümliche Gewicht S durch die Formel ausgedrückt wird

$$S = \frac{P}{66V},$$

ſo iſt bei dem Körper C auch

$$S = \frac{P' + P''}{66(V' + V'')},$$

wo nun entweder für V' und V'' der Werth durch P', P'', S' und S'' geſetzt werden kann, oder für P' und P'' die Werthe durch V', V'', S' und S'', und es iſt daher auch

$$S = \frac{P' + P''}{66\left[\frac{P'}{66S'} + \frac{P''}{66S''}\right]} = \frac{P' + P''}{\frac{P'}{S'} + \frac{P''}{S''}}$$

oder durch das Volumen ausgedrückt

$$S = \frac{66V'S' + 66V''S''}{66(V' + V'')} = \frac{V'S' + V''S''}{V' + V''}.$$

Man kann alſo, wenn das eigenthümliche Gewicht zweier

Körper gegeben iſt, und außerdem auch der Rauminhalt oder das Gewicht eines jeden, das eigenthümliche Gewicht des Körpers berechnen, der durch die Vereinigung beider gebildet wird.

Zuſatz 3. Hier verdient noch folgende Aufgabe gelöſt zu werden: Es iſt das eigenthümliche Gewicht S' und S'' zweier Körper gegeben; man ſoll beide ſo miteinander verbinden, daß hierdurch ein Körper von dem beſtimmten eigenthümlichen Gewichte $= S$ gebildet wird. Nach welchem Verhältniſſe dem Raume und nach welchem Verhältniſſe dem Gewichte nach, müſſen beide mit einander verbunden werden? Setzt man den Kubikinhalt des durch die Vereinigung beider gebildeten Körpers $= V$, den unbekannten Inhalt des einen Theils $= V'$ und den des andern $= V''$, ſo iſt

$$V = V' + V'', \text{ alſo } V'' = V - V'.$$

Da nun $S = \frac{V'S' + V''S''}{V' + V''} = \frac{V'S' + (V - V')\,S''}{V}$,

ſo iſt auch $VS = V'S' + VS'' - V'S''$,

alſo $V(S - S'') = V'(S' - S'')$

und daher $\frac{V(S - S'')}{S' - S''} = V'$;

eben ſo findet man $\frac{V(S' - S)}{S' - S''} = V''$,

folglich iſt das Verhältniß der Miſchung dem Raume nach

$$V' : V'' = (S - S'') : (S' - S).$$

Es iſt aber $V' = \frac{P'}{66S'}$ und $V'' = \frac{P''}{66S''}$.

und daher auch

$$\frac{P'}{S'} : \frac{P''}{S''} = (S - S'') : (S' - S);$$

hieraus folgt

$$P' : P'' = S'(S - S'') : S''(S' - S),$$

oder auch $P' : P'' = \left(\frac{S - S''}{S''}\right) : \left(\frac{S' - S}{S'}\right)$,

welches das Verhältniß dem Gewichte nach iſt, in welchem beide Körper mit einander verbunden werden müſſen, wenn die Verbindung ein beſtimmtes eigenthümliches Gewicht haben ſoll.

§. 165.

Die unregelmäßigen Körper von bedeutender Größe.

Bei Körpern von bedeutender Größe ſind die in dem vorigen §. angegebenen Regeln, wie leicht einzuſehen iſt, nicht anwendbar, und es müſſen daher für ſolche Körper beſondere Regeln aufgeſtellt werden, durch welche der Inhalt derſelben ermittelt werden kann. Weicht ein ſolcher Körper nicht bedeutend von einer einfachen Form, alſo von einer ſolchen Form ab, für welche der Inhalt durch eine bekannte Formel ſich beſtimmen läßt, ſo kann man dem Körper immer dieſe Form beilegen, und es iſt die Abweichung des hierdurch erhaltenen Reſultats von dem wahren Inhalte des Körpers verhältnißmäßig um ſo unbedeutender, je größer der Körper und je geringer die Abweichung deſſelben von der angenommenen Form iſt. Oefters iſt es auch der Fall, daß ein ſolcher Körper nur unregelmäßig erſcheint, wenn man ihn mit einer einzigen einfachen Form vergleicht, während er in mehrere Theile zerlegt gedacht werden kann, von welchen jeder beſonders nach bekannten Regeln ſich berechnen läßt, und es iſt daher immer zweckmäßig, zu unterſuchen, ob eine ſolche Theilung ſich anwenden läßt oder nicht.

Wenn eine unmittelbare Anwendung der bekannten ſtereometriſchen Regeln bei einem Körper nicht thunlich iſt, ſo bleibt kein anderes Mittel übrig, als daß man denſelben mit einem normalen Parallelepipedon umgiebt, den ſenkrechten Abſtand der einzelnen Punkte der Oberfläche des Körpers von den Flächen des Parallelepipedon mißt, und nun die zur völligen Ausfüllung des Parallelepipedon fehlenden Theile berechnet. Dieſe Berechnung iſt allerdings weitläufig, keineswegs aber ſchwierig, wie ſich aus Folgendem ergiebt: Es ſei mnpq, Fig. 107., eine der Flächen des Parallelepipedon und a, b, c mögen die Projectionen dreier in einer Ebene liegenden Punkte α, β, γ auf der Fläche des Körpers ſein, die dem Parallelogramme mnpq zugewendet iſt, ſo bildet der auszufüllende Raum $abc\alpha\beta\gamma$ ein abgeſtumpftes dreiſeitiges Prisma, deſſen Inhalt für $a\alpha = a$, $b\beta = b$, $c\gamma = c$ und $\Delta abc = G$, ausgedrückt wird durch die Formel

$$X = \left(\frac{a + b + c}{3}\right) G.$$

Theilt man nun die ganze, dem mnpq zugekehrte Fläche des Körpers in Dreiecke, von welchen jedes für ſich in einer Ebene liegt, und beſtimmt den Abſtand aller dieſer Punkte von mnpq, ſo erhält man eben ſo viele abgeſtumpfte Prismen, als Dreiecke auf der Fläche des Körpers angenommen worden ſind, und es kann der Inhalt aller dieſer Prismen leicht berechnet werden. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß dieſes Verfahren bei jeder der ſechs Flächen des Parallelepipedon beſonders angewendet werden muß, und daß daſſelbe auch in dem Falle ausführbar iſt, wenn ein Theil einer Fläche des Körpers gekrümmt ſein ſollte, wobei man nur die einzelnen Punkte hinlänglich nahe bei einander annehmen muß, damit hierdurch die Krümmung als unbedeutend verſchwinde.

Sind auf dieſe Weiſe die ſämmtlichen, zwiſchen den Flächen des Körpers und des Parallelepipedon liegenden abgeſtumpften Prismen berechnet, ſo muß nun noch der Inhalt der leeren Räume an den Kanten und der an den Ecken des Parallelepipedon ermittelt werden.

Liegt in dem Trapez ABba kein Projectionspunkt der Fläche des Körpers, und bezeichnet man die Punkte, in welchen die Projectionen von α und β die an mn anliegende Seitenfläche des Parallelepipedon treffen, mit a′ und b′, ſo iſt $ABba\alpha\beta b'a'$ einer von den leeren Räumen an den Kanten des Parallelepipedon, der von vier rechtwinkligen Paralleltrapezen und zwei Rechtecken eingeſchloſſen wird, und deſſen Inhalt daher auch leicht gefunden werden kann. Die Trapeze ſind

$$ABba,\ a'b'\beta\alpha,\ ab\beta\alpha \text{ und } ABb'a'$$

und die Rechtecke ſind $Aa\alpha a'$ und $Bb\beta b'$.

Dieſer Körper iſt alſo ein Obelisk, für deſſen Inhalt die Formel in §. 75. ſich befindet; nämlich es iſt, für $a\alpha = a$, $aA = a'$, $b\beta = b$, $bB = b'$ und $AB = h$, der Inhalt dieſes Körpers

$$Z = \left(\frac{2aa' + 2bb' + ab' + ba'}{6}\right) \cdot h.$$

Mit Hülfe dieſer Formel laſſen ſich alle, an den Kanten des Parallelepipedon bleibenden leeren Räume berechnen.

Liegt nun endlich auch in der Fläche BnB'b kein Projectionspunkt der Oberfläche des Körpers, und wird die Projection des Punktes β auf der an np anliegenden Seitenfläche des Parallelepipedon mit b'' bezeichnet, ſo iſt BbB'nb'βb''n' einer der leeren Räume an den Ecken des Parallelepipedon, und dieſer ſelbſt iſt ein rechtwinkliges Parallelepipedon, deſſen Inhalt

$$Y = bb'b''$$

ſein muß, wenn bB' = b'' geſetzt wird.

Um alſo den Inhalt eines Körpers mit Hülfe von Coordinaten, welche auf die Flächen eines Parallelepipedon gezogen werden, zu beſtimmen, muß man auf jeder der 6 Flächen deſſelben die, durch abgeſtumpfte dreiſeitige Prismen ausgefüllten leeren Räume berechnen, an jeder der zwölf Kanten müſſen die durch Obelisken ausgefüllten Räume und an jeder der acht Ecken ein daſelbſt leer bleibendes rechtwinkliges Parallelepipedon beſtimmt werden.

Werden alle durch dieſe Rechnung erhaltenen Reſultate addirt, und von dem Inhalte des den Körper umhüllenden Parallelepipedon abgezogen, ſo giebt der Reſt den geſuchten Kubikinhalt des Körpers.

Dieſes Verfahren iſt auch bei Ermittelung des Kubikinhalts einer Grube oder eines Grabens anwendbar, wenn der Boden uneben iſt, und es läßt ſich auf dieſe Weiſe auch der Inhalt eines Teiches ꝛc. berechnen, wobei man den Waſſerſpiegel ſelbſt als Coordinatenfläche annimmt.

Die Beſtimmung der Maſſe eines fließenden Waſſers geſchieht ganz einfach dadurch, daß man das Querprofil des Kanals, durch welchen das Waſſer ſtrömt, mißt, und die Geſchwindigkeit des Laufes beobachtet. Iſt die Fläche des Querprofils eines Stromes oder Kanals = F Quadratfuß, und die Geſchwindigkeit des Laufes an der Stelle, wo das Querprofil genommen worden iſt, = m Fuß in der Minute, ſo iſt die Maſſe des in jeder Minute an dieſer Stelle durchſtrömenden Waſſers einem Prisma gleich, deſſen Grundfläche = F und deſſen Höhe = m iſt, und es durchſtrömen dieſe Stelle in jeder Minute alſo mF und in jeder Stunde 60mF Kubikfuß Waſſer. Das Querprofil wird, wie bekannt, dadurch

gefunden, daß man eine Linie quer über den Fluß auf der Oberfläche deſſelben zieht, an einzelnen Punkten derſelben durch Senklothe die Tiefe des Bettes beſtimmt, und nun das Profil durch die auf dieſe Weiſe erhaltenen Ordinaten entwirft ꝛc.

Zuſatz 1. Der Inhalt eines großen, unregelmäßigen, feſten Körpers wird, wenn kein bequemeres Mittel ſich darbietet, dadurch beſtimmt, daß man ihn mit einem Parallelepipedon umgiebt; es läßt ſich die Weitläufigkeit dieſes Verfahrens nur alsdann abkürzen, wenn der Körper eine ganz ebene Fläche hat, und man die eine Fläche des Parallelepipedon mit derſelben zuſammen fallen läßt. Soll der Inhalt eines großen hohlen Körpers, z. B. einer großen Grube, deren Boden unregelmäßig iſt, beſtimmt werden, ſo kann man, wenn der obere Rand derſelben, als in einer Ebene liegend ſich annehmen läßt, den Abſtand der einzelnen Punkte des Bodens von der Fläche dieſes Randes meſſen, und auf dieſe Weiſe den Inhalt der ganzen Grube in abgeſtumpfte dreiſeitige Prismen zerlegen: ein Verfahren, das in jedem Falle einfacher iſt, als das im §. angegebene. Es iſt dieſes Verfahren aber nur bei hohlen Körpern und bei Flüſſen, z. B. bei einem Teiche anwendbar; feſte Körper können auf dieſe Weiſe nicht gemeſſen werden, weil hierbei erforderlich iſt, Linien durch den Körper hindurch zu ziehen.

Zuſatz 2. Wenn zwei Körper A und B eine ähnliche Form haben, und a und a + d homologe Dimenſionen derſelben ſind, ſo findet, wie bekannt, die Proportion ſtatt

$$A : B = a^3 : (a + d)^3$$

und für md = a iſt

$$A : B = a^3 : a^3 \left(1 + \frac{1}{m}\right)^3 = m^3 : (m + 1)^3,$$

und es iſt daher auch $A : B - A = m^3 : 3m^2 + 3m + 1$,

$$\text{alſo } B - A = \left(\frac{3m^2 + 3m + 1}{m^3}\right) A.$$

Hat man hiernach bei einem auszumeſſenden Körper die Ueberzeugung, daß die einzelnen Linien bis auf den mten Theil ihrer Länge richtig ſind, ſo giebt der hier gefundene Werth von B — A an, um wieviel der für den Inhalt dieſes Körpers gefundene Ausdruck von dem wahren Inhalte abweichen

kann. Sind nämlich die Linien auf $\frac{1}{m}$ ihrer Länge richtig, ſo iſt der Inhalt bis auf den $\left(\frac{3m^2 + 3m + 1}{m^3}\right)$ten Theil deſſelben zuverläſſig. Weiß man nun z. B., daß $m = 30$ wenigſtens angenommen werden kann, ſo iſt

$$\frac{3m^2 + 3m + 1}{m^3} = \frac{2791}{27000} = \frac{31}{300} + \frac{1}{27000};$$

der Inhalt iſt ſonach hier auf $\frac{1}{10}$ des gefundenen Reſultates ungefähr zuverläſſig.

Da $\frac{3m^2 + 3m + 1}{m^3} = \frac{3m^2 + 3m}{m^3} + \frac{1}{m^3} = \frac{3(m + 1)}{m^2} + \frac{1}{m^3}$,

ſo kann man ohne merklichen Fehler $\frac{3(m + 1)}{m^2}$ als die Verhältnißzahl annehmen, und es läßt ſich nun auch leicht berechnen, mit welcher Genauigkeit die einzelnen Linien gemeſſen werden müſſen, wenn das erhaltene Reſultat einen zum Voraus beſtimmten Grad von Zuverläſſigkeit haben ſoll. Will man ein, bis auf $\frac{1}{100}$ zuverläſſiges Reſultat haben, ſo muß ſein

$$\frac{3(m + 1)}{m^2} = \frac{1}{100},$$

$$\text{alſo } m^2 = 300\,m + 300$$

$$\text{und daher } m = 150 + \sqrt{22800} = 320 \text{ circa.}$$

Die einzelnen Linien müſſen alſo bis $\frac{1}{320}$ ihrer Länge genau gemeſſen ſein, wenn das Reſultat nicht mehr als $\frac{1}{100}$ von dem wahren Inhalte abweichen ſoll.

Zweiter Abſchnitt.

Theorie der Berechnung der Gewölbe.

§. 166.

Erläuterungen.

Unter einem Gewölbe wird überhaupt die ſteinerne Decke eines Gemaches verſtanden, und wenn im gemeinen Sprachgebrauche auch von gewölbten Decken die Rede iſt, die nicht aus Steinen conſtruirt ſind, ſo iſt dieſe Benennung wenigſtens in ſo fern nicht paſſend, als nur bei ſteinernen Decken die den Gewölben eigenthümliche Conſtruction angewendet werden muß, um ihnen Feſtigkeit zu geben. Dieſe Conſtruction beſteht darin, daß die Steine, welche die Decke bilden, keilförmig aneinander geſetzt werden, ſo daß keiner nach innen ausweichen kann, und daß das Ausweichen der ganzen Decke durch hinreichend feſte Widerlage verhindert wird. Um dem Gewölbe die erforderliche Feſtigkeit zu verſchaffen, iſt es nöthig, daſſelbe nach irgend einer Curve gekrümmt darzuſtellen: es giebt zwar auch ganz ebene Gewölbe, doch ſind dieſelben, wegen der erforderlichen ſtarken Widerlage, koſtſpielig, und ſie werden daher nur äußerſt ſelten angetroffen.

Man kann die Gewölbe, ihrer Form nach, in einfache und in zuſammengeſetzte unterſcheiden, von welchen die erſteren blos aus einem ſphäriſchen oder aus cylindriſchen Segmenten beſtehen, und die letzteren aus verſchiedenen Segmenten zuſammengeſetzt ſind.

Die Baſis eines ſphäriſchen Gewölbes iſt ein Kreis, und es werden dieſelben Kugelgewölbe oder auch Helmkeſſel und Kuppelgewölbe genannt. Dieſelben haben entweder die Geſtalt einer hohlen Halbkugel, oder die eines halben Elypſoid: in dieſem letztern Falle nennt man ſie gedrückt, wenn der Radius der Grundfläche der halben großen Axe, und erhöht, wenn er der halben kleinen Axe der Elypſe gleich iſt. Die cylindriſchen Gewölbe, welche allgemein Tonnengewölbe genannt werden, haben die Form eines hohlen halben Cylinders, und es iſt der Querſchnitt derſelben ebenfalls ent-

weder ein Halbkreis, oder eine halbe Elypſe oder vielmehr ein halbes Oval: dieſe letztern können wiederum entweder gedrückte oder erhöhte Gewölbe ſein. Uebrigens kann der Querſchnitt eines Tonnengewölbes auch blos ein Segment eines Kreiſes ſein, und es kommen dergleichen auch vor, deren Querſchnitt eine Parabel, Cykloide oder Kettenlinie iſt ꝛc.

Zuſammengeſetzte Gewölbe ſind von mannigfach verſchiedener Form denkbar, und dieſelben laſſen ſich daher hier nicht vollſtändig aufzählen: die folgenden drei Gattungen ſind indeſſen die am häufigſten vorkommenden, und es iſt alſo auch ausreichend, wenn nur die, zu dieſen Gattungen gehörigen hier näher in Betracht gezogen werden. Dieſe Gattungen ſind: 1) Die gebrochenen Tonnengewölbe, welche entweder der Länge nach gebrochen ſind, ſo daß der Querſchnitt aus zwei in einem Winkel zuſammenſtoßenden Bogen beſteht, und ein ſolches wird ein zugeſpitztes oder auch ein gothiſches Tonnengewölbe genannt; oder ſie ſind der Quere nach gebrochen, ſo daß die Enden derſelben ſchief abgeſchnitten oder auch wohl mit einem halben Kuppelgewölbe geſchloſſen ſind, und dieſe nennt man Muldengewölbe. — 2) Die Kloſtergewölbe, welche auch Hauben- oder Kappengewölbe genannt werden, gehören zu den kuppelförmigen Körpern, und entſtehen, wenn von allen Ecken der Figur, welche die Baſis bildet, (gewöhnlich ein Viereck) Bogen an einen beſtimmten, oberhalb der Figur angenommenen Punkt gezogen, und die Zwiſchenräume zwiſchen je zwei dieſer Bogen in der, durch die Bogen beſtimmten Krümmung ausgemauert werden. Ein jedes ſolches Feld ſchließt ſich an das nächſtfolgende durch den, beiden gemeinſchaftlichen Bogen an, und man nennt dieſe Bogen daher die Grathen, Kanten oder Rippen des Gewölbes. — 3) Die Kreuzgewölbe entſtehen, wenn zwei Tonnengewölbe ſich quer durchſchneiden, und die von dem Durchſchnitte entſtehenden Ecken innerhalb des überwölbten Raumes ſich befinden: iſt dieſes nicht der Fall, ſo gehört es zu den Kloſtergewölben.

Die Mauern, welche den Platz umfaſſen, der überwölbt werden ſoll, nennt man die Sargen, die alſo die Widerlagen bilden, worauf das ganze Gewölbe ruhet; die Stärke derſelben hängt von der Art und Weiſe ab, wie der Druck des

Gewölbes auf dieſe Widerlagen vertheilt iſt. Dieſe Vertheilung iſt bei den verſchiedenen Gattungen von Gewölben verſchieden: ſo hat ein Kugel- und ein Kloſtergewölbe Widerlagen von allen Seiten, das Tonnengewölbe hat dergleichen nur von zwei Seiten, und das Kreuzgewölbe ruhet blos auf einzelnen Pfeilern.

Die Lehre von den Gewölben iſt weitläufig und ſchwierig, indem bei der Conſtruction eines Gewölbes, wenn bereits die, dem gegebenen Raume und dem Zwecke des Gebäudes entſprechende Form beſtimmt iſt, nun nicht nur, was die techniſche Ausführung anbelangt, das Anfertigen der erforderlichen Lehrgerüſte und das Zuhauen der Steine in vielen Fällen nicht einfach iſt, ſondern auch die ſtatiſche Theorie, nach welcher die erforderliche Stärke der Widerlagen beſtimmt werden muß, zu den ſchwierigen Theilen der mechaniſchen Wiſſenſchaft gehört. Dieſe Theorie wird den Gegenſtand eines eigenen Abſchnittes in dem folgenden Bande dieſes Werkes bilden; hier kann nur von der Berechnung des Inhalts eines ſolchen Gewölbes die Rede ſein, und es kommt daher nur darauf an, die Fragen zu beantworten: wie groß iſt der hohle Raum des Gewölbes, wie groß iſt der maſſive Theil deſſelben, und welchen Raum beträgt die innere Fläche?

Zuſatz. Da von dem Inhalte des maſſiven Theils eines Gewölbes die Menge der erforderlichen Materialien zu dem Bau deſſelben abhängt, ſo erfordert dieſe Berechnung allerdings viele Genauigkeit; doch kommt es hierbei natürlich nicht auf einzelne Kubikzoll an, und man kann aus dieſem Grunde die Rechnung in vielen Fällen bedeutend abkürzen, ohne dadurch eine ſo große Differenz in dem Reſultate zu erhalten, daß ſie berückſichtigt werden müßte. Beſonders verdient hier die abkürzende Regel angeführt zu werden, daß man bei der Berechnung eines Gewölbes, das nicht überall gleiche Stärke hat, eine mittlere, durchgehends gleiche Stärke deſſelben annehmen kann; dieſe iſt alsdann das arithmetiſche Mittel zwiſchen der ſtärkſten und ſchwächſten Stelle deſſelben.

§. 167.

Von den einfachen Gewölben.

1. Wenn ein Kugelgewölbe die Form einer Halbkugel

hat

hat, und es iſt der Radius der innern Höhlung $= \varrho$ und der der äußern Fläche, welche hier als parallel zu der innern angenommen werden ſoll, = R, und man ſetzt den Inhalt der innern Halbkugel = k, den der äußern = K und den maſſiven Theil des Gewölbes = M, ſo iſt

$$M = K - k,\ K = \frac{2R^3\pi}{3} \text{ und } k = \frac{2\varrho^3\pi}{3},$$

$$\text{und daher } M = \tfrac{2}{3}\pi[R^3 - \varrho^3].$$

Wird aber die Stärke des Gewölbes mit δ bezeichnet, wo alſo δ den Abſtand der innern und äußern Fläche von einander ausdrückt, ſo iſt $R = \varrho + \delta$, und daher auch

$$\begin{aligned} M &= \tfrac{2}{3}\pi[(\varrho + \delta)^3 - \varrho^3] \\ &= \tfrac{2}{3}\pi[3\varrho^2\delta + 3\varrho\delta^2 + \delta^3], \end{aligned}$$

nämlich es iſt

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \cdot \varrho\delta(\varrho + \delta) + \frac{2\delta^3\pi}{3} \\ &= 2R\varrho\delta\pi + \frac{2\delta^3\pi}{3} \end{aligned}$$

die Formel für den Kubikinhalt des maſſiven Theils von dem Kugelgewölbe.

Die innere Fläche deſſelben iſt bekanntlich $= 2\varrho^2\pi$.

2. Iſt der Querſchnitt eines Kuppelgewölbes eine halbe Elypſe, und man ſetzt den Radius der Grundfläche für die innere Höhlung = a und für die äußere Fläche $= A = a + \delta$, die Höhe der innern Höhlung = b, der äußern $b + \delta = B$, welches alſo die zweite Halbaxe der äußern Elypſe iſt, ſo wird

$$k = \tfrac{2}{3}a^2b\pi \text{ und } K = \tfrac{2}{3}A^2B\pi,$$

und es iſt daher jetzt

$$M = \tfrac{2}{3}\pi[A^2B - a^2b],$$

wo nun ebenfalls für A und B die Werthe geſetzt werden können $A = a + \delta$ und $B = b + \delta$.

Die Formeln für die Oberfläche des länglichen ſowohl, als des abgeplatteten Elypſoids ſind zwar bereits §. 130. entwickelt worden; allein es wird nicht überflüſſig ſein, dieſelben zur Wiederholung hier wenigſtens für das erſtere noch beſonders anzugeben:

Es ſei, Fig. 68., $ca = a$, $cd = b$, $cm = x$ und $mn = y$, ſo iſt $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

$$\text{und daher } ydy = -\frac{b^2}{a^2}xdx,$$

$$\text{es iſt alſo } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{b^4x^2}{a^4y^2}$$

und weil die Länge eines Bogens S einer Curve ausgedrückt wird durch

$$dS = dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)},$$

ſo iſt auch $dS = dx \sqrt{\left[1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right]} = \frac{dx}{a^2y}\sqrt{[a^4y^2 + b^4x^2]}$

$$\text{und es iſt daher } ydS = \frac{dx}{a^2}\sqrt{(a^4y^2 + b^4x^2)}.$$

Die krumme Oberfläche Z des durch Axendrehung erzeugten Körpers iſt bekanntlich

$$Z = 2\pi\int ydS$$

$$\text{und daher } Z = \frac{2\pi}{a^2}\int dx\sqrt{(a^4y^2 + b^4x^2)},$$

oder weil $a^2y^2 = b^2(a^2 - x^2)$, ſo wird

$$Z = \frac{2\pi}{a^2}\int dx\sqrt{[a^2b^2(a^2 - x^2) + b^4x^2]}$$

$$= \frac{2b\pi}{a^2}\int dx\sqrt{[a^4 - (a^2 - b^2)x^2]}$$

$$= 2b\pi\int dx\sqrt{\left[1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^4}\right)x^2\right]},$$

und für $a^2 - b^2 = c^2$ wird

$$Z = 2b\pi\int dx\sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{a^4}x^2\right)}.$$

$$\text{Nun iſt } \int dx\sqrt{X} = \frac{x\sqrt{X}}{2} + \tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$\text{und } \int\frac{dx}{\sqrt{X}} = \int\frac{dx}{\sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{a^4}x^2\right)}} = \frac{a^2}{c}\text{ Arc sin }\frac{cx}{a^2};$$

alſo wird $Z = 2b\pi\left[\frac{x}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{a^4}x^2\right)} + \frac{a^2}{2c}\text{ Arc sin }\frac{cx}{a^2}\right]$, nämlich es iſt

$$Z = \frac{bx\pi}{a^2} \sqrt{(a^4 - c^2x^2)} + \frac{a^2b\pi}{c} \text{ Arc sin } \frac{cx}{a^2},$$

und für $x = a$ erhält man hieraus den Inhalt der innern Fläche eines erhöhten kuppelförmigen Gewölbes

$$Z = \frac{ab\pi}{a^2} \sqrt{(a^4 - a^2c^2)} + \frac{a^2b\pi}{c} \text{ Arc sin } \frac{c}{a},$$

und weil $c^2 = a^2 - b^2$, ſo wird $\sqrt{(a^4 - a^2c^2)} = ab$ und daher

$$Z = b^2\pi + \frac{a^2b\pi}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \text{ Arc sin } \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)}.$$

3. Ein Tonnengewölbe iſt immer ein concentriſch ausgehöhltes Cylinderſegment, nur daß hierbei die Grundfläche des vollſtändigen Cylinders nicht nothwendigerweiſe ein Kreis zu ſein braucht. Es ſei ABDabd, Fig. 108., der Querſchnitt eines ſolchen Gewölbes, ſo iſt, wenn man die Fläche ABD = G, abd = g und die Länge des ganzen Gewölbes = H ſetzt, das volle Cylinderſegment, zu welchem ABD als Baſis gehört,

$$K = GH, \text{ und } k = gH$$

iſt der hohle Raum des Tonnengewölbes, welcher abd zur Grundfläche hat; es wird daher der maſſive Theil **M** des Gewölbes ausgedrückt durch die Formel

$$M = H(G - g),$$

wo nun die Werthe der Größen G und g von der Form der Curven ABD und abd abhängen, welche den Querſchnitt bilden.

Die innere Fläche Z wird, wenn man die Länge des Bogens abd = S ſetzt, ausgedrückt durch

$$Z = HS,$$

und es laſſen ſich alſo, durch die hier angegebenen Werthe von M und Z, die bei einem Tonnengewölbe vorkommenden Größen berechnen.

4. Sind die Curven ABD und abd Halbkreiſe, ſo iſt für $ca = \varrho$ und $cA = R$

$$G = \tfrac{1}{2}R^2\pi,\ g = \tfrac{1}{2}\varrho^2\pi \text{ und } S = \varrho\pi,$$

folglich iſt in dieſem Falle der Inhalt des maſſiven Theils des Tonnengewölbes

$$M = \tfrac{1}{2}H(R^2 - \varrho^2)\pi = \tfrac{1}{2}H(R + \varrho)(R - \varrho)\pi,$$

und weil $R - \varrho = Aa = \delta$ die Dicke des Gewölbes iſt, ſo wird

$$M = H\left(\frac{R+\varrho}{2}\right)\delta\pi;$$

die innere Fläche eines ſolchen Gewölbes iſt

$$Z = H\varrho\pi.$$

5. Sind ABD und abd ein paar halbe Elypſen, ſo iſt, wenn man ca = a und cb = b ſetzt, $g = \frac{1}{2}ab\pi$,

und für cA = A und cB = B iſt $G = \frac{1}{2}AB\pi$;

es wird daher

$$M = \tfrac{1}{2}H\pi(AB - ab),$$

wobei es einerlei iſt, ob das Gewölbe eine erhöhete oder eine gedrückte Form hat, ob alſo B und b oder A und a die halben großen Axen ſind.

Um die innere Fläche des Gewölbes zu erhalten, muß die Länge der halben Elypſe abd bekannt ſein, und da ſich der Werth hiervon nur durch Näherung finden läßt, ſo erhält man auch nur einen Näherungsausdruck für dieſe Fläche; da indeſſen hier nicht die ſtrengſte Genauigkeit verlangt wird, ſo iſt es zur Beſtimmung dieſer Fläche immer hinreichend, wenn man die Länge S des Bogens abd durch eine unmittelbare Meſſung zu beſtimmen ſucht, und hierauf die Fläche durch die Formel Z = HS berechnet. Dieſe Meſſung von abd kann in allen Fällen angewendet werden, was für eine Curve der Durchſchnitt auch immer bilden mag.

6. Iſt der Kreisbogen A′BD′ der Querſchnitt des Tonnengewölbes, ſo iſt für bc′ = b, Bc′ = B, c′a′ = a und c′A′ = A

$$b : a = a : 2\varrho - b \text{ und } B : A = A : 2R - B,$$

$$\text{alſo } \varrho = \frac{a^2 + b^2}{2b} \text{ und } R = \frac{A^2 + B^2}{2B},$$

und es iſt nun der Kreisabſchnitt a′bd′ = g

$$= \varrho \times (a'b) - (cc')(c'a');$$

$$\text{weil aber } a'b = \varrho \text{ Arc sin}\left(\frac{a'c'}{\varrho}\right) = \varrho \text{ Arc sin } \frac{a}{\varrho},$$

$$\text{ſo wird } g = \varrho^2 \text{ Arc sin} \frac{a}{\varrho} - (\varrho - b)\,a;$$

$$\text{eben ſo iſt } G = R^2 \text{ Arc sin } \frac{A}{R} - (R - B)\,A,$$

und daher $M = H(G - g)$

$$= H\left[R^2 \operatorname{Arc\,sin}\frac{A}{R} - \varrho^2 \operatorname{Arc\,sin}\frac{a}{\varrho}\right]$$
$$- H[A(R-B) - a(\varrho - b)],$$

ein Ausdruck, der eine einfachere Form erhält, wenn man die Länge der Bogen a′b und A′B durch Meſſung beſtimmt. Uebrigens iſt hier zwar $Aa = Bb = Dd$, aber $A'a' = D'd'$ hat einen hiervon etwas abweichenden Werth, und es iſt deswegen nicht ganz richtig, wenn man $Bb = \delta = A'a'$ ſetzt, aſo wenn

$\delta = B - b = R - \varrho$ als der Werth von $A - a$

angenommen wird. Der Unterſchied von

$$Bb = R - \varrho = \delta \text{ und } A'a' = A - a = x$$

läßt ſich auf folgende Art beſtimmen:

Es iſt, wenn man $cc' = c$ ſetzt,

$$A^2 = R^2 - c^2$$
$$\text{und } a^2 = \varrho^2 - c^2,$$
$$\text{alſo } A^2 - a^2 = R^2 - \varrho^2,$$

nämlich es iſt

$$(A + a)(A - a) = (R + \varrho)(R - \varrho) = (R + \varrho)\delta,$$

$$\text{und daher } A - a = x = \left(\frac{R + \varrho}{A + a}\right)\delta.$$

Da nun $R + \varrho > A + a$, ſo iſt auch $x > \delta$.

7. Der Inhalt eines gothiſchen Tonnengewölbes läßt ſich ebenfalls leicht beſtimmen. Iſt ABDabd, Fig. 109., ein Durchſchnitt deſſelben, ſo liegen die Mittelpunkte der Kreisbogen ab, AB, db und DB immer in der Grundlinie AD, und es iſt, wenn m und n dieſe Mittelpunkte ſind, $cm = cn$. Setzt man nun $ca = a$, $cb = b$ und den Radius $na = \varrho$, ſo iſt hier $a : b = b : 2\varrho - a$, alſo $\varrho = \frac{a^2 + b^2}{2a}$; die Fläche bac iſt nur in ſo fern von ba′c′, Fig. 108., verſchieden, daß, Fig. 109., b die halbe Sehne und a die Höhe des Bogens iſt, während, Fig. 108., umgekehrt a die halbe Sehne iſt und b die Höhe des Bogens. Die in No. 6. für g und G gefundenen Werthe gelten daher auch hier für die Flächen abd und ABD, Fig. 109., wenn man in den dortigen Formeln a mit b und A mit B verwechſelt, für $cA = A$ und $cB = B$; es iſt daher bei dem gothiſchen Gewölbe für

$$\varrho = \frac{a^2 + b^2}{2a} \text{ und } R = \frac{A^2 + B^2}{2A},$$

$$g = \varrho^2 \text{ Arc sin } \frac{b}{\varrho} - (\varrho - a) b$$

$$\text{und } G = R^2 \text{ Arc sin } \frac{B}{R} - (R - A)B,$$

und es wird daher der Inhalt des maſſiven Theils

$$M = H(G - g) =$$

$$H\left[R^2 \text{ Arc sin } \frac{B}{R} - \varrho^2 \text{ Arc sin } \frac{b}{\varrho}\right] - H[B(R-A) - b(\varrho-a)].$$

Die innere Fläche iſt hier wie immer $= HS$, wenn $S = ab + bd = 2(ab)$, und es iſt die Länge von $ab = \varrho \text{ Arc sin } \frac{b}{\varrho}$ eine Länge, die, ſtatt berechnet zu werden, auch unmittelbar durch Meſſung beſtimmt werden kann, ohne daß ein bedeutend abweichendes Reſultat erhalten wird.

§. 168.

Die Korbbogen.

Man nennt Korbbogen die aus verſchiedenen Mittelpunkten mit verſchiedenen Halbmeſſern beſchriebenen Curven, und es werden dieſelben faſt allgemein ſtatt der halben Elypſen bei Gewölben gebraucht, weil die Elypſen, beſonders wenn ſie in Verhältniß zu ihren Axen eine große Excentricität haben, ſich an beiden Enden zu ſehr krümmen, dadurch eine unangenehme Form erhalten, und überdies auch nicht ſo viel Raum faſſen als die Korbbogen, was beſonders bei Brückengewölben zu berückſichtigen iſt.

Die Conſtruction der Korbbogen iſt zwar nicht verſchieden von der Beſchreibung eines Ovals, wie Fig. 76., doch iſt bei den für das Oval angegebenen Regeln vorausgeſetzt, daß man die Radien der verſchiedenen Bogen kenne: ſtatt deſſen iſt aber, wenn dieſe Bogen bei Gewölben angewendet werden ſollen, die Spannung dδ und die Wölbungshöhe gh gegeben, und aus dieſen Linien ſind die Radien zu beſtimmen. Hierzu kommt noch, daß dergleichen Korbbogen auch aus mehr als aus drei verſchiedenen Mittelpunkten beſchrieben werden, wo denn eine beſondere Conſtruction zu ermitteln iſt. Die ge-

bräuchlichſten Korbbogen ſind indeſſen die aus drei und die aus fünf Mittelpunkten beſchriebenen, weswegen auch dieſe hier beſonders näher in Betracht gezogen werden ſollen. Bei ſehr flachen Gewölben findet man indeſſen auch dergleichen Bogen, die aus 7, 9 oder gar aus 11 Mittelpunkten beſchrieben ſind. Das letztere iſt bei der von Peronnet gebauten Brücke zu Neuilly der Fall.

Iſt adb, Fig. 110., die Wölbungslinie, ac = cb = a die halbe Spannung und cd = h die Wölbungshöhe, und ſoll der Bogen bdb aus drei verſchiedenen Mittelpunkten beſchrieben werden, ſo iſt, bevor die Radien und die Mittelpunkte gefunden werden können, zu beſtimmen, wieviel Grad jeder der drei Bogen halten ſoll. Es wird die Conſtruction gewöhnlich ſo gemacht, daß jeder der drei Bogen $a\alpha$, $\alpha d\alpha'$ und $\alpha' b$ gleichviel, nämlich jeder 60^0 hält, alſo $a\alpha = b\alpha' = 60^0$ und $\alpha d = d\alpha' = 30^0$. Bei dieſer Vorausſetzung läßt ſich nun aus den gegebenen Linien ac = cb und cd die Wölbungslinie auf folgende Art beſchreiben: Man beſchreibe über ac das gleichſeitige Dreieck ace, nehme auf der einen Seite ce deſſelben das Stück $c\delta$ = cd, ziehe durch d und δ eine gerade Linie, welche die ae in α ſchneidet, ziehe durch α die Linie αm parallel zu ec, und verlängere nun dc und αm, bis ſie ſich in n ſchneiden: ſo iſt m der Mittelpunkt und ma = mα der Radius des Bogens $a\alpha$, und n iſt der Mittelpunkt und nα = nd der Radius von $\alpha d\alpha'$; ferner iſt nun auch, wenn man cm' = cm nimmt, m' der Mittelpunkt des dritten Bogens α'b, welcher dem erſten gleich iſt. Die Richtigkeit dieſer Conſtruction iſt leicht einzuſehen: denn amα iſt ein gleichſeitiges Dreieck, alſo ma = mα und Bogen aα = 60^0; ferner iſt das Dreieck dcδ gleichſchenklig, alſo $\angle$d = cδd = $\angle\alpha$ und daher auch nα = nd, und weil $\angle$n = mcd — amα = $90^0 - 60^0$, ſo iſt Bogen αd = 30^0; da nun überdies α, m und n in derſelben geraden Linie liegen, ſo gehen die Bogen aα und αd ſtetig in einander über, ohne daß an dem Punkte α, wo beide zuſammenſtoßen, ein Winkel gebildet wird.

Auch durch Rechnung läßt ſich die Länge der beiden Radien ma = r und nd = R leicht beſtimmen; denn es iſt in

dem rechtwinkligen Dreieck mcn der Winkel bei n = 30° und daher mc = ½(mn). Da nun

$$mc = a - r \text{ und } mn = R - r,$$

$$\text{ſo folgt } a - r = \frac{R - r}{2} \text{ und daher } R = 2a - r;$$

es iſt alſo für am = r die mb = R.

$$\text{Ferner iſt } (mn)^2 = (mc)^2 + (nc)^2$$

$$\text{und daher auch } (R - r)^2 = (a - r)^2 + (R - h)^2,$$

$$\text{alſo } -2Rr = a^2 - 2ar - 2Rh + h^2$$

$$\text{und } 2Rh + 2ar - 2Rr = a^2 + h^2$$

und, wenn hier für R der Werth geſetzt wird = 2a − r,

$$2h(2a - r) + 2ar - 2r(2a - r) = a^2 + h^2,$$

nämlich es iſt

$$4ah - 2hr - 2ar + 2r^2 = a^2 + h^2,$$

$$\text{alſo } r^2 - (a + h)r = \frac{a^2 + h^2 - 4ah}{2}$$

$$\text{und hiernach } \left(\frac{a + h}{2} - r\right)^2 = \left(\frac{a + h}{2}\right)^2 + \frac{a^2 + h^2 - 4ah}{2}$$

$$\text{oder } \left(\frac{a + h}{2} - r\right)^2 = \frac{3a^2 + 3h^2 - 6ah}{4} = 3\left(\frac{a - h}{2}\right)^2$$

$$\text{und hieraus folgt } \frac{a + h}{2} - r = \left(\frac{a - h}{2}\right)\sqrt{3},$$

$$\text{folglich iſt } r = \frac{a + h - (a - h)\sqrt{3}}{2}.$$

Hierdurch laſſen ſich alſo, wenn die Spannung ab und die Wölbungshöhe cd gegeben iſt, die Länge der Radien finden. Auch die Länge der Wölbungslinie iſt hierdurch beſtimmt, denn es iſt

$$a\alpha = b\alpha' = \tfrac{1}{6} \times 2r\pi = \frac{r\pi}{3} \text{ und } a\alpha' = \tfrac{1}{6} \times 2R\pi = \frac{R\pi}{3},$$

und daher iſt die ganze Linie

$$adb = S = \left(\frac{2r + R}{3}\right)\pi,$$

$$\text{und für } \frac{2r + R}{3} = \varrho \text{ iſt } S = \varrho\pi;$$

die Wölbungslinie iſt alſo der Länge eines Halbkreiſes gleich, der das arithmetiſche Mittel zwiſchen den drei Radien des Korbbogens zum Halbmeſſer hat.

Es iſt der Kreisausſchnitt $am\alpha = \frac{1}{6}r^2\pi$, der Ausſchnitt $\alpha nd = \frac{1}{12}R^2\pi$ und das Dreieck $ncm = \frac{1}{2}(nc)(cm) = \frac{1}{2}(R-h)(a-r)$, folglich iſt die Fläche

$$acd = \frac{1}{6}r^2\pi + \frac{1}{12}R^2\pi - \frac{1}{2}(R-h)(a-r),$$

und daher die ganze Fläche

$$adb = g = \frac{(2r^2 + R^2)\pi}{6} - (R-h)(a-r).$$

Iſt nun adb der Durchſchnitt eines Tonnengewölbes, ſo braucht dieſer Ausdruck nur mit der Länge H deſſelben multiplicirt zu werden, um den inneren Raum des Gewölbes zu erhalten, und ſind r' und R' die Radien für die äußere Wölbungslinie, ſo läßt ſich auch der Inhalt des ganzen Gewölbes mit Einſchluß des maſſiven Theils berechnen; beide Reſultate, von einander abgezogen, geben den Kubikinhalt des maſſiven Gewölbes.

Da die Länge des ganzen Bogens $adb = S = \left(\frac{2r+R}{3}\right)\pi$, ſo iſt die innere Fläche des Tonnengewölbes, welches adb zum Durchſchnitt hat,

$$Z = H\left(\frac{2r+R}{3}\right)\pi.$$

Soll die Wölbungslinie, von welcher, Fig. 111., cd die Höhe und ac die halbe Spannung iſt, aus fünf verſchiedenen Mittelpunkten beſchrieben werden, ſo daß alſo an jedem Ende ein Bogen = ae, alsdann ein Bogen = ef und in der Mitte ein Bogen, von welchem fd die Hälfte iſt, die Curve bildet, ſo müſſen, wenn m der Mittelpunkt von ae und p der von ef iſt, dieſe Punkte mit dem Vereinigungspunkt e beider Bogen in gerader Linie liegen; eben ſo muß der Mittelpunkt q des Bogens fd mit f und p in gerader Linie liegen, und es iſt die zweite Hälfte der Curve der erſten hier dargeſtellten ad vollkommen gleich. Bei einem aus fünf Mittelpunkten beſchriebenen Korbbogen nimmt man das Verhältniß der einzelnen Bogen ſo an, daß ae = 60°, ef = 15° und fd = 15°; es wird alſo für die ganze Curve jeder Bogen an den beiden Endpunkten = 60°, jeder der beiden folgenden = 15° und der mittelſte = 30°. Die Ermittelung der Lage der Mittelpunkte und der Größe der verſchiedenen Radien geſchieht nun,

wenn die Spannung und die Wölbungshöhe gegeben ſind, auf folgende Art: Man nimmt am um den funfzehnten Theil der ganzen Spannung kleiner als cd, beſchreibt über am das gleichſeitige Dreieck ame, verlängert em rückwärts, bis ſie mit der verlängerten dc in n zuſammentrifft, nimmt mp = 2(am) und nq = np, ſo ſind m, p und q die Mittelpunkte, ma = me, pe = pf und qf = qd die Radien der drei Bogen ae, ef, fd, welche die Hälfte der Curve bilden. Die Richtigkeit dieſer Conſtruction läßt ſich auf folgende Art nachweiſen: Es iſt das Dreieck ame gleichſeitig und daher Bogen ae = 60^0, alſo $\angle$mnc = 30^0 und ſonach $\angle$pnq = 150^0; weil nun np = nq, ſo iſt p = q = 15^0, und es hält daher auch jeder der beiden Bogen ef und fd, 15^0, wie es ſein ſoll. Um nun aber zu zeigen, daß zu der conſtruirten Curve die gegebene Spannung und Wölbungshöhe gehören, ſetze man am = ϱ, pe = r, qf = R, ac = a und cd = h, ſo iſt cm = a − ϱ, und weil in dem rechtwinkligen Dreiecke mcn der Winkel bei n = 30^0, ſo iſt mn = 2(mc), alſo mn = 2(a − ϱ), und vermöge der Conſtruction iſt mp = 2(ma) = 2ϱ und daher pn = 2(a − ϱ) − 2ϱ = 2a − 4ϱ. Ferner iſt

$$cn = \sqrt{(mn)^2 - (mc)^2}$$
$$= \sqrt{[4(a-\varrho)^2 - (a-\varrho)^2]} = (a-\varrho)\sqrt{3},$$

oder, weil cos $30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$$cn = 2(a-\varrho)\cos 30^0,$$

und es iſt daher

$$qd = qn + nc + cd$$
$$= 2a - 4\varrho + 2(a-\varrho)\cos 30^0 + h.$$

Hiernach iſt $\varrho = \varrho$, $r = 3\varrho$ und

$$R = 2a(1 + \cos 30^0) - 2\varrho(2 + \cos 30^0) + h.$$

Da pnq ein gleichſchenkliges Dreieck iſt, ſo hat man

$$pn : \tfrac{1}{2}(pq) = 1 : \cos p^0,$$

alſo $2a - 4\varrho : \frac{1}{2}(pq) = 1 : \cos 15^0$,

folglich iſt $pq = (4a - 8\varrho)\cos 15^0$,

und weil qf = qp + pe,

ſo iſt auch $R = (4a - 8\varrho)\cos 15^0 + r$;

nämlich es iſt $R = 4a\cos 15^0 - 8\varrho\cos 15^0 + 3\varrho$.

Werden nun die beiden Werthe von R einander gleich geſetzt,

ſo erhält man eine Gleichung, durch welche der Werth von ϱ beſtimmt iſt. Nämlich es iſt

$$2a(1 + \cos 30^0) - 2\varrho(2 + \cos 30^0) + h$$
$$= 4a \cos 15^0 + 3\varrho - 8\varrho \cos 15^0,$$

und hieraus folgt

$$2a[1 + \cos 30^0 - 2\cos 15^0] + h = (7 + 2\cos 30^0 - 8\cos 15^0)\varrho.$$

Nun iſt $\cos 30^0 = 0{,}866$ und $\cos 15^0 = 0{,}966$,

alſo $1 + \cos 30^0 - 2\cos 15^0 = -0{,}066$

und $7 + 2\cos 30^0 - 8\cos 15^0 = 1{,}004$,

alſo iſt auch $-2a \times 0{,}066 + h = 1{,}004 \cdot \varrho$,

und weil 1,004 nicht weſentlich von der Einheit verſchieden iſt, ſo hat man

$$\varrho = h - 2a \times 0{,}066;$$

es iſt aber der Decimalbruch $0{,}066 = \frac{1}{15}$, folglich iſt endlich

$$\varrho = h - \tfrac{1}{15} \times 2a;$$

der Radius $ma = \varrho$ iſt alſo um den funfzehnten Theil der ganzen Spannung kleiner als die Wölbungshöhe: was bewieſen werden ſollte.

Da nun $r = 3\varrho$, ſo iſt $r = 3h - \frac{1}{5} \times 2a$,

und da $R = (4a - 8\varrho)\cos 15^0 + r$,

ſo iſt auch

$$R = \left(\frac{38 \times 0{,}966}{15} - \frac{1}{5}\right) \cdot 2a - (8 \cdot 0{,}966 - 3) \cdot h$$
$$= 2{,}2472 \times 2a - 4{,}728 \cdot h,$$

wofür man ohne merklichen Fehler annehmen kann

$$R = \frac{9}{4} \times 2a - \frac{19}{4}h.$$

Durch die drei Radien ϱ, r und R iſt nun auch die Länge der ganzen Wölbungslinie beſtimmt; nämlich es iſt

$$ad = ae + ef + fd$$
$$= \tfrac{1}{6} \cdot 2\varrho\pi + \tfrac{1}{24} \cdot 2r\pi + \tfrac{1}{24} \cdot 2R\pi$$

und daher $S = 2(ad) = \left(\frac{4\varrho + r + R}{6}\right)\pi;$

die innere Fläche eines Tonnengewölbes von der Länge H, deſſen Durchſchnitt die Curve iſt, wird daher ausgedrückt durch

$$Z = HS = H\left(\frac{4\varrho + r + R}{6}\right)\pi.$$

Um die Fläche acd zu erhalten, muß man von den Kreisausſchnitten amc + cpf + fqd die beiden Dreiecke mcn und pnq abziehen; es iſt aber

$$\Delta \text{mcn} = \frac{(\text{mc})(\text{cn})}{2} = (\text{a} - \varrho)^2 \cos 30^0$$

und $\Delta \text{pnq} = \frac{1}{2}(\text{pn})^2 \sin 30^0 = \frac{1}{2}(2\text{a} - 4\varrho)^2 \sin 30^0 = 2(\text{a} - 2\varrho)\sin 30^0$; daher iſt die Fläche

$$\text{acd} = \tfrac{1}{6}\varrho^2\pi + \tfrac{1}{24}\text{r}^2\pi + \tfrac{1}{24}\text{R}^2\pi$$
$$- (\text{a} - \varrho)^2 \cos 30^0 - 2(\text{a} - 2\varrho) \sin 30^0$$

und die ganze Fläche des Querſchnitts iſt hiernach

$$\text{G} = \frac{(4\varrho^2 + \text{r}^2 + \text{R}^2)\pi}{12} - 2[(\text{a} - \varrho)^2 \cos 30^0 + 2(\text{a} - 2\varrho)\sin 30^0],$$

wodurch ſich nun auch der hohle Raum des Gewölbes, ſo wie der maſſive Theil deſſelben berechnen läßt.

§. 169.

Bemerkungen über die Berechnung des maſſiven Theils eines Gewölbes überhaupt.

Bedeutet k den durch die Grundfläche und die innere Decke des Gewölbes eingeſchloſſenen hohlen Raum, und K den Raum, welcher von der Grundfläche und der äußern Fläche des Gewölbes eingeſchloſſen wird, ſo iſt ganz allgemein K—k der Inhalt des maſſiven Theils. Iſt nun die innere und die äußere Fläche einander ähnlich, ſo kann man unmittelbar aus der Formel für k die für K ableiten, wenn man ſtatt der bei k vorkommenden Größen die zu K gehörigen ſetzt; dieſes Verfahren konnte daher angewendet werden bei Kugelgewölben und bei Tonnengewölben, deren Durchſchnitt ein Halbkreis iſt, wenn das Gewölbe durchgehends von gleicher Dicke angenommen wird. Iſt aber die innere Flache der äußern nicht ähnlich, ſo muß man den Werth von K und den von k jeden beſonders berechnen, und es bleibt doch immer noch der Inhalt M des maſſiven Theils M = K — k. Dieſe Formel kann alſo, als in allen Fällen gültig, angeſehen werden, und man macht von derſelben immer Gebrauch, wenn ſich kein bequemeres Mittel darbietet, den geſuchten Werth von M hinlänglich genau zu erhalten. Folgende Betrachtung führt indeſſen zu einem Verfahren, durch welches in den mei-

ſten Fällen, ohne daß eine beſondere Berechnung von K nöthig wäre, der Werth von M gefunden werden kann.

Sind a, b, c ꝛc. Dimenſionen des Gewölbes, von welchen der Inhalt k des hohlen Raumes abhängt, und ſind die entſprechenden Dimenſionen von K die Größen $a+\alpha$, $b+\beta$ und $c+\gamma$, ſo kann man ſetzen

$$k = f(a, b, c \cdots)$$

und es geht k in K über, wenn $a+\alpha$ für a ꝛc. geſetzt wird; es iſt daher

$$K = f[a+\alpha, b+\beta, c+\gamma \cdots],$$

alſo $K - k = f[a+\alpha, b+\beta, c+\gamma \cdots] - f(a, b, c \cdots)$. Dieſer Werth läßt ſich mit Hülfe der Taylor'ſchen Reihe, in ſo fern ſie auf Functionen mit mehreren veränderlichen Größen ausgedehnt wird, beſtimmen, wo hier a, b, c ⋯ dieſe veränderlichen Größen ſind. In meinem Lehrbegriffe der Differentialrechnung iſt §. 44. gezeigt, daß dieſer Werth ſich ausdrücken läßt durch eine Reihe von der einfachen Form

$$f[a+\alpha, b+\beta, c+\gamma \cdots] - f(a, b, c) =$$

$$\frac{1}{1}[A\alpha + B\beta + C\gamma \cdots]^1 + \frac{1}{1\cdot 2}[A\alpha + B\beta + C\gamma \cdots]^2 +$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}[A\alpha + B\beta + C\gamma \cdots]^3 \cdots,$$

wobei nur die Vorausſetzung ſtatt findet, daß für $f(a,b,c)=y$

$$A^m = \left(\frac{d^m y}{(da)^m}\right),\ B^n = \left(\frac{d^n y}{(db)^n}\right),\ C^p = \left(\frac{d^p y}{(dc)^p}\right) \cdots$$

$$\text{und } A^m B^n C^p = \left(\frac{d^{m+n+p} y}{(da)^m (db)^n (dc)^p}\right).$$

Da nun α, β und γ nur geringe Werthe haben in Verhältniß zu den Dimenſionen a, b, c, und da ein Näherungswerth für M immer ausreicht, ſo iſt es hinreichend, wenn von der angegebenen Reihe nur das erſte Glied benutzt wird; es iſt daher der Näherungswerth für M

$$M = K - k = A\alpha + B\beta + C\gamma,$$

oder weil hier $f(a, b, c) = k$, ſo iſt

$$M = \left(\frac{dk}{da}\right)\alpha + \left(\frac{dk}{db}\right)\beta + \left(\frac{dk}{dc}\right)\gamma \cdots$$

Dieſes giebt die praktiſche Regel: Nachdem der hohle Raum

des Gewölbes = k gefunden iſt, ſuche man das Differential von k in Beziehung auf jede Dimenſion, die in der Formel vorkommt, beſonders, multiplicire jedes dieſer partiellen Differentialien mit der Stärke des Gewölbes an der Stelle, wo die Dimenſion genommen iſt: ſo giebt die Summe dieſer Produkte einen Näherungswerth von M.

So iſt z. B. für ein gedrücktes Kugelgewölbe

$$k = \tfrac{2}{3}a^2b\pi,$$

und es iſt nun $\left(\frac{dk}{da}\right) = \tfrac{4}{3}ab\pi$ und $\left(\frac{dk}{db}\right) = \tfrac{2}{3}a^2\pi$,

folglich iſt, wenn die untere Stärke des Gewölbes = α und die obere = β iſt,

$$M = \tfrac{4}{3}ab\pi \times \alpha + \tfrac{2}{3}a^2\pi \times \beta$$
$$= \frac{2a\pi}{3}\,[2b\alpha + a\beta].$$

Vergleicht man dieſen Ausdruck mit dem in §. 167. No. 2. gefundenen, ſo ergiebt ſich, daß hier nur die Glieder fehlen, welche α^2 und $\alpha\beta$ als Factor enthalten: Glieder, die ohne merklichen Fehler außer Acht gelaſſen werden können. Die Formel wird übrigens in allen Fällen noch einfacher, wenn $\alpha = \beta = \gamma$ etc. iſt, wenn das Gewölbe alſo durchgehends gleiche Stärke hat.

Zuſatz. Die hier entwickelte Formel für den Kubikinhalt des maſſiven Theils eines Gewölbes

$$M = \left(\frac{dk}{da}\right)\alpha + \left(\frac{dk}{db}\right)\beta + \left(\frac{dk}{dc}\right)\gamma \cdots$$

wird in den meiſten Fällen angewendet; doch muß man ſtatt derſelben immer, wenn die ſtrengſte Genauigkeit verlangt wird, den Inhalt durch die Formel berechnen

$$M = K - k.$$

§. 170.

Von den kuppelförmigen Gewölben.

Das Viereck abcd, Fig. 112., kann, wenn die Seiten deſſelben parallel ſind, als die Grundfläche eines Tonnengewölbes angeſehen werden, und wird daſſelbe durch zwei auf der Grundfläche vertikale Ebenen ſo geſchnitten, daß die Diagonalen ac und bd die Durchſchnittslinien bilden, ſo bleiben von dem Tonnengewölbe blos zwei Schilder bec und aed

übrig, wenn das Gewölbe in der Richtung von cb und da geführt gedacht wird. Man kann das Tonnengewölbe aber auch als in der Richtung der Linien ba und cd laufend denken, und es ſind alsdann, wenn es durch die vertikalen Ebenen geſchnitten wird, abe und cde die übrig bleibenden Schilder. Dieſe vier in e zuſammenſtoßenden Schilder bilden nun zuſammengenommen ein ſogenanntes Haubengewölbe, welches auf vier Seitenmauern ruhet, und die Linien, wie be, welche je zwei Schilder gemein haben, ſind die Grathen, die hier von innen Furchen bilden, und deren Krümmung von der Form des Cylinders abhängt, von welchem die Tonnengewölbe, durch die das Haubengewölbe gebildet wird, Segmente ſind.

Verbindet man den Scheitel e mit dem Durchſchnittspunkte g der beiden Diagonalen, ſo ſteht dieſe Linie ſenkrecht auf der Grundfläche, und es wird dadurch das ganze Gewölbe in vier Abſchnitte zerlegt, wie bege, die ſämmtlich nach ein und derſelben Regel ſich berechnen laſſen. Von dem Schilde bce iſt das Dreieck bcg die Projection, und es läßt ſich daher ſowohl die Fläche bce, als auch der Inhalt des Körpers bcge nach den, bereits in §. 155. für durchbrochene Cylinder angegebenen Regeln berechnen. Allein abgeſehen davon, daß die Anwendung dieſer Regeln auf den gegenwärtigen Fall ſchon deswegen ſchwierig iſt, weil hier nicht nothwendig die zum Grunde liegenden Cylinder kreisförmig zu ſein brauchen, iſt dieſes Verfahren ſchon deswegen nicht anwendbar, weil es ſich nur auf den beſondern Fall anwenden läßt, wenn abcd ein Parallelogramm iſt: es können aber dergleichen Haubengewölbe auch über ungleichſeitigen Vierecken, ſo wie überhaupt über irgend einem Vielecke conſtruirt gedacht werden, wo das Gewölbe immer aus ſo vielen Schildern beſteht, als die Grundfläche Seiten hat; in allen dieſen Fällen wird daſſelbe durch die Senkrechte eg in Ausſchnitte, wie bgce, zerlegt. Dieſer letztere Umſtand aber führt zu einer bei weitem einfacheren Regel, um dergleichen Gewölbe zu berechnen: nämlich es ſind dieſe Gewölbe immer ſo conſtruirt, daß alle zu der Grundfläche abcd parallele Schnitte ähnliche Figuren geben, und ſie gehören daher zu den, §. 138., betrachteten Körpern, die ein beſtimmtes Verhältniß zu den durch Axendrehung erzeugten

haben. Eine durch eg und gm gelegte Ebene ſchneide das Schild bce in der Curve em, deren Eigenthümlichkeit durch eine Gleichung zwiſchen eg=x und gm=y beſtimmt wird, ſo iſt der Inhalt X des Körpers, welcher erzeugt wird, wenn die Fläche egm um eg ſich dreht, durch die Formel beſtimmt

$$X = \pi \int y^2 dx,$$

und wird der Kubikinhalt des Ausſchnitts bgce von dem Gewölbe = P und die Grundfläche bgc = Y geſetzt, ſo findet, wie in §. 138. bewieſen worden iſt, die Proportion ſtatt

$$X : P = y^2\pi : Y;$$

$$\text{es iſt daher } P = \frac{Y}{y^2\pi} X,$$

oder was daſſelbe iſt

$$P = \frac{Y}{y^2} \int y^2 dx,$$

wo Y die der Abſciſſe eg = x entſprechende Grundfläche bgc bedeutet. Da nun dieſe Formel auf jeden Abſchnitt beſonders, oder auch auf alle gemeinſchaftlich angewendet werden kann, ſo läßt ſich mit Hülfe derſelben der Inhalt k des hohlen Raumes des Gewölbes leicht berechnen, wobei es übrigens eine Erleichterung iſt, daß gm jede beliebige Lage in der Grundfläche haben darf, und daher immer ſo angenommen werden kann, daß die davon abhängende Curve em ſich leicht beſtimmen läßt; es hat durchaus keinen Einfluß auf das Reſultat, wenn die von e nach anderen Punkten des Umfanges der Grundfläche gezogenen Linien, wie z. B. ſelbſt die Grathen eb etc. Curven einer andern Gattung ſind; ſo wie es auch erlaubt iſt, wenn ſich eb leicht beſtimmen läßt, dieſe Curve ſtatt em, und alſo gb ſtatt gm zu benutzen. Uebrigens verſteht es ſich von ſelbſt, daß wenn der Werth von X ohnehin bekannt iſt, nicht erſt die Formel $X = \pi \int y^2 dx$ angewendet zu werden braucht. Es ſei z. B. eb ein elyptiſcher Quadrant, gb=b und ge = a, ſo iſt $X = \frac{2}{3}ab^2\pi$, und es iſt nun

$$P = \frac{Y}{y^2\pi} \cdot X,$$

wo y = b, oder, wenn man die Grundfläche des Gewölbes, alſo Y = G ſetzt,

$$P = \frac{G}{b^2\pi} \cdot \tfrac{2}{3}ab^2\pi = \tfrac{2}{3}aG;$$

der Inhalt des Gewölbes iſt alſo in dieſem Falle $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, der mit demſelben gleiche Grundfläche und Höhe hat, und es giebt der Ausdruck $P = \frac{2}{3}aG$ den Inhalt des Ausſchnitts bgce, wenn man $\Delta bgc = G$ ſetzt; wird aber die ganze Grundfläche abcd, welche jedes beliebige Vieleck ſein kann, mit G bezeichnet, ſo giebt P unmittelbar den Inhalt des ganzen Gewölbes. Die Formel $P = \frac{2}{3}aG$ iſt übrigens immer anwendbar, wenn nur an irgend einen Punkt m ein Bogen em gezogen werden kann, der ein elyptiſcher oder ein Kreisquadrant iſt.

Läßt ſich nun auch auf der äußern Fläche des Gewölbes ein ſolcher Quadrant ziehen, und iſt in Beziehung auf den äußern Umfang die Grundfläche $= G'$ und die Höhe $ge' = A$, ſo iſt der Inhalt

$$Q = \tfrac{2}{3}AG';$$

man findet hieraus den Inhalt des maſſiven Theils von dem Gewölbe

$$M = Q - P = \tfrac{2}{3}(AG' - aG).$$

Giebt es aber auf der äußern Fläche keinen Bogen, der ein Quadrant iſt, ſo muß der Werth von Q beſonders berechnet werden mit Hülfe der Formel

$$Q = \frac{Y}{y^2}\int y^2 dx,$$

wo hier Y und y auf den äußern Umfang der Grundfläche ſich beziehen. Will man aber mit einem Näherungswerthe ſich begnügen, ſo iſt für $A - a = \alpha$ und $G' - G = \gamma$

$$M = \left(\frac{dP}{da}\right)\alpha + \left(\frac{dP}{dG}\right)\gamma.$$

Weil aber $P = \frac{2}{3}aG$, ſo iſt

$$\left(\frac{dP}{da}\right) = \tfrac{2}{3}G \text{ und } \left(\frac{dP}{dG}\right) = \tfrac{2}{3}a,$$

folglich iſt $M = \frac{2}{3}[G\alpha + \gamma a]$,

und nach dieſer Formel wird gewöhnlich der maſſive Theil eines Kloſtergewölbes berechnet: es bedeutet hier G die innere Grundfläche, a den Abſtand derſelben von dem höchſten Punkte, alſo $a = (ge)$, α die obere Stärke des Gewölbes

$= cc'$ und γ die Fläche zwiſchen dem äußern und innern Umfange der Grundfläche, alſo die ganze obere Fläche der Grundmauer, worauf das Gewölbe ruhet. Iſt die Stärke dieſer Mauern durchgehends $= h$, und man bezeichnet den innern Umfang mit u und den äußern mit U, ſo wird

$$\gamma = \left(\frac{U + u}{2}\right) h,$$

und es iſt daher auch

$$M = \tfrac{2}{3}\left[G\alpha + \left(\frac{U + u}{2}\right) ah\right].$$

Sind die Grathen des Kloſtergewölbes keine vollſtändige Quadranten, ſondern blos Kreisbogen wie αa, Fig. 77., und man ſetzt $\alpha p = a$, $pa = b$, $pc = c$, alſo daß der Radius des Kreiſes $R = b + c$ wird, ſo iſt für $pm = x$ und $mn = y$ die Abhängigkeit dieſer Linien von einander durch die Gleichung beſtimmt

$$(\alpha m)(\alpha p + pm) = (nm)(2nq - nm) = (nm)(2mq + mn),$$
$$\text{oder } (a - x)(a + x) = y(2c + y),$$
$$\text{und es iſt daher } y^2 + 2cy = a^2 - x^2,$$
$$\text{und ſonach } (y + c)^2 = a^2 + c^2 - x^2 = R^2 - x^2,$$
$$\text{folglich } y = -c + \sqrt{(R^2 - x^2)}$$
$$\text{und } y^2 = c^2 + R^2 - x^2 - 2c\sqrt{(R^2 - x^2)}.$$

Es iſt alſo in dieſem Falle der durch Axendrehung erzeugte Körper

$$X = \pi\int y^2 dx = \pi\int[c^2 + R^2 - x^2 - 2c\sqrt{(R^2 - x^2)}]\,dx$$
$$= x\pi(R^2 + c^2 - \tfrac{1}{3}x^2) - 2c\pi\int dx\sqrt{(R^2 - x^2)},$$

$$\text{und weil } \int dx\sqrt{(R^2 - x^2)} = \frac{x}{2}\sqrt{(R^2 - x^2)} + \frac{R^2}{2}\,\text{Arc sin}\,\frac{x}{R},$$

ſo iſt

$$X = [R^2 + c^2 - \tfrac{1}{3}x^2]\,x\pi - cx\pi\sqrt{(R^2 - x^2)} - cR^2\pi\,\text{Arc sin}\,\frac{x}{R},$$

wo die Conſtante $= 0$ iſt; für $x = a$ wird

$$X = (R^2 + c^2 - \tfrac{1}{3}a^2)\,a\pi - c^2a\pi - cR^2\pi\,\text{Arc sin}\,\frac{a}{R}$$

$$= (R^2 - \tfrac{1}{3}a^2)\,a\pi - cR^2\pi\,\text{Arc sin}\,\frac{a}{R}.$$

Es läßt ſich nun ebenfalls der Inhalt des von dem Ge-

wölbe eingeſchloſſenen hohlen Raumes durch die Formel berechnen

$$P = \frac{Y}{y^2\pi} \cdot X,$$

und es wird hier Y = G und y = (pa) = b, alſo iſt

$$P = \frac{G}{b^2}\left[(R^2 - \tfrac{1}{3}a^2)\,a - cR^2 \operatorname{Arcsin} \frac{a}{R}\right].$$

Für dieſe Formel iſt es ſchwierig, den Inhalt des maſſiven Theils durch Differentiation zu berechnen, und man thut daher beſſer, den Werth von M zu ermitteln durch den Ausdruck

$$M = (Q - P).$$

Die Oberfläche eines Kloſtergewölbes, oder was daſſelbe iſt, eines kuppelartigen Körpers, läßt ſich mit Hülfe der, §. 139., angegebenen Formeln berechnen; es können dieſe Formeln aber auch auf folgende Art abgeleitet werden: Es ſei, Fig. 112., der Punkt m in der Grundlinie bc ſo gewählt, daß die Curve em, oder was daſſelbe iſt, daß gm normal auf bc ſteht, ſo iſt für eg = x und gm = z die Länge des Bogens em = S durch die Gleichung beſtimmt

$$S = \int dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}$$

und für $\angle mgc = \beta$ und mc = y iſt gm : mc = 1 : tg β,

oder z : y = 1 : tg β;

alſo y = z tg β;

wenn aber die Fläche des durch em abgeſchnittenen Theils von dem Schilde bec, alſo wenn die Fläche mec = Z′ geſetzt wird, ſo iſt, wie leicht einzuſehen,

$$dZ' = ydS,$$

und daher auch

$$dZ' = z \operatorname{tg} \beta dS,$$

$$\text{wobei } dS = \int dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}.$$

Wenn aber die Fläche mge um ge als um eine Axe ſich dreht, ſo iſt die krumme Oberfläche des dadurch erzeugten Körpers, nach §. 129., durch die Formel beſtimmt

$$U = 2\pi \int zdS,$$

während hier gefunden wird

40*

$$Z' = \text{tg}\,\beta \int z dS;$$

$$\text{alſo iſt } Z' : U = \text{tg}\,\beta : 2\pi,$$

$$\text{und daher } Z' = \frac{\text{tg}\,\beta}{2\pi} \cdot U.$$

Auf dieſelbe Art findet man für $\angle mgb = \alpha$, wenn die Fläche mbe $= Z''$ geſetzt wird,

$$Z'' = \frac{\text{tg}\,\alpha}{2\pi} \cdot U;$$

folglich iſt die Fläche des ganzen Schildes bec, wenn daſſelbe mit Z bezeichnet wird,

$$Z = Z' + Z'' = \left(\frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{2\pi}\right) \cdot U,$$

$$\text{oder } Z = (\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta) \cdot 2\pi \int z dS$$

$$= (\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta) \cdot 2\pi \int z dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}.$$

Die hier zuerſt gefundene Formel

$$Z = \left(\frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{2\pi}\right) \cdot U$$

führt zu dem Reſultate: die Fläche eines Schildes wird gefunden, wenn man die krumme Oberfläche des Körpers, welcher durch die Umdrehung von egm um die Axe eg entſteht, mit der Summe der Tangenten der beiden Winkel multiplicirt, in welche bgc durch gm zerlegt wird, und das Produkt durch 2π theilt.

Da nun auf gleiche Weiſe jedes der Schilder, aus welchen das Gewölbe beſteht, berechnet werden kann, ſo läßt ſich durch dieſe Formel die Fläche des ganzen Gewölbes berechnen.

Iſt das Dreieck bgc gleichſchenklig, ſo wird $\alpha = \beta$ und daher in dieſem Falle

$$Z = \frac{\text{tg}\,\beta}{\pi} \cdot U;$$

wenn die Grundfläche abcd eine regelmäßige Figur, z. B. ein regelmäßiges nEck iſt, ſo wird die Oberfläche des ganzen Gewölbes =

$$nZ = \frac{n\,\text{tg}\,\beta}{\pi} \cdot U.$$

Iſt em ein Kreisquadrant, ſo wird der durch egm gebildete Körper eine Halbkugel, und es iſt alſo für gm= R

$$U = 2R^2\pi;$$

daher iſt in dieſem Falle $Z' = R^2 \operatorname{tg} \beta$ und $Z'' = R^2 \operatorname{tg} \alpha$,

$$\text{alſo iſt } Z = R^2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta).$$

Nun iſt aber $\Delta gmc = \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} \beta$ und $\Delta gmb = \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} \alpha$,

$$\text{alſo iſt auch } Z = 2 \times \Delta bgc;$$

wenn alſo ein Schild eines kuppelförmigen Gewölbes ſo conſtruirt iſt, daß der normale Durchſchnitt mge ein Viertelskreis iſt, ſo beträgt die Fläche dieſes Schildes zweimal ſo viel, als die dazu gehörige Grundfläche bgc.

Es ſei em ein Kreisbogen z. B. $= \alpha a$, Fig. 77., ſo iſt, wenn die, für dieſen Fall bereits oben eingeführte Benennung hier beibehalten wird,

$$y = -c + \sqrt{(R^2 - x^2)},$$

$$\text{alſo } dy = \frac{-xdx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}}$$

$$\text{und } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{R^2 - x^2},$$

$$\text{folglich iſt } 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2}$$

$$\text{und daher } dS = dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = \frac{Rdx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}}.$$

Da nun $U = 2\pi \int ydS$, ſo wird hier

$$U = 2\pi \int \frac{[-c + \sqrt{(R^2 - x^2)}]\, Rdx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}},$$

nämlich es iſt

$$U = -2Rc\pi \int \frac{dx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}} + 2R\pi \int dx,$$

$$\text{und weil } \int \frac{dx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}} = \text{Arc sin } \frac{x}{R}, \text{ ſo erhält man}$$

$$U = 2Rx\pi - 2Rc\pi \text{ Arc sin } \frac{x}{R}$$

und man erhält für $x = (ge) = a$, Fig. 112.,

$$U = 2R\pi \left[a - c \text{ Arc sin } \frac{a}{R}\right].$$

$$\text{Nun iſt aber } Z = \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2\pi}\right) U,$$

alſo wird die Fläche des Schildes bec =

$$U = (\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ \beta) \left[aR - cR \text{ Arc sin } \frac{a}{R}\right];$$

es iſt aber in dem Falle, wenn em ein Kreisbogen iſt, zu welchem eg als Sinus und gm als Sinusverſus gehört, $R \text{ Arc sin } \frac{a}{R}$ der Werth für die Länge des Bogens $em = S$, folglich iſt auch

$$U = (\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ \beta)\ [aR - cS],$$

wo für $gm = b$ iſt $c = R - b$ und $R = \sqrt{(a^2 + c^2)}$; es ſind alſo die Werthe der hier vorkommenden Größen R und c durch a und b vollkommen beſtimmt.

Zuſatz. Die Fläche des Schildes bec, Fig. 112., wird durch die Formel ausgedrückt

$$Z = \left(\frac{\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ \beta}{2\pi}\right) U,$$

wo U die Oberfläche des Körpers iſt, welcher von em beſchrieben wird, indem dieſe Curve ſich um eg dreht, und bezeichnet man die Oberfläche des Theils dieſes Körpers, zu welchem der Winkel $bgc = \alpha + \beta$ gehört, mit V, ſo iſt

$$V = \frac{\alpha + \beta}{2\pi} \cdot U$$

und daher auch

$$Z = \left(\frac{\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ \beta}{\alpha + \beta}\right) V.$$

Wird nun mit dem Radius gm innerhalb der Schenkel des Winkels bgc ein Bogen beſchrieben, die Länge dieſes Bogens $= A$ geſetzt und die Länge der Seite $bc = B$, ſo iſt für $gm = R$

$$A = (\alpha + \beta)R \text{ und } B = R(\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ \beta);$$

es iſt alſo auch

$$Z = \frac{B}{A} \cdot V,$$

$$\text{und daher } Z : V = B : A.$$

Die Fläche des Schildes bec verhält ſich alſo zu der Fläche des dazu gehörigen Ausſchnitts des durch Axendrehung erzeugten Körpers, wie die Grundlinien beider Flächen zu einander ſich verhalten.

Eben ſo geht aus dem Früheren hervor, daß der körper-

liche Inhalt von bege zu dem Inhalte des dazu gehörigen Ausſchnitts des durch Axendrehung erzeugten Körpers ſich verhält, wie die Grundflächen beider zu einander ſich verhalten: dieſe Regeln ſind ausreichend, um in jedem Falle ſowohl den Inhalt, als die Oberfläche eines Kloſtergewölbes berechnen zu können, wenn nur die Curve em von der Art iſt, daß man den Inhalt und die Oberfläche des von dieſer Curve durch Axendrehung erzeugten Körpers berechnen kann. Hierbei iſt es übrigens nur nöthig, einen einzigen Ausſchnitt zu berechnen, wenn die Grundfläche des Gewölbes regelmäßig iſt; in jedem anderen Falle aber muß jeder der einzelnen Ausſchnitte beſonders berechnet werden.

§. 171.

Von den Kreuzgewölben.

Ein Kreuzgewölbe wird zwar immer von ſich durchſchneidenden Tonnengewölben gebildet; man kann ſich aber die Entſtehung deſſelben auch, und zwar für die Berechnung zweckmäßiger, auf folgende Art vorſtellen: Es ſei aABb, Fig. 113., der Axendurchſchnitt eines Cylinders, welcher von einer Fläche normal in der Diagonale aB und von einer zweiten, die ebenfalls normal auf abBA iſt, in der Axe cC geſchnitten wird, ſo iſt a$\delta\gamma$ ein Theil der erſtern und c$\gamma\delta$d ein Theil der zweiten dieſer ſchneidenden Flächen, wenn adb die Grundfläche des Cylinderſegments bildet, und aδ iſt ein elyptiſcher Quadrant, wenn ad ein Kreisquadrant iſt. Von dem Dreieck adδ auf der Oberfläche des Cylinders iſt das geradlinige Dreieck acγ die Projection, und man kann, wenn ſtatt der Diagonale aB die zweite Diagonale b′A′, Fig. 113a., gezogen wird, nun auch b′c′γ' als die Projection einer Figur auf der Oberfläche des Cylinders anſehen, die der adδ gleich iſt, aber eine entgegengeſetzte Lage hat. Beide Figuren zuſammen genommen haben a′b′γ' zur Projection, und bilden über a′b′ einen Halbkreis und über a′γ' und b′γ' ein paar elyptiſche Quadranten. Der zwiſchen aδbd und aγb enthaltene Raum iſt ein Theil des Kreuzgewölbes, welches über das Rechteck abBA conſtruirt werden kann. Ein Theil, der dieſem congruent iſt, kann nun auch über A′B′γ' gedacht werden, und

es bleiben alsdann noch die beiden gleichen Räume übrig, von welchen $a'\gamma'A'$ und $b'\gamma'B'$ die Projectionen ſind. Dieſe beiden Räume können auf gleiche Weiſe, wie die beiden anderen, überbaut gedacht werden, wenn man jetzt $a'b'B'A'$ als den Durchſchnitt eines Cylinders anſieht, von welchem nicht $c'C'$, ſondern $\alpha'\beta'$ die Axe iſt: nur wird hier der Bogen über aA, welcher eben ſo, wie adb eine Höhe $= \gamma\delta$ haben muß, nicht ein Halbkreis, ſondern eine halbe Elypſe ſein, wenn aA und ab eine verſchiedene Länge haben. Der ganze, auf dieſe Weiſe überbaute Raum des Rechtecks $a'b'B'A'$ iſt ein Kreuzgewölbe, welches aus zwei paar gleichen Theilen beſteht, und jeder dieſer Theile beſteht aus zwei gleichen Hälften, ſo daß das Gewölbe als aus acht Theilen zuſammengeſetzt angeſehen werden kann, von welchen die acht Dreiecke, in die $a'b'B'A'$ durch $\alpha'\beta'$ und $c'C'$ und die beiden Diagonalen $a'B'$ und $b'A'$ zerlegt wird, die Projectionen ſind: die Diagonalen ſind die Projectionen der Grathen, wie $a\delta$, in welchen die Theile des Gewölbes ſich gegenſeitig begränzen.

Zwar wurde bei der hier gegebenen Beſchreibung von der Entſtehung eines Kreuzgewölbes vorausgeſetzt, daß adb ein Halbkreis ſei, doch iſt dieſes keinesweges nothwendig, ſondern es kann auch dieſe Curve eine halbe Elypſe ſein, und wenn man abBA nicht durch die Axe des Cylinders, ſondern nur parallel zu derſelben annimmt, ſo wird adb ein Kreisbogen; die Conſtruction bleibt dabei immer im Weſentlichen dieſelbe. Sind ad und db ein paar Kreisbogen $< 90°$, von welchen dc der Sinus iſt, wie αap, Fig. 77., ſo wird das Kreuzgewölbe gothiſch genannt, und es ſind alsdann die Linien wie $d\delta$ ebenfalls Grathen deſſelben.

Bei der Berechnung eines Kreuzgewölbes kommt es blos darauf an, den Inhalt eines Octanten, wie $ac\gamma\delta d$ zu ermitteln, indem daſſelbe Verfahren alsdann bei den übrigen wiederholt werden kann. Iſt die Baſis aAbB ein Rechteck, ſo hat man dieſe Rechnung entweder blos einmal, oder in beſondern Fällen zweimal vorzunehmen: einmal für den Theil $a'\gamma'c'$ und alsdann für $\alpha'\gamma'c'$; wenn die Grundfläche ein Quadrat iſt, ſo reicht eine einzige Rechnung hin, indem alsdann alle acht Theile gleich groß ſind.

Da acd$\alpha\gamma\delta$ ein Cylinderausſchnitt iſt, und a$\alpha\gamma\delta$ der Theil eines Cylinderhufes, ſo folgt, daß der Theil aγcdδ eines Kreuzgewölbes in allen Fällen erhalten wird, wenn man das Stück des Cylinderhufes von dem Cylinderausſchnitte abzieht, und hierdurch ſind alſo die Regeln für alle Formen des Kreuzgewölbes beſtimmt: nämlich es iſt, wenn der Kubikinhalt des Cylinderausſchnittes = C, des Hufſtückes a$\alpha\gamma\delta$ = H und des dazu gehörigen Stückes von dem Kreuzgewölbe, alſo aγcdδ = X geſetzt wird,

$$X = C - H.$$

Dieſelbe Formel gilt auch für die Oberfläche, wenn durch C, H und X die Flächen der drei hier angeführten Theile bezeichnet werden. Nun ſei acd der Quadrant eines Kreiſes oder einer Elypſe, ſo iſt, wenn man die Fläche acd = $\alpha\gamma\delta$ = G, ac = a, cd = b und aα = c ſetzt,

$$G = \frac{ab\pi}{4} \text{ und } C = Gc = \frac{abc\pi}{4}.$$

Ferner iſt, wenn man den durch die Umdrehung von $\alpha\gamma\delta$ = acd um $\gamma\delta$ = cd erzeugten Körper = K ſetzt,

$$K : H = (\alpha\gamma)^2\pi : \Delta a\alpha\gamma,$$

alſo für $\Delta a\alpha\gamma = F$,

$$K : H = a^2\pi : F,$$

$$\text{und daher } H = \frac{F}{a^2\pi} \cdot K,$$

und weil $K = \frac{2}{3}a^2b\pi$, ſo wird

$$H = \frac{F}{a^2\pi} \cdot \tfrac{2}{3}a^2b\pi = \tfrac{2}{3}bF;$$

hiernach iſt der Inhalt des Theils aγcdδ von dem Kreuzgewölbe

$$X = cG - \tfrac{2}{3}bF;$$

der Inhalt wird alſo gefunden, wenn man von dem Produkte aus dem Quadranten acd und aα, die Fläche des Dreiecks a$\alpha\gamma$, mit $\frac{2}{3}$ der Höhe cd multiplicirt, abzieht. Da übrigens $G = \frac{ab\pi}{4}$ und $\Delta a\alpha\gamma = F = \frac{ac}{2}$, ſo iſt auch

$$X = \frac{abc\pi}{4} - \frac{abc}{3} = abc\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right);$$

nämlich es iſt $X = 0{,}452 \times abc$.

Sind nun die acht Dreiecke der Grundfläche gleich groß, ſo gilt der hier gefundene Ausdruck für jeden der acht Theile des Kreuzgewölbes, ſobald auch der Bogen über aA eine halbe Elypſe oder ein Halbkreis iſt; der Inhalt des ganzen Gewölbes iſt daher =

$$8X = 3{,}616 \times abc.$$

Um nun den maſſiven Theil eines ſolchen Gewölbſtückes für den Fall zu erhalten, wenn die innern ſo wie die äußern Bogen, Quadranten eines Kreiſes oder einer Elypſe ſind, nehme man an, daß a′b′B′A′ der äußere Umfang des Gewölbes ſei, ſo daß $X = 0{,}452 \times abc$ den Inhalt des Theils von dem Kreuzgewölbe bis zu der äußern Fläche deſſelben ausdrückt, und ziehe, wenn c′a″ die halbe innere Oeffnung iſt, durch a″ die Parallele $a''\gamma''$ zu $a'\gamma'$, ſo iſt für $c'a'' = \alpha$, wenn für die innere Oeffnung b zu β verkürzt wird, und man den dazu gehörigen elyptiſchen Quadranten mit G′ bezeichnet,

$$G' = \frac{\alpha\beta\pi}{4}$$

und weil das innere Cylinderſegment C′ dieſelbe Länge hat wie das äußere, nämlich eine Länge $= a'\alpha' = c$, ſo iſt

$$C' = cG' = \frac{\alpha\beta c\pi}{4}.$$

Für den abzuziehenden Huf H′ aber ſind die Dimenſionen $ca'' = \alpha$, die Höhe über $c' = \beta$ und die Länge $c'\gamma'' = \gamma$, und es iſt daher, weil hier doch immer dieſelbe Formel Gültigkeit haben muß,

$$H' = \frac{\alpha\beta\gamma}{3}.$$

Es iſt ſonach der Kubikinhalt

bis zur äußern Fläche $X = C - H = \frac{abc\pi}{4} - \frac{abc}{3}$,

bis zur innern Fläche $X' = C' - H' = \frac{\alpha\beta c\pi}{4} - \frac{\alpha\beta\gamma}{3}$,

und daher wird der Inhalt des maſſiven Theils

$$M = X - X' = (C - C') - (H - H')$$
$$= \left(\frac{ab - \alpha\beta}{4}\right) c\pi - \left(\frac{abc - \alpha\beta\gamma}{3}\right).$$

Da nun jeder Theil des Kreuzgewölbes beſonders nach dieſer Formel berechnet werden kann, ſo läßt ſich hierdurch der Kubikinhalt des maſſiven Theils des ganzen Gewölbes berechnen.

Das Dreieck $ad\delta$, Fig. 113., iſt die Oberfläche eines Theils des Kreuzgewölbes, und es läßt ſich die des ganzen Gewölbes beſtimmen, wenn gezeigt wird, wie man den Flächeninhalt von $ad\delta$ zu ermitteln im Stande iſt. Es iſt aber $ad\delta = ad\delta\alpha - a\delta\alpha$; nämlich die Fläche des Dreiecks $ad\delta$ wird erhalten, wenn man von der des Cylinderausſchnitts die Fläche des halben Hufes abzieht, und hierdurch ſind alſo die Regeln beſtimmt, nach welchen in allen Fällen die Fläche von $ad\delta$ gefunden werden kann. Für $ad\delta = X$, $ad\delta\alpha = C$ und $a\delta\alpha = H$, iſt hier wieder $X = C - H$, und dabei iſt, wenn man die Länge des Quadranten ad, welcher entweder zu einem Kreiſe oder zu einer Elypſe gehört, $= q$ ſetzt, und für $a\alpha$ die frühere Bezeichnung $= c$ beibehält, $C = qc$; ſonach wird $X = cq - H$. Iſt nun adb ein Halbkreis, ſo wird für $ca = a$ der Werth von $q = \frac{a\pi}{2}$; wenn aber adb eine halbe Elypſe iſt, ſo kann der Werth von q nur Näherungsweiſe berechnet werden, oder was bequemer iſt und eine eben ſo große Genauigkeit giebt, man ſucht die Länge des Bogens $ad = q$ durch eine wirkliche Meſſung zu beſtimmen.

Der Werth von H kann zwar mit Hülfe der Formel, §. 135., beſtimmt werden; allein es iſt in jedem Falle nicht überflüſſig, wenn hier eine beſondere Regel zur Berechnung der Fläche $a\alpha\delta = H$ abgeleitet wird, und dieſes kann auf folgende Art geſchehen: Der Körper $a\alpha\gamma\delta$, von welchem $a\alpha\gamma$ die Grundfläche und $\gamma\delta$ die Höhe iſt, gehört zu der Gattung, in welcher alle, zur Grundfläche parallele Schnitte einander ähnlich ſind, und es iſt daher, wenn man die Oberfläche des Körpers, welcher erzeugt wird, wenn $\alpha\gamma\delta$ um $\delta\gamma$ ſich dreht, mit K und den Umfang der Grundfläche dieſes Körpers mit U bezeichnet,

$$K : H = U : (a\alpha) = c;$$

daher wird $H = \frac{c}{U} \cdot K$,

oder, weil für $\gamma\alpha = b$ wird $U = 2b\pi$,

$$H = \frac{c}{2b\pi} \cdot K.$$

Nun iſt K die Oberfläche eines halben Elypſoids, von welchem $\gamma\alpha = b$ und $\gamma\delta = a$ (wo die Werthe von a und b verwechſelt worden ſind, ſo daß hier die Linie mit a bezeichnet iſt, welche bei Berechnung des Kubikinhalts mit b bezeichnet wurde), die beiden Halbaxen ſind; die Gleichung für die Curve $\delta\alpha$ iſt daher

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

$$\text{und } K = 2\pi \int y dS = 2\pi \int y dx \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}.$$

Da nun aus der Gleichung folgt

$$y dy = -\frac{b^2}{a^2} x dx,$$

$$\text{alſo } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{b^4x^2}{a^4y^2} \text{ und } 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2}$$

$$= \frac{a^2b^2(a^2 - x^2) + b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{b^2}{a^4y^2}(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2),$$

$$\text{ſo iſt } dS = \frac{b}{a^2y}\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)}$$

$$\text{und daher } y dS = \frac{b}{a^2}\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)};$$

folglich erhält man

$$K = \frac{2b\pi}{a^2}\int dx \sqrt{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)},$$

und es iſt daher

$$\text{entweder } K = \frac{2b\pi}{a^2}\int dx \sqrt{[a^4 - (a^2 - b^2)x^2]},$$

$$\text{oder } K = \frac{2b\pi}{a^2}\int dx \sqrt{[a^4 + (b^2 - a^2)x^2]},$$

wo der erſte oder der zweite Ausdruck benutzt werden muß, je nachdem $a > b$ oder $b > a$ iſt.

Im erſtern Falle iſt alſo

$$K = 2b\pi \int dx \sqrt{\left(1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^4}\right)x^2\right)},$$

$$\text{alſo für } \frac{a^2 - b^2}{a^4} = \mu^2 \text{ wird}$$

$$K = 2b\pi \int dx \sqrt{(1 - \mu^2 x^2)}$$
$$= 2b\pi\left[\frac{x\sqrt{(1-\mu^2x^2)}}{2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\mu^2x^2)}}\right]$$
$$= 2b\pi\left[\frac{x\sqrt{(1-\mu^2x^2)}}{2} + \frac{1}{2\mu} \text{ Arc sin } \mu x\right]$$
$$= bx\pi\sqrt{(1-\mu^2x^2)} + \frac{b\pi}{\mu} \text{ Arc sin } \mu x,$$

wo nun $x = a$ geſetzt werden muß, alſo

$$1 - \mu^2 x^2 = 1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4} \cdot a^2 = \frac{b^2}{a^2};$$

folglich iſt der eigentliche Werth von

$$K = ab\pi \cdot \frac{b}{a} + \frac{b\pi}{\mu} \text{ Arc sin } \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}$$
$$= b^2\pi + \frac{a^2 b\pi}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \text{ Arc sin } \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}$$
$$= b^2\pi + \frac{ab\pi}{\sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}} \text{ Arc sin } \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}$$

und weil hier $a > b$, ſo kann man ſetzen $\frac{b}{a} = \cos \varphi$, wodurch alsdann wird $\sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)} = \sin \varphi$; es iſt daher

$$K = b^2\pi + \frac{ab\pi}{\sin \varphi} \cdot \varphi = b\pi\left[b + \frac{a\varphi}{\sin \varphi}\right].$$

Da nun $H = \frac{c}{2b\pi} K$, ſo iſt auch

$$H = \frac{c}{2}\left(b + \frac{a\varphi}{\sin \varphi}\right).$$

Endlich iſt die geſuchte Fläche

$$X = C - H,$$

folglich wird für $a > b$, nämlich für $\gamma\delta > \gamma\alpha$,

$$X = cq - \frac{c}{2}\left(b + \frac{a\varphi}{\sin \varphi}\right),$$

eine einfache Formel zur Berechnung der Fläche eines Kreuzgewölbes.

Iſt $b > a$, ſo muß man für K den Ausdruck benutzen

$$K = \frac{2b\pi}{a^2}\int dx \sqrt{(a^4 + (b^2 - a^2)x^2)},$$

$$\text{alſo } K = 2b\pi\int dx\sqrt{\left(1+\left(\frac{b^2-a^2}{a^4}\right)x^2\right)},$$

und es iſt nun, wenn man $\frac{b^2-a^2}{a^4} = \mu^2$ ſetzt,

$$K = 2b\pi\int dx\sqrt{(1+\mu^2x^2)}$$
$$= 2b\pi\left[\frac{x\sqrt{(1+\mu^2x^2)}}{2} + \tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1+\mu^2x^2)}}\right]$$
$$= 2b\pi\left[\frac{x\sqrt{(1+\mu^2x^2)}}{2} + \frac{1}{2\mu}\log\left(\mu x + \sqrt{(1+\mu^2x^2)}\right)\right]$$
$$= bx\pi\sqrt{(1+\mu^2x^2)} + \frac{b\pi}{\mu}\log\left(\mu x + \sqrt{(1+\mu^2x^2)}\right),$$

wo nun ebenfalls $x = a$ geſetzt werden muß, alſo

$$1 + \mu^2x^2 = 1 + \frac{b^2-a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \text{ und } \mu x = \sqrt{\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)};$$

es iſt daher in dieſem Falle

$$K = ab\pi\cdot\frac{b}{a} + \frac{a^2b\pi}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\log\left[\sqrt{\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)} + \frac{b}{a}\right].$$

Setzt man nun hier $\frac{b}{a} = m$ und $\sqrt{(m^2-1)} = n$, ſo wird

$$K = b^2\pi + \frac{ab\pi}{n}\log(n+m) = b\pi\left[b + \frac{a\log(m+n)}{n}\right].$$

Da nun $H = \frac{c}{2b\pi}K$, ſo wird

$$H = \frac{c}{2}\left[b + \frac{a\log(m+n)}{n}\right]$$

und weil $X = C - H$, ſo iſt in dieſem Falle die Formel für die Fläche eines jeden Abſchnittes des Kreuzgewölbes

$$X = cq - \frac{c}{2}\left[b + \frac{a\log(m+n)}{n}\right].$$

Um nun auch noch für den Fall den Inhalt eines Kreuzgewölbes zu beſtimmen, wenn die Curve ad, Fig. 113., kein Quadrant iſt, nehme man an, es ſei dieſelbe ein Kreisbogen $< 90^0$, zu welchem dc als Sinus gehört, ſo daß das Gewölbe eine gothiſche Form hat; alsdann iſt noch immer, wenn der Inhalt des Cylinderausſchnitts $acd\alpha\gamma\delta = C$ und der des Hufabſchnitts $a\alpha\gamma\delta = H$ geſetzt wird, der Kubikinhalt X von dem übrigbleibenden Ausſchnitte des Kreuzgewölbes durch die Formel beſtimmt

$$X = C - H.$$

Man ſetze hier $ac = b$, $cd = a$, den Radius des Kreiſes, zu welchem der Bogen ad gehört, $= R$ und $R = b + \delta$, $c\gamma = a\alpha = c$ und die Fläche von $acd = G$, ſo iſt

$$G = \frac{R^2}{2} \text{Arc sin} \frac{a}{R} - \frac{a\delta}{2}$$

und daher $C = Gc = c\left[\frac{R^2}{2} \text{Arc sin} \frac{a}{R} - \frac{a\delta}{2}\right]$.

Ferner iſt der Inhalt V des Körpers, welcher entſteht, wenn $\alpha\gamma\delta$ um $\gamma\delta$ ſich dreht, wie bereits bei mehreren Gelegenheiten und namentlich auch §. 170. gezeigt worden iſt,

$$V = (R^2 + \delta^2 - \tfrac{1}{3}x^2)x\pi - \delta x\pi\sqrt{(R^2 - x^2)} - \delta R^2\pi \text{ Arc sin} \frac{x}{R}$$

und es iſt daher für $x = a$

$$V = (R^2 + \delta^2 - \tfrac{1}{3}a^2)\, a\pi - \delta^2 a\pi - \delta R^2\pi \text{ Arc sin} \frac{a}{R}$$

$$= (R^2 - \tfrac{1}{3}a^2)\, a\pi - \delta R^2\pi \text{ Arc sin} \frac{a}{R};$$

weil aber $V : H = (\alpha\gamma)^2\pi : (\Delta a\alpha\gamma) = b^2\pi : \frac{bc}{2}$,

$$\text{ſo iſt } H = \frac{c}{2b\pi} \cdot V,$$

und daher wird

$$H = (R^2 - \tfrac{1}{3}a^2)\frac{ac}{2b} - \frac{c\delta R^2}{2b} \text{Arc sin} \frac{a}{R},$$

oder, weil $R^2 = a^2 + \delta^2$,

$$H = \left(\delta^2 + \frac{2a^2}{3}\right)\frac{ac}{2b} - \frac{c\delta R^2}{2b} \text{Arc sin} \frac{a}{R}.$$

Nun iſt $X = C - H$, alſo auch

$$X = c\left[\frac{R^2}{2} \text{Arc sin} \frac{a}{R} - \frac{a\delta}{2}\right] + \frac{c\delta R^2}{2b} \text{Arc sin} \frac{a}{R} - \left(\delta^2 + \frac{2a^2}{3}\right)\frac{ac}{2b}.$$

Es iſt alſo

$$X = \frac{cR^2}{2b}(b + \delta) \text{ Arc sin} \frac{a}{R} - \frac{ca\delta}{2} - \frac{ca\delta^2}{2b} - \frac{ca^3}{3b}$$

$$= \frac{cR^3}{2b} \text{Arc sin} \frac{a}{R} - \frac{ca\delta(b + \delta)}{2b} - \frac{ca^3}{3b}$$

$$= \frac{c}{b} R\left[\frac{R^2}{2} \text{Arc sin} \frac{a}{R} - \frac{a\delta}{2}\right] - \frac{c}{b} \cdot \frac{a^3}{3};$$

nämlich es iſt, da die hier geklammerte Größe die Fläche acd des Kreisſegmentes ausdrückt, welche mit G bezeichnet worden iſt,

$$X = \frac{c}{b} RG - \frac{c}{b} \cdot \frac{a^3}{3}$$

$$\text{oder } X = \frac{c}{b}\left(RG - \frac{a^3}{3}\right).$$

Es iſt aber, wenn man den Winkel $a\gamma\alpha = \psi$ ſetzt,

$$\gamma\alpha : \alpha a = 1 : \text{tg } \psi,$$

$$\text{alſo } b : c = 1 : \text{tg } \psi, \text{ und daher } \frac{c}{b} = \text{tg } \psi.$$

Hiernach iſt

$$X = \left(GR - \frac{a^3}{3}\right) \text{tg } \psi,$$

wodurch die einfache Regel ausgedrückt wird: der Kubikinhalt eines jeden Abſchnitts eines gothiſchen Kreuzgewölbes wird erhalten, wenn man die Fläche des Kreisſegments acd mit dem Radius des dazu gehörigen Kreiſes multiplicirt, von dem Produkte den dritten Theil des Würfels von der Höhe des Bogens, alſo von cd, abzieht, und den Reſt mit der Tangente des Winkels $a\gamma\alpha$ multiplicirt.

Berechnet man auf dieſe Weiſe den Inhalt des Abſchnittes ſowohl für die innere Fläche des Gewölbes, als auch für die äußere, wo alſo in beiden Fällen nur die einzelnen Dimenſionen um die Stärke des Gewölbes verſchieden ſind, ſo giebt die Differenz beider Reſultate den Kubikinhalt des maſſiven Theils.

Auch für die Fläche eines gothiſchen Kreuzgewölbes erhält man eine einfache Formel. Wird die obige Bezeichnung beibehalten, und ſetzt man hier die krumme Oberfläche $ad\delta\alpha$ des Cylinderſegments $= C$, die des Hufabſchnitts, alſo $a\alpha\delta = H$ und die des Gewölbenabſchnitts, alſo $ad\delta = Z$, ſo iſt wieder

$$Z = C - H,$$

und es iſt, wenn die Länge des Bogens ad mit L bezeichnet wird, $C = cL$,

$$\text{oder, weil } L = R \text{ Arc sin } \frac{a}{R},$$

$$C = cR \text{ Arc sin } \frac{a}{R}.$$

Ferner

Ferner iſt die krumme Oberfläche U des durch Axendrehung erzeugten Körpers, wenn $\alpha\gamma\delta$ um $\gamma\delta$ ſich dreht, durch die Formel beſtimmt

$$U = 2\pi \int y dS,$$

und es iſt hier $y = -\delta + \sqrt{(R^2 - x^2)}$,

und daher, wie §. 170. gezeigt iſt,

$$dS = \frac{Rdx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}};$$

$$\text{folglich } U = 2R\pi \int \frac{ydx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}},$$

welches, wenn man für y den Werth ſetzt, giebt

$$U = 2Rx\pi - 2R\delta\pi \text{ Arc sin } \frac{x}{R},$$

wo $x = a$ geſetzt werden muß, und alſo erhalten wird

$$U = 2aR\pi - 2R\delta\pi \text{ Arc sin } \frac{a}{R}.$$

Da nun $U : H = 2(\gamma\alpha)\pi : (\alpha a) = 2b\pi : c$,

$$\text{ſo iſt } H = \frac{c}{2b\pi} \cdot U,$$

$$\text{und daher } H = \frac{aRc}{b} - \frac{cR\delta}{b} \text{ Arc sin } \frac{a}{R}.$$

Hiernach iſt die Fläche des Gewölbeabſchnittes

$$Z = C - H = cR \text{ Arc sin } \frac{a}{R} + \frac{cR\delta}{b} \text{ Arc sin } \frac{a}{R} - \frac{aRc}{b}$$

$$= \frac{cR}{b}(b + \delta) \text{ Arc sin } \frac{a}{R} - \frac{cR}{b} \cdot a$$

$$= \frac{cR}{b}\left[R \text{ Arc sin } \frac{a}{R} - a\right],$$

und weil $R \text{ Arc sin } \frac{a}{R} = L$ die Länge des Bogens ad ausdrückt und $\frac{c}{b} = \text{tg } \psi$ iſt, ſo wird

$$Z = R(L - a) \text{ tg } \psi.$$

Die Oberfläche des Gewölbeabſchnittes wird alſo erhalten, wenn man von der Länge des Bogens ad = L die Höhe cd = a deſſelben abzieht, und den Reſt mit dem Radius des dazu gehörigen Kreiſes und mit der Tangente des Winkels $a\gamma\alpha = \psi$ multiplicirt.

§. 172.

Einige Bemerkungen über das Berechnen der Gewölbe.

1) Durch die bei den Gewölben vorkommenden ſtereometriſchen Rechnungen ſollen die drei Fragen beantwortet werden: wie groß iſt der innere Raum des Gewölbes? wie groß iſt der Kubikinhalt des maſſiven Theils deſſelben? und wieviel beträgt die innere Fläche? Die hierbei als gegeben angeſehenen Größen ſind ſämmtlich von der Art, daß ſie unmittelbar an dem Gewölbe gemeſſen werden können. Da übrigens in den meiſten Fällen die äußere Form des Gewölbes der innern ähnlich iſt, ſo kann man aus dem Inhalte des Gewölberaumes auch unmittelbar den Kubikinhalt des maſſiven Theils deſſelben ableiten, und zwar entweder dadurch, daß man einmal den Raum bis zur innern Fläche und einmal denſelben bis zur äußern Fläche berechnet, und beide Reſultate von einander abzieht, oder mit Hülfe der Regeln §. 169.

2) Der maſſive Theil eines Gewölbes wird öfters auch aus der Oberfläche deſſelben dadurch abgeleitet, daß man dieſe Fläche als in einer Ebene verbreitet anſieht, über welcher ein Körper von der Stärke des Gewölbes ſich befindet: es wird alſo der maſſive Theil als das Produkt aus dieſer Fläche und der mittleren Stärke des Gewölbes ausgedrückt. Das auf dieſe Weiſe erhaltene Reſultat iſt aber in den meiſten Fällen etwas zu klein, weil die äußere Fläche des Gewölbes größer als die innere iſt, und man bekommt daher bei Anwendung dieſer Regel ein zuverläſſigeres Reſultat, wenn man hierbei das Mittel zwiſchen der innern und äußern Fläche des Gewölbes als Grundfläche annimmt, oder vielmehr, wenn man die Dimenſionen, von welchen die Fläche abhängt, um die halbe Stärke des Gewölbes vergrößert, dieſe Werthe ſtatt der in der Formel für die Fläche vorkommenden Größen ſetzt, und die aus dieſer veränderten Formel berechnete Fläche mit der Stärke des Gewölbes multiplicirt. Analytiſch giebt dieſes folgende Formel für den Kubikinhalt M des maſſiven Theils eines Gewölbes: Es ſei die innere Fläche Z eine Function der Größen a, b, c, welche ſämmtlich, wenn die äußere Fläche berechnet werden ſollte, vergrößert werden müßten, und es ſei

$$Z = f(a, b, c),$$

ſo iſt, wenn die Hälfte der mittleren Stärke des Gewölbes mit δ bezeichnet wird, für

$$Z' = f(a + \delta, b + \delta, c + \delta),$$

$$M = 2\delta Z'$$

in den meiſten Fällen hinreichend genau.

3) In dem Näherungsausdrucke für den maſſiven Theil eines Gewölbes $M = 2\delta Z'$ dürfen, wie auch oben bemerkt worden iſt, nur die in Z vorkommenden Dimenſionen um die halbe Stärke des Gewölbes $= \delta$ vergrößert werden, die, wenn man die äußere Fläche berechnen wollte, größer genommen werden müßten. Daher darf, wenn abBA, Fig. 113., die Grundfläche eines Tonnengewölbes iſt, und man die Länge deſſelben $aA = c$ ſetzt, für c nicht $c + \delta$ geſetzt werden, wohl aber muß man für $ca = b$ und $cd = a$ ſetzen $b + \delta$ und $a + \delta$. Nur wenn ein ſolches Tonnengewölbe Stirnmauern hat, und der zu dem Gewölbe gehörige Theil derſelben ſogleich mit berechnet werden ſoll, muß auch $c + \delta$ ſtatt c geſetzt werden.

4) Alle Gewölbe ſind entweder Cylinder, ſphäriſche oder ſphäroidiſche Abſchnitte, wie dieſes bei Tonnen- und Kugelgewölben der Fall iſt, oder ſie laſſen ſich in Theile zerlegen, die zu den Körpern gehören, in welchen alle zur Grundfläche parallelen Schnitte einander ähnlich ſind; es können daher auch die Regeln zur Berechnung des innern Raumes derſelben, ſo wie die, durch welche ihre innere Fläche ſich beſtimmen läßt, auf einfache Formeln zurück geführt werden. Für cylindriſche und ſphäriſche Abſchnitte ergeben ſich die Regeln unmittelbar aus den Elementen der Stereometrie; ſind die einzelnen Theile eines Gewölbes aber, wie dieſes z. B. bei Kloſter- und bei Kreuzgewölben der Fall iſt, ſolche Körper, in welchen alle zur Grundfläche parallelen Schnitte dieſer ähnlich ſind, ſo braucht man nur einen ſo gelegenen Durchſchnitt zu wählen, der auf der Grundfläche und zugleich auf der Umfangslinie derſelben normal ſteht, und den Inhalt, ſo wie die krumme Oberfläche des Körpers zu berechnen, welcher von dieſem Durchſchnitte beſchrieben wird, indem er ſich um ſeine Axe dreht: um alsdann aus den Reſultaten dieſer Rechnungen den Inhalt und die Oberfläche des einzelnen Theiles von dem Gewölbe durch

einen einfachen Proportionsſatz zu finden. Iſt z. B. bcge, Fig. 112., ein ſolcher Theil eines Gewölbes und gmc der Durchſchnitt, welcher auf der Grundfläche bgc und auch auf der Umfangslinie bc ſenkrecht ſteht, und man ſetzt den Inhalt des Körpers, welcher entſteht, indem cmg um eg ſich dreht, = X, ſeine Oberfläche = Z, den Rauminhalt des Gewölbeabſchnitts bgce = P und die Oberfläche bce deſſelben = Q, ferner gm = ϱ und bc = c, ſo iſt, was bereits bei mehreren Gelegenheiten bewieſen worden iſt,

$$X : P = R^2\pi : \frac{cR}{2} = 2R\pi : c$$

und auch $Z : Q = 2R\pi : c$,

es iſt alſo P und Q bekannt, ſobald man X und Z kennt. Zugleich wird, wenn für die Abſciſſenlinie eg und die Ordinaten parallel zu gm die Gleichung für die Curve em = S gegeben iſt

$$y = f(x),$$

der Werth von X und Z durch die Formel ausgedrückt

$$X = \pi \int y^2 dx$$

und $Z = 2\pi \int y dS$, und $dS = dx\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)}$.

Dieſe Formeln ſind alſo in allen Fällen ausreichend, um ſowohl den Inhalt als die Oberfläche eines Gewölbes zu berechnen.

5) Bei der Angabe der Regeln zur Berechnung eines Gewölbes iſt immer nur von dem Theile die Rede, welcher das eigentliche Gewölbe, alſo die gekrümmte Decke bildet, da für die übrigen Theile, nämlich für Seitenmauern oder für die Pfeiler, worauf das Gewölbe ruhet, keine beſondere Regeln nöthig ſind, indem dieſe in den meiſten Fällen eine ſolche Form haben, daß ſich ihr Inhalt, ſo wie ihre Oberfläche mit Hülfe der Regeln der erſten Abtheilung unmittelbar berechnen laſſen.

6) Der zu überwölbende Raum iſt in dem gegenwärtigen Abſchnitt immer als ein Rechteck oder als ein Kreis angenommen worden; es iſt dieſes aber keinesweges eine nothwendige Form, und man findet bei einigem Nachdenken bald, daß die angegebenen Regeln bei gehöriger Berückſichtigung der Umſtände auch auf jede andere Form der Grundfläche eines Gewölbes ſich anwenden laſſen. Bei Kloſtergewölben, ſo wie

überhaupt bei allen kuppelförmigen Körpern verſteht ſich dieſes von ſelbſt, indem hier doch immer jeder Abſchnitt für ſich berechnet wird. Auch bei Kreuzgewölben iſt dieſes der Fall, und es giebt dergleichen, wo ſich drei Cylinder gegenſeitig ſchneiden ꝛc.; die Regeln für die Berechnung bleiben hierbei immer dieſelben. Iſt die Grundfläche eines Tonnengewölbes blos ein Paralleltrapez, ſo hat man es bei der Berechnung deſſelben mit einem abgeſtumpften Cylinder zu thun ꝛc.

§. 173.

Noch einige Aufgaben und Uebungen.

1) Die Grundfläche aABb, Fig. 113., eines Tonnengewölbes iſt ein Paralleltrapez, und es iſt daſſelbe ſo überwölbt, daß der normale Querſchnitt ein Halbkreis iſt; man ſoll die Formeln für den räumlichen Inhalt, für den Inhalt des maſſiven Theils und für die innere Fläche angeben?

2) Ein Tonnengewölbe, deſſen Querſchnitt einen Halbkreis bildet, iſt von beiden Seiten durch eine ebene Fläche abgeſtumpft, ſo daß, während die Länge deſſelben, da wo es auf den Grundmauern liegt, $= c$ iſt, die Länge oben am Rücken deſſelben nur $c - 2\delta$ beträgt. Welches ſind die Formeln für den Inhalt dieſes Gewölbes?

3) Wie groß iſt der Kubikinhalt des maſſiven Theils eines gothiſchen Tonnengewölbes, wenn es in der bei No. 2. angegebenen Art abgeſtumpft iſt?

4) An ein Tonnengewölbe, deſſen normaler Querſchnitt $\alpha\delta\beta$, Fig. 113., ein Kreisbogen iſt, ſchließt ſich auf beiden Seiten ein halbes Kugelgewölbe an, welches dadurch gebildet wird, daß der Bogen adb ſich um ab als Axe dreht, bis er aus der vertikalen in die horizontale Lage kommt. Wie groß iſt der Kubikinhalt eines auf dieſe Weiſe gebildeten Muldengewölbes?

5) Der aus drei Mittelpunkten beſchriebene Korbbogen adb, Fig. 110., deſſen Conſtruction §. 168. angegeben iſt, bildet den Durchſchnitt eines gedrückten Kugelgewölbes, ſo daß daſſelbe alſo erzeugt wird, indem $a\alpha dc$ um cd ſich dreht; wie groß iſt der Inhalt und wie groß iſt die innere Fläche dieſes Gewölbes?

6) Zeichnet man in einen Kreis ein Rechteck hinein, und

iſt der erſtere die Grundfläche einer Halbkugel und das letztere die eines normalen Parallelepipedon, ſo ſchneiden die Seitenwände deſſelben von der Halbkugel 4 Segmente ab, und es bleibt nun ein Körper übrig, deſſen Grundfläche das gegebene Rechteck iſt, deſſen Seitenwände Kreisſegmente ſind, und der oberhalb von einem ſphäriſchen Vierecke begränzt wird. Ein auf dieſe Art gewölbter Raum wird ein böhmiſches Gewölbe genannt. Nach welchen Regeln werden die einzelnen Theile eines ſolchen Gewölbes berechnet?

7) Wird von einem böhmiſchen Gewölbe der Radius der innern Kugelfläche $= \varrho$, der der äußern $=$ R geſetzt, und iſt das zur Conſtruction deſſelben in den Kreis verzeichnete Rechteck ein Quadrat, ſo erhält man, wenn für π der Näherungswerth $= \frac{22}{7}$ gebraucht wird, den Kubikinhalt des maſſiven Theils dieſes Gewölbes durch die Formel

$$M = \tfrac{44}{21}(R^3 - \varrho^3) - 4[\tfrac{11}{10}R\varrho^2 - \tfrac{341}{7000}R^3 - \tfrac{22}{21}r^3].$$

8) Für den praktiſchen Gebrauch hinreichend genau kann man für den Inhalt des maſſiven Theils eines böhmiſchen Gewölbes die Regel ableiten: es iſt der Inhalt eines ſolchen $\frac{18}{19}$ eines Tonnengewölbes, welches mit dem böhmiſchen Gewölbe daſſelbe Rechteck zur Grundfläche hat, nach dem Halbkreiſe der Kugel gewölbt und mit demſelben gleich ſtark iſt.

9) Es iſt abcdef, Fig. 114., (wo ab zu fe und ac zu ed parallel iſt, die Winkel bei a und c $= 90^0$ und der Winkel bei b $= \varphi$) die Grundfläche, welche ſo überwölbt werden ſoll, daß zwei Tonnengewölbe über bc zuſammenſtoßen; nach welchen Regeln wird der Inhalt dieſes Gewölbes gefunden?

10) Nach welchen Regeln findet man den Inhalt des Gewölbes in dem Falle, wenn abc und fed, Fig. 114., zwei parallel laufende Curven ſind?

Dritter Abſchnitt.

Praktiſche Aufgaben.

§. 174.

Aufgabe 1.

Die beiden rechtwinkligen Paralleltrapeze abBA und AB$\beta\alpha$, Fig. 115., ſtehen normal auf einander, ſo daß AB ihre gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie bildet, und es iſt das Viereck im Raume ab$\beta\alpha$ der Umfang einer gekrümmten Fläche von der Art, daß, wenn an irgend einem Punkte C der gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinie die Senkrechten Cc und Cγ in den Flächen beider Trapeze errichtet werden, die hierdurch ihrer Größe und Länge nach beſtimmte gerade Linie cγ ganz in der gekrümmten Fläche liegt; es ſoll der Inhalt des von dieſer Fläche, von den beiden Trapezen abBA und AB$\beta\alpha$ und von den rechtwinkligen Dreiecken Aaα und Bbβ eingeſchloſſenen Körpers beſtimmt werden.

Auflöſung. Setzt man AB = c, Aa = a, Aα = α, Bb = b, Bβ = β, AC = x, Cc = v und Cγ = z, ſo iſt, wenn ab′ und $\alpha\beta'$ parallel zu AB gezogen werden,

$$ab' : b'b = ac' : c'c \text{ und } \alpha\beta' : \beta'\beta = \alpha\gamma' : \gamma'\gamma,$$

nämlich es iſt

$$c : b - a = x : v - a \text{ und } c : \beta - \alpha = x : z - \alpha,$$

$$\text{alſo } v = \frac{(b-a)x}{c} + a \text{ und } z = \frac{(\beta-\alpha)x}{c} + \alpha.$$

Die Fläche Z des rechtwinkligen Dreiecks cCγ iſt alſo

$$Z = \tfrac{1}{2}vz = \frac{[(b-a)\,x + ac] \times [(\beta-\alpha)\,x + \alpha c]}{2c^2},$$

nämlich es iſt

$$Z = \frac{1}{2c^2}\,[(b-a)(\beta-\alpha)x^2 + (ac(\beta-\alpha) + \alpha c(b-a))x + a\alpha c^2].$$

Wird aber der geſuchte Kubikinhalt mit X bezeichnet, ſo iſt

$$X = \int Z dx,$$

folglich iſt auch

$$X = \frac{(b-a)(\beta-\alpha)x^3}{6c^2} + \frac{c(a(\beta-\alpha) + \alpha(b-a))x^2}{4c^2} + \frac{a\alpha c^2 x}{2c^2}$$

und für x = c erhält man die geſuchte Formel

$$X = c\left[\frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{6} + \frac{a(\beta-\alpha)+\alpha(b-a)}{4} + \frac{a\alpha}{2}\right]$$

$$= c\left[\frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{6} + \frac{a\beta+\alpha b}{4}\right]$$

$$= \frac{c}{6}\left[b\beta + a\alpha + \frac{a\beta+\alpha b}{2}\right],$$

woraus für beſondere Werthe der einzelnen Dimenſionen die entſprechenden Formeln leicht abgeleitet werden können. So wird, wenn die Proportion ſtatt findet

$$a : b = \alpha : \beta,$$

$ab\beta\alpha$ ein Viereck in der Ebene, und es iſt der Körper alsdann eine abgeſtumpfte Pyramide, was auch die Formel für dieſen Fall zu erkennen giebt, denn es iſt bei dieſer Vorausſetzung $a\beta = b\alpha$ und daher

$$X = \frac{c}{6}\,[b\beta + a\alpha + a\beta] = \frac{c}{3}\left[\frac{b\beta}{2} + \frac{a\alpha}{2} + \frac{a\beta}{2}\right],$$

wo $\frac{b\beta}{2}$ und $\frac{a\alpha}{2}$ die beiden Grundflächen ſind, und $\frac{a\beta}{2}$ iſt die mittlere Proportionale zwiſchen beiden.

Zuſatz 1. Die Gleichung für die krumme Fläche $ab\beta\alpha$ läßt ſich auf folgende Art ableiten: Es ſei $aC = x$, $Cm = y$, der normal über m in der krummen Fläche liegende Punkt m' und $mm' = z$, ſo iſt

$$\gamma C : Cc = \gamma m : mm',$$

und, weil $\gamma C = \frac{(\beta-\alpha)x}{c} + \alpha$ und $Cc = \frac{(b-a)x}{c} + a$,

$$(\beta-\alpha)x + \alpha c : (b-a)x + ac = (\beta-\alpha)x + \alpha c - y : z;$$

wodurch die Abhängigkeit der Coordinaten von einander vollkommen beſtimmt iſt.

Zuſatz 2. Sind die Linien a, b, α und β von der Art, daß $b-a$ und $\beta-\alpha$ nur kleine Differenzen geben, ſo kann man, wenn die Linie $c\gamma$ mit t bezeichnet wird, ohne merklichen Fehler annehmen, daß tdx das Differential der Fläche $ab\beta\alpha$ ſei, und es iſt daher, wenn dieſe Fläche mit U bezeichnet wird, in dieſem Falle

$$U = \int t dx$$

und weil

$$t=\sqrt{[(C\gamma)^2+(Cc)^2]}=\sqrt{\left[\left(\frac{(\beta-\alpha)x+\alpha c}{c}\right)^2+\left(\frac{(b-a)x+ac}{c}\right)^2\right]},$$

ſo läßt ſich nun auch für dieſen Fall der Werth von U berechnen.

Anmerkung. Die hier angegebenen Formeln ſind bei der Berechnung eines windſchiefen Daches anwendbar.

§. 175.

Aufgabe 2.

Aus dem Mittelpunkte c′, Fig. 116., iſt mit dem Radius c′b ein Kreisbogen bD beſchrieben, und aus C′ mit C′D, welche mit Dc′ in gerader Linie liegt, der Bogen DYB von einer ſolchen Größe, daß der Radius C′B zu c′b parallel iſt, und daher auch die beiden Tangenten ba und BA an den Punkten b und B ebenfalls parallel laufen. Der zuſammenhängende Bogen bDB dreht ſich um die Axe aA, welche die Tangenten ba und BA normal ſchneidet; es ſoll der Inhalt des hierdurch erzeugten Körpers berechnet werden.

Auflöſung. Setzt man ab = a, AB = A, aA = H, dD = D, c′b = r und C′B = R, ſo giebt

$(c'C')^2 = (c'\gamma)^2 + (C'\gamma)^2$ die Gleichung

$$(r + R)^2 = (H - R - r)^2 + (A - a)^2$$

und die Proportion

$$c'C' : C'\gamma = c'D : D\delta$$

giebt $(r + R) : (A - a) = r : (D - a)$,

alſo $(r + R)(D - a) = r(A - a)$;

es können daher alle dieſe Größen als bekannt angeſehen werden, ſobald 4 derſelben gegeben ſind.

Man ſetze ax = bz = x, xy = y und zy = z, alſo z = y − a,

ſo iſt $z^2 = x(2r - x)$, alſo $y - a = \sqrt{(2rx - x^2)}$;

da nun, wenn der durch abyx erzeugte Körper mit V bezeichnet wird, die Gleichung ſtattfindet

$$V = \pi\int y^2 dx,$$

ſo iſt hier $V = \pi\int dx[a + \sqrt{(2rx - x^2)}]^2$.

Ferner ſei AX = X, XY = Y und YZ = Z, alſo Z = A − Y,

ſo iſt $Z^2 = X(2R - X)$, alſo $Y = A - \sqrt{(2RX - X^2)}$,

und es iſt daher, wenn man den durch AXYB erzeugten Körper = W ſetzt,

$$W = \pi \int Y^2 dX$$

und daher hier $W = \pi \int dX\,[A - \sqrt{(2RX - X^2)}]^2$.
Die Werthe von V und W haben alſo dieſelbe Form, und unterſcheiden ſich blos durch das Zeichen + und — von einander. Nun iſt aber, wenn man ſetzt

$$T = \pi \int dt\,[\alpha \pm \sqrt{(2\varrho t - t^2)}]^2$$
$$= \pi \int dt\,[\alpha^2 + 2\varrho t - t^2 \pm 2\alpha\sqrt{(2\varrho t - t^2)}],$$
$$T = (\alpha^2 t + \varrho t^2 - \tfrac{1}{3}t^3)\,\pi \pm 2\alpha\pi \int dt\sqrt{(2\varrho t - t^2)},$$

und weil $\int dt\sqrt{(2\varrho t - t^2)} =$

$$\left(\frac{t}{2} - \frac{\varrho}{2}\right)\sqrt{(2\varrho t - t^2)} + \frac{\varrho^2}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{(2\varrho t - t^2)}} =$$
$$\left(\frac{t-\varrho}{2}\right)\sqrt{(2\varrho t - t^2)} + \varrho^2 \text{ Arc sin } \sqrt{\frac{t}{2\varrho}},$$ ſo wird

$$T = (\alpha^2 t + \varrho t^2 - \tfrac{1}{3}t^3)\,\pi \pm \alpha\pi\,(t - \varrho)\sqrt{(2\varrho t - t^2)}$$
$$\pm 2\alpha\varrho^2\pi \text{ Arc sin } \sqrt{\frac{t}{2\varrho}},$$

und es iſt daher nun auch

$$V = (a^2 x + rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3)\,\pi + a\pi\,(x - r)\sqrt{(2rx - x^2)}$$
$$+ 2ar^2\pi \text{ Arc sin } \sqrt{\frac{x}{2r}} + C$$

und $W = (A^2 X + RX^2 - \tfrac{1}{3}X^3)\pi - A\pi\,(X - R)\sqrt{(2RX - X^2)}$

$$- 2AR^2\pi \text{ Arc sin } \sqrt{\frac{X}{2R}} + \text{Const.}$$

Um hieraus den Inhalt des ganzen Körpers zu erhalten, muß man, wenn die, durch die gegebenen Größen beſtimmten $c'\delta = m$ und $\gamma\delta = M$ geſetzt werden,

$$x = r + m \text{ und } X = R + M$$

annehmen, und es iſt für dieſe Werthe von x und X der Inhalt des ganzen Körpers = V + W.

Aus dieſem allgemeinen Ausdrucke laſſen ſich nun die Formeln für die hier möglichen beſondern Fälle leicht ableiten. Es ſei

1) jeder der beiden Bogen bD und DB = 90°, ſo wird m = 0 und M = 0, und es iſt alsdann H = r + R und A = a + r + R. Es wird aber in dieſem Falle C und Const. = 0 und

$$V = (a^2 r + \tfrac{2}{3} r^3)\,\pi + 2ar^2\pi \text{ Arc sin } \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$= (a^2 + \tfrac{2}{3} r^2)\, r\pi + 2ar^2\pi \cdot \tfrac{1}{4}\pi$$
$$= (a^2 + \tfrac{2}{3} r^2 + \tfrac{1}{2} ar\pi)\, r\pi,$$
$$W = (A^2 R + \tfrac{2}{3} R^3)\,\pi - 2AR^2\pi \cdot \tfrac{1}{4}\pi$$
$$= (A^2 + \tfrac{2}{3} R^2 - \tfrac{1}{2} AR\pi)\, R\pi,$$

woraus leicht der Werth von $V + W$ gefunden werden kann.

2) Iſt in No. 1. noch außerdem $R = r$, ſo wird

$$V = (a^2 + \tfrac{2}{3} r^2 + \tfrac{1}{2} ar\pi)\, r\pi$$

und $W = (A^2 + \tfrac{2}{3} r^2 - \tfrac{1}{2} Ar\pi)\, r\pi,$

alſo $V + W = (a^2 + A^2 + \tfrac{4}{3} r^2 - \tfrac{1}{2}(A - a) r\pi)\, r\pi,$

und weil jetzt $A - a = 2r$, ſo wird

$$V + W = (a^2 + A^2 + \tfrac{4}{3} r^2 - r^2\pi)\, r\pi.$$

3) Wenn von den Bogen bD und DB jeder ein Halbkreis iſt, ſo wird $A = a$, $H = 2(R + r)$, alſo $x = 2r$ und $X = 2R$, und die allgemeine Formel giebt alsdann, weil hier auch die Conſtanten $= 0$ geſetzt werden müſſen,

$$V = (a^2 \cdot 2r + 4r^3 - \tfrac{8}{3} r^3)\,\pi + 2ar^2\pi \text{ Arc sin } 1$$
$$= 2r\pi\left(a^2 + \frac{2r^2}{3}\right) + 2ar^2\pi \times \tfrac{1}{2}\pi,$$

nämlich es iſt

$$V = 2r\pi\left(a^2 + \frac{2r^2}{3} + \frac{ar\pi}{2}\right)$$

und $W = 2R\pi\left(a^2 + \dfrac{2R^2}{3} - \dfrac{aR\pi}{2}\right),$

alſo iſt $V + W =$

$$2a^2\pi\,(R + r) + \frac{4(R^3 + r^3)\,\pi}{3} - a\,(R^2\pi - r^2\pi)\,\pi.$$

4) Iſt in dieſem letztern Falle $R = r$, ſo erhält man

$$V + W = 4a^2 r\pi + \frac{8r^3\pi}{3}.$$

5) In dem allgemeinen, für V und für W gefundenen Ausdrucke muß man $x = r + m$ und $X = R + M$ ſetzen, um den Inhalt des ganzen, durch aABDb erzeugten Körpers zu erhalten, und es kommt nun auf die beſondere Größe der Winkel bc′D = DC′B an, welches der eigentliche Werth von m und M iſt; es ſind bereits in No. 1. und 3. die Fälle berückſichtigt worden, wo dieſer Winkel $= 90^0$ oder $= 180^0$ iſt: in dem erſten Falle wird $m = M = 0$ und in dem letztern

$m = r$ und $M = R$. Iſt nun dieſer Winkel $> 90^\circ$, aber $< 180^\circ$, ſo hat ſowohl m als M einen poſitiven Werth; dagegen haben dieſe beiden Größen einen negativen Werth, wenn der Winkel $bc'D = DC'B < 90^\circ$ iſt.

6) Soll der Inhalt des durch die Fläche $xyYX$ erzeugten Körpers berechnet werden, ſo wird $V = 0$ für $x = (ax)$ und $W = 0$ für $X = (AX)$, wodurch die Conſtanten beſtimmte Werthe erhalten, und es ſind alsdann die gefundenen Formeln auch für dieſen Fall brauchbar.

Zuſatz 1. Der für $V + W$ gefundene Ausdruck kann häufig angewendet werden; man kann von demſelben Gebrauch machen bei Berechnung der architektoniſchen Glieder, der glokkenförmigen Körper ꝛc., es mögen dieſelben durchgehends maſſiv oder hohl ſein: in dem letztern Falle braucht man nur den Inhalt des inwendig fehlenden Körpers beſonders zu berechnen.

Zuſatz 2. Auch die Formel für die krumme Oberfläche ſolcher Körper läßt ſich nach der bekannten Regel leicht ableiten.

§. 176.

Aufgabe 3.

Zwei Cylinder, deren Radien $CA = R$ und $ca = r$, Fig. 117., gegeben ſind, liegen auf einer Ebene nebeneinander; es ſoll angegeben werden, wie der zwiſchen ihnen bleibende leere Raum, von welchem, wenn man die gemeinſchaftliche Tangente Aa zieht, Aac ein normaler Querſchnitt iſt, zu dem Inhalte der Cylinder ſich verhält.

Auflöſung. Zieht man cb parallel zu aA, ſo iſt $cC = R + r$ und $Cb = R - r$; da nun

$$(cb)^2 = (Cc)^2 - (Cb)^2,$$

ſo iſt auch, wenn man $Aa = bc = a$ ſetzt,

$$a^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr$$

$$\text{und daher } a = 2\sqrt{Rr}.$$

Es iſt alſo die Fläche $AacC = F = (R + r)\sqrt{Rr}$.

Ferner iſt, wenn der Winkel $C = \varphi$ geſetzt wird,

$$R + r : R - r = 1 : \cos\varphi,$$

$$\text{alſo } \cos\varphi = \frac{R - r}{R + r}$$

und für $\angle Cca = \psi$ iſt, da $\varphi + \psi = 180^\circ$,

$$\cos\psi = -\frac{R-r}{R+r} = \frac{r-R}{R+r};$$

es iſt daher

$$\varphi = \text{Arc}\cos\left(\frac{R-r}{R+r}\right) \text{ und } \psi = \text{Arc}\cos\left(\frac{r-R}{R+r}\right),$$

wo die Länge der Bogen für den Radius = 1 ausgedrückt iſt. Um nun die wirkliche Länge der Bogen Ac und ac zu erhalten, muß man φ mit R und ψ mit r multipliciren, und es iſt daher

$$(Ac) = R\,\text{Arc}\cos\left(\frac{R-r}{R+r}\right) \text{ und } (ac) = r\,\text{Arc}\cos\left(\frac{r-R}{R+r}\right),$$

und daher iſt nun der Kreisausſchnitt

$$ACc = \frac{R^2}{2}\text{Arc}\cos\left(\frac{R-r}{R+r}\right) \text{ und } acc = \frac{r^2}{2}\text{Arc}\cos\left(\frac{r-R}{R+r}\right).$$

Werden dieſe beiden Ausſchnitte von der Fläche des Paralleltrapezes AacC abgezogen, ſo bleibt der Inhalt von Aac übrig, und es iſt, wenn man dieſe Fläche = X ſetzt, das Verhältniß der beiden Cylinder zu dem, zwiſchen ihnen und der Fläche, worauf ſie liegen, bleibenden leeren Raume $= (R^2 + r^2)\pi : X$. Es iſt ganz allgemein, wenn $\cos\varphi = x$ geſetzt wird, die Länge des Bogens φ für den Radius = 1 durch die Reihe beſtimmt

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - \left[x + \frac{1}{2\cdot3}\cdot x^3 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}\cdot x^5 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}\cdot x^7 \ldots\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi - [x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7 \ldots],$$

folglich iſt auch

$$\text{Arc}\cos\left(\frac{R-r}{R+r}\right) = \tfrac{1}{2}\pi - \left[\left(\frac{R-r}{R+r}\right) + \tfrac{1}{6}\left(\frac{R-r}{R+r}\right)^3 \ldots\right]$$
$$\text{Arc}\cos\left(\frac{r-R}{R+r}\right) = \tfrac{1}{2}\pi + \left[\left(\frac{R-r}{R+r}\right) + \tfrac{1}{6}\left(\frac{R-r}{R+r}\right)^3 \ldots\right]$$

und man erhält daher die Summe der beiden Kreisausſchnitte

$$\frac{R^2}{2}\text{Arc}\cos\left(\frac{R-r}{R+r}\right) + \frac{r^2}{2}\text{Arc}\cos\left(\frac{r-R}{R+r}\right) =$$
$$\left(\frac{R^2+r^2}{4}\right)\pi - \left(\frac{R^2-r^2}{2}\right)\left[\left(\frac{R-r}{R+r}\right) + \tfrac{1}{6}\left(\frac{R-r}{R+r}\right)^3 \ldots\right]$$
$$= \left(\frac{R^2+r^2}{4}\right)\pi - \frac{(R-r)^2}{2}\left[1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{R-r}{R+r}\right)^2 + \tfrac{3}{40}\left(\frac{R-r}{R+r}\right)^4 \ldots\right];$$

wenn R und r nicht bedeutend in ihrer Größe von einander verſchieden ſind, ſo können in dieſer Reihe immer alle Glieder außer dem erſten weggelaſſen werden, und es iſt daher näherungsweiſe die Summe der beiden Kreisausſchnitte =

$$\left(\frac{R^2 + r^2}{4}\right)\pi - \frac{(R - r)^2}{2}.$$

Dieſes von der Fläche AacC = (R + r) $\sqrt{Rr}$ abgezogen, giebt den Inhalt von Aac = X =

$$(R + r)\sqrt{Rr} + \frac{(R - r)^2}{2} - \left(\frac{R^2 + r^2}{4}\right)\pi.$$

Wird nun die Summe der beiden Kreisflächen mit S bezeichnet, ſo iſt

$$S : X = (R^2+r^2)\pi : (R+r)\sqrt{Rr} + \frac{(R-r)^2}{2} - \left(\frac{R^2+r^2}{4}\right)\pi,$$

und dieſes iſt auch das Verhältniß des Raumes, welchen die Cylinder einnehmen, zu dem, zwiſchen ihnen und der ebenen Fläche bleibenden leeren Raume.

Setzt man R = mr, wo m nur wenig größer als 1 ſein ſoll, ſo wird

$$S:X = (m^2+1)r^2\pi : (m+1)r^2\sqrt{m} + \frac{(m-1)^2r^2}{2} - \frac{(m^2+1)r^2}{4}\pi$$

$$= (m^2+1)\pi : (m+1)\sqrt{m} + \frac{(m-1)^2}{2} - \frac{(m^2+1)\pi}{4}.$$

Am einfachſten wird das Verhältniß für m = 1, wenn alſo die beiden Cylinder gleiche Halbmeſſer haben; in dieſem Falle iſt

$$S : X = 2\pi : 2 - \tfrac{1}{2}\pi$$
$$= 6{,}2832 : 0{,}4292 = 15708 : 1073,$$

nämlich es iſt ziemlich genau

$$S : X = 44 : 3.$$

Das zweite Glied wird aber in Verhältniß zu dem erſten kleiner, wenn m > 1 iſt; ſo erhält man für m = 2

$$S : X = 5\pi : 3\sqrt{2} + \tfrac{1}{2} - \frac{5\pi}{4}$$
$$= 15{,}7080 : 0{,}8156 = 39270 : 2039,$$

nämlich es iſt in dieſem Falle ungefähr

$$S : X = 58 : 3.$$

Zuſatz. Hieraus geht hervor, daß, wenn Cylinder dicht neben einander auf einer Ebene liegen, der, zwiſchen ihnen und

der Ebene bleibende leere Raum höchſtens $\frac{1}{15}$ von dem Raume beträgt, den die Cylinder ausfüllen. Liegen nun mehrere, z. B. n Cylinder nebeneinander, ſo iſt die Anzahl der leeren Räume $= n - 1$, und der an beiden Enden bleibende Raum dazu gerechnet, giebt eben ſoviel leere Räume, als Cylinder nebeneinander liegen: da nun das eben gefundene Verhältniß blos für einen leeren Raum und zwei Cylinder gilt, ſo folgt, daß der ganze, unterhalb der Cylinder bleibende leere Raum $= 2 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$ von dem Raume beträgt, welchen die Cylinder ausfüllen, und man kann dieſes Verhältniß als ein Maximum anſehen.

§. 177.

Aufgabe 4.

Drei Cylinder, von welchen die Kreiſe, Fig. 117., deren Mittelpunkte C, c und γ ſind, die Durchſchnitte bilden, liegen übereinander; es ſoll angegeben werden, wie groß der zwiſchen ihnen bleibende leere Raum iſt.

Auflöſung. Für $Cg = Ce = R$, $ce = cf = r$ und $\gamma g = \gamma f = \varrho$ ſind von dem Dreiecke $Cc\gamma$ die drei Seiten $R + r$, $R + \varrho$ und $r + \varrho$; da nun, wenn die drei Seiten mit A, B und C bezeichnet werden, der der Seite C gegenüberliegende Winkel c ausgedrückt wird durch

$$\cos c = \frac{A^2 + B^2 - C^2}{2AB},$$

ſo iſt hier

$$\cos C = \frac{(R + r)^2 + (R + \varrho)^2 - (r + \varrho)^2}{2(R + r)(R + \varrho)}$$

$$= \frac{R^2 + Rr + R\varrho - r\varrho}{(R + r)(R + \varrho)} = \frac{(R+r)(R+\varrho) - 2r\varrho}{(R+r)(R+\varrho)}$$

$$= 1 - \frac{2r\varrho}{(R + r)(R + \varrho)};$$

es laſſen ſich alſo ganz einfach die Winkel des Dreiecks $Cc\gamma$ berechnen. Halbirt man den Winkel bei C, und zieht an g und e Tangenten, ſo ſchneiden ſich beide in einem Punkte m der Halbirungslinie Cm, und es iſt nun das, von den Tangenten gm, em und dem Bogen ge eingeſchloſſene Dreieck der, in

Beziehung auf den einen Kreis übrig bleibende leere Raum. Da nun, wenn man den Winkel bei C = φ ſetzt,

$$Cg : gm = 1 : \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\varphi,$$

ſo iſt $gm = em = R\ \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\varphi$,

und daher die Fläche des Vierecks $Cgme = R^2\ \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\varphi$.

Der Kreisausſchnitt ege aber iſt $= \frac{\varphi}{360} \cdot R^2\pi$, oder wenn φ als die Länge eines Bogens ausgedrückt wird, für den Radius $= 1$, wo denn $360^0 = 2\pi$ wird, ſo erhält man für die Fläche des Kreisausſchnitts $\frac{R^2\varphi}{2}$, und es iſt daher der Inhalt des Dreiecks gem

$$= F = R^2\ \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \frac{R^2\varphi}{2} = R^2[\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi].$$

Die Fläche gme = F wird alſo erhalten, wenn man den Bogen gn = $\frac{1}{2}$ge von der Tangente dieſes Bogens abzieht, und den Reſt mit dem Quadrate des Radius multiplicirt. Einen ähnlichen Ausdruck erhält man auch für die beiden übrigen Dreiecke gmf und emf, und es läßt ſich hieraus der leere Raum zwiſchen den drei Kreiſen leicht berechnen.

Setzt man $\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\varphi = x$, ſo wird, wie bekannt,

$$\tfrac{1}{2}\varphi = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 \cdots$$

und es iſt daher

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 \cdots$$

alſo wird

$$F = R^2[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 \cdots];$$

eine Reihe, die übrigens nur in dem Fall brauchbar iſt, wenn $\varphi < 90^0$, alſo $x = \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\varphi < 1$, und man kann alsdann ohne bedeutenden Fehler ſetzen

$$F = \frac{R^2x^3}{3}.$$

Da übrigens $\cos\varphi = 1 - \frac{2r\varrho}{(R+r)(R+\varrho)}$

und $\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\right)}$, ſo iſt auch

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\varphi = x = \sqrt{\left[\frac{2r\varrho}{2(R+r)(R+\varrho)-2r\varrho}\right]} = \sqrt{\left[\frac{r\varrho}{(R+r)(R+\varrho)-r\varrho}\right]},$$

nämlich es iſt

$$x = \sqrt{\left(\frac{r\varrho}{R(R + r + \varrho)}\right)} = \sqrt{\frac{r\varrho}{RS}},$$

wenn die Summe der Radien der drei Kreiſe = S geſetzt wird.

Als Näherungswerth für F erhält man hiernach

$$F = \frac{R^2 x^3}{3} = \frac{R^2}{3}\sqrt{\frac{r^3\varrho^3}{R^3 S^3}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{Rr^3\varrho^3}{S^3}}.$$

Daher iſt der Näherungswerth für

$$\Delta gme = \frac{r\varrho}{3S}\sqrt{\frac{Rr\varrho}{S}},$$

$$\text{und eben ſo für } \Delta emf = \frac{R\varrho}{3S}\sqrt{\frac{Rr\varrho}{S}},$$

$$\text{und für } \Delta gmf = \frac{Rr}{3S}\sqrt{\frac{Rr\varrho}{S}}.$$

Die ganze, von drei Bogen eingeſchloſſene Fläche efg würde hiernach ſein

$$X = \frac{Rr + R\varrho + r\varrho}{3(R + r + \varrho)}\sqrt{\left(\frac{Rr\varrho}{R + r + \varrho}\right)}.$$

Zuſatz 1. Für $R = r = \varrho$ giebt die zuletzt gefundene Formel

$$X = \frac{3R^2}{9R}\sqrt{\frac{R^3}{3R}} = \frac{R^2}{9}\sqrt{3} = R^2 \times 0{,}1924.$$

Der wahre Werth von F aber iſt $= R^2\,(\text{tg } 30^0 - \text{Arc } 30^0)$,

$$\text{alſo } F = R^2\,(\text{tg } 30^0 - \tfrac{1}{6}\pi),$$

$$\text{und daher } X = 3F = R^2\,[3 \text{ tg } 30^0 - \tfrac{1}{2}\pi],$$

$$\text{und weil tg } 30^0 = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}, \text{ ſo iſt}$$

$$X = R^2\,[\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\pi] = R^2 \times 0{,}1612;$$

die obige Formel giebt alſo den Inhalt um $0{,}0312 \times R^2$ zu groß, was beinahe $\frac{1}{5}$ der ganzen Fläche beträgt.

Zuſatz 2. Es iſt ungefähr

$$\Delta gme = \frac{r\varrho}{3S}\sqrt{\frac{Rr\varrho}{S}},\quad \Delta emf = \frac{R\varrho}{3S}\sqrt{\frac{Rr\varrho}{S}},$$

$$\text{und daher iſt } \Delta gme : \Delta emf = r : R,$$

nämlich es verhalten ſich die Dreiecke umgekehrt, wie die Radien der dazu gehörigen Kreiſe.

Zuſatz 3. Sind um einen Cylinder ringsumher Cylinder gelegt, die ihn und ſich gegenſeitig berühren, und haben dieſelben alle einen gleichen Durchmeſſer, ſo iſt, wenn ihre An-

zahl n beträgt, $\varphi = \frac{2\pi}{n}$. Da nun der Inhalt des Dreiecks $egn = F = R^2(tg \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi)$,

$$\text{ſo iſt auch } F = R^2\left[tg \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right],$$

und es iſt daher die Summe aller, um den mittlern gebildeten, gleich großen Dreiecke, von welchen jedes von zwei Tangenten und einem Kreisbogen eingeſchloſſen wird,

$$= nF = R^2\left[n \; tg \frac{\pi}{n} - \pi\right].$$

Für $n = 6$ ſind die Cylinder alle dem mittlern gleich, und es iſt

$$nF = 6F = R^2[6 \; tg \; 30^0 - \pi] = R^2 \times 0{,}3224;$$

die Fläche des Kreiſes ſelbſt aber iſt $= R^2\pi = R^2 \times 3{,}1416$; daher verhält ſich der Inhalt des Cylinders zu dem, durch denſelben übrig bleibenden leeren Raume, wie

$$31416 : 3224 = 3927 : 403,$$

alſo ungefähr wie 1 : 10.

Anmerkung. Die Formeln §. 176. und §. 177. können angewendet werden: bei Berechnung der hohlen Räume zwiſchen übereinander geſchichteten Paliſaden, in Holzklaftern ꝛc.

§. 178.

Aufgabe 5.

Es ſollen die Regeln angegeben werden, nach welcher der Inhalt eines Ponton berechnet werden kann.

Auflöſung. Man verſteht unter einem Ponton einen hohlen, oben offenen Körper, deſſen Boden, ſo wie die obere fehlende Fläche, parallel laufende Rechtecke ſind, die eine ſolche Lage haben, daß auch die Seiten des einen zu denen des andern ebenfalls parallel ſind, und der daher 4 Paralleltrapeze zu Seitenflächen hat. Es hat dieſer Körper daher die Form ABCDabcd, Fig. 46 a., nur daß die Pontons eine, in Verhältniß zu ihrer Länge nur unbedeutende Tiefe, worunter der Abſtand der beiden parallelen Flächen ABCD und abcd von einander verſtanden wird, haben. Ueberdies iſt bei den Pontons die obere Fläche die größere, und die Figur ſtellt denſelben daher umgeſtürzt dar, ſo daß abcd der Boden des Körpers iſt. Setzt man die obere Länge AB = A, die untere

ab = a, die obere Breite BC = B, die untere bc = b, und die Tiefe, alſo den Abſtand der beiden parallelen Flächen von einander, = h, ſo wird, da dieſer Körper zu den Obelisken gehört, für welche der Kubikinhalt bereits, §. 75., abgeleitet worden iſt, der Inhalt K eines Ponton ausgedrückt durch die Formel

$$K = \frac{h}{6}[2AB + 2ab + AB + aB]$$

$$= \frac{h}{6}[B(2A + a) + b(2a + A)],$$

und es iſt daher dieſe Aufgabe hierdurch bereits gelöſt, ſo daß die nochmalige Aufnahme derſelben hier überflüſſig ſein würde, wenn nicht einige beſondere intereſſante Bemerkungen dabei angeführt zu werden verdienten. Dieſe ſind:

1) Die Formel für den Inhalt dieſes Körpers läßt ſich am einfachſten finden, wenn man denſelben durch eine Diagonalfläche ABcd in 2 Theile zerlegt denkt; denn es iſt alsdann jeder dieſer beiden Theile ein abgeſtumpftes dreiſeitiges Prisma, ſo daß nun nach §. 73. iſt

$$ABcdab = \frac{(AB) + (cd) + (ab)}{3} \times \Delta mnN,$$

$$ABcdDC = \frac{(AB) + (cd) + (CD)}{3} \times \Delta MNm,$$

wenn mnNM ein normaler Querſchnitt des Körpers iſt, und es iſt ſonach

$$ABcdab = \left(\frac{A + 2a}{3}\right) \times \frac{bh}{2}$$

$$ABcdDC = \left(\frac{2A + a}{3}\right) \times \frac{Bh}{2};$$

beides zuſammengenommen giebt unmittelbar

$$K = \frac{h}{6}[B(2A + a) + b(A + 2a)].$$

2) Auf eine ähnliche Art iſt dieſe Aufgabe von Tobias Mayer in ſeiner praktiſchen Stereometrie, §. 187., gelöſt worden: nur iſt die Auflöſung dort deßwegen weitläufiger, weil er zuvor den Körper durch einen normalen Querſchnitt mnNM in zwei Theile zerlegt, und jeden dieſer Theile beſonders, als aus zwei abgeſtumpften Prismen beſtehend, betrachtet.

3) Eine ziemlich weitläufige Auflöſung dieſer Aufgabe giebt Käſtner in der zweiten Sammlung ſeiner geometriſchen Abhandlungen No. 9., indem er hierbei ganz ohne Noth die Differentialrechnung anwendet, und dabei doch nur zunächſt den einzelnen Fall betrachtet: wenn je zwei einander gegenüber liegende Seitenflächen dieſelbe Neigung gegen die Grundfläche haben.

4) Iſt der Kubikinhalt K gegeben, und ſollen die Dimenſionen A, B, a und b beibehalten werden, ſo findet man unmittelbar den entſprechenden Werth von

$$h = \frac{6K}{B(2A + a) + b(A + 2a)};$$

es ändern ſich in dieſem Falle aber die Neigungswinkel der Kanten, alſo z. B. die Winkel Dda und Ddc; ſollen dieſe aber unverändert dieſelben bleiben, ſo müſſen mit K entweder die Dimenſionen a und b, oder A und B geändert werden, und es kommt alsdann darauf an, wenn K einen geringern Werth = P erhalten ſoll, parallel zur Grundfläche abcd ein Stück von dem Ponton abzuſchneiden, ſo daß der eine Theil = P wird. Für dieſen Fall läßt ſich eine Gleichung auf folgende Art ableiten: Man nehme an, daß abcd und die Neigung der Kanten beibehalten werden, der ganze Körper aber eine ſolche Tiefe = x erhalten ſoll, daß der Inhalt = P wird. Geht in dieſem Falle die obere Fläche durch $\alpha\delta\gamma$, ſo iſt

$$dD : d\delta = h : x,$$

aber auch $dD : d\delta = (AD - ad) : (\alpha\delta - ad)$

und $dD : d\delta = (DC - dc) : (\delta\gamma - dc)$.

Folglich iſt, wenn man $\delta\gamma = \alpha$ und $\delta\alpha = \beta$ ſetzt,

$$h : x = (B - b) : (\beta - b)$$

und $h : x = (A - a) : (\alpha - a)$,

und es iſt ſonach

$$\beta = \frac{(B - b)x}{h} + b \text{ und } \alpha = \frac{(A - a)x}{h} + a;$$

$$\text{da nun } P = \frac{x}{6}[2\alpha\beta + 2ab + \alpha b + a\beta],$$

ſo wird, wenn man für α und β ihre Werthe ſetzt, und alles gehörig reducirt,

$$\frac{(A-a)(B-b)}{3h^2}x^3 + \frac{a(B-b)+b(A-a)}{2h}x^2 + abx - P = 0,$$

eine kubiſche Gleichung, aus welcher in jedem beſondern Falle der Werth von x bequemer ſich ermitteln läßt, als wenn man hier unmittelbar eine trigonometriſche Formel für x ableiten wollte.

5) Die hier zuletzt aufgeſtellte Gleichung iſt beſonders in dem Falle brauchbar, wenn berechnet werden ſoll, wie tief ein belaſtetes Ponton ins Waſſer taucht. Iſt nämlich das ganze Gewicht des Ponton $= Q$, die Belaſtung deſſelben $= R$ und das Gewicht von einem Kubikfuß Waſſer $= k$, wo, wenn von dem rheinländiſchen Fuß und preußiſchen Pfund die Rede iſt, $k = 66$ u. wird, ſo taucht das Ponton ſo tief ein, daß es $\frac{Q+R}{k}$ Kubikfuß Waſſer verdrängt, und man findet dieſe Tiefe $= x$, wenn man in der obigen Gleichung für P den Werth $= \frac{Q+R}{k}$ ſetzt.

§. 179.

Aufgabe 6.

Es ſollen die Regeln angegeben werden, nach welchen die verſchiedenen Kugelhaufen ſich berechnen laſſen, und wie groß in jedem Falle der, in einem ſolchen Haufen bleibende leere Raum iſt.

Aufloͤſung. Werden Kugeln von gleicher Größe regelmäßig in einem Haufen übereinander geſchichtet, ſo findet man die Anzahl der Kugeln, welche ein ſolcher Haufen enthält, mit Hülfe der Formeln für die figurirten Zahlenreihen, und da dieſe aus der Summe der natürlichen Zahlenreihe und aus der Summe der Quadrate der Zahlen abgeleitet werden, ſo ſind dieſe beiden Summationsformeln hier für alle Fälle hinreichend. Es iſt aber, wie leicht gefunden wird,

$$1 + 2 + 3 + 4 \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

und $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

nämlich es iſt, wenn $\int n$ und $\int n^2$ die Summe der Reihen bedeuten, von welchen n oder n^2 das allgemeine Glied iſt,

$$\int n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ und } \int n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Nun ſei

1) der Kugelhaufen eine dreiſeitige Pyramide, ſo iſt die Grundfläche derſelben ein gleichſeitiges Dreieck von der Form, Fig. 118., und die Anzahl der Kugeln in dieſer Fläche iſt, wenn in der Seite n Kugeln liegen, $= 1 + 2 + 3 \cdots + n = \int n = \frac{n(n+1)}{2}$. Die zweite Schicht von unten enthält in jeder Reihe eine Kugel weniger als die erſte, alſo $(n-1)$ Kugeln, und es wird die Anzahl der Kugeln, welche dieſe Schicht enthält, gefunden, wenn man in dem Ausdrucke für $\int n$ ſetzt $n-1$ ſtatt n ꝛc.; die Spitze der Pyramide beſteht blos aus einer einzigen Kugel, und die Summe aller Kugeln $= S$ iſt nichts anderes, als die Summe der Reihe, von welcher $\frac{n(n+1)}{2}$ das allgemeine Glied bildet: es iſt alſo

$$S = \int \frac{n(n+1)}{2} = \int \frac{n^2+n}{2} = \tfrac{1}{2}\int n^2 + \tfrac{1}{2}\int n$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right] = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{6}(2n+1+3),$$

$$\text{und daher endlich } S = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Um den leeren Raum zu beſtimmen, welcher in einem ſolchen Haufen vorhanden iſt, muß man den Inhalt der ſämmtlichen Kugeln mit dem der Pyramide vergleichen, welche den ganzen Haufen ſo umſchließt, daß die Flächen derſelben alle äußern Kugeln des Haufens berühren, und dieſe Pyramide iſt in dem gegenwärtigen Falle, wie leicht einzuſehen, ein Tetraedron, wobei es alſo nur darauf ankommt, die Länge der Seite zu finden. Es ſei abc, Fig. 118., das Dreieck, worauf die unterſte Schicht der Kugeln ruhet, ſo daß normal über den Punkten a, b und c die Mittelpunkte der drei Kugeln ſich befinden, welche die Ecken des aus den Kugeln gebildeten Dreiecks bilden: ſo iſt, wenn der Durchmeſſer der Kugeln $= D$ und die Anzahl derſelben in jeder Seite $= n$ iſt, die Länge von $ab = (n-1)D$. Dieſes Dreieck aber muß nach allen Seiten erweitert werden, um die Grundfläche des Tetraedron zu erhalten, welches den

Kugelhaufen einſchließt, und wenn $\alpha\beta\gamma$ dieſe Grundfläche bildet, ſo müſſen natürlich die drei Seiten des Dreiecks abc von den Seiten des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ gleich weit abſtehen; ſetzt man aber dieſen Abſtand = de = x und den Abſtand der Ecken von einander, alſo $\alpha a = z$, ſo iſt
$\alpha a : af = 1 : \sin \frac{1}{2}\alpha$, alſo $z : x = 1 : \sin 30^0 = 1 : \frac{1}{2}$; es iſt daher $z = 2x = c\gamma$, die Höhe γe der Grundfläche des Tetraedron iſt alſo $= (dc) + 3x = (n - 1) D + 3x$. Da nun $\gamma\alpha : \gamma e = 1 : \sin \alpha = 1 : \sin 60^0 = 1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$, ſo iſt die Seite der Grundfläche für cd = h

$$(\gamma\alpha) = W = \frac{h + 3x}{\frac{1}{2}\sqrt{3}},$$

oder, wenn man einſtweilen $ab = (n - 1) D = w$ ſetzt, ſo iſt

$$h = \frac{w}{2}\sqrt{3}, \text{ folglich iſt } (\alpha\beta) = W = w + 2x\sqrt{3},$$

wo es nun darauf ankommt, den Werth von x zu beſtimmen. In dem Tetraedron iſt der, an jeder Kante, z. B. an $\alpha\beta$ vorkommende Neigungswinkel 2φ zweier Ebenen des Körpers von der Art, daß $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Weil aber je zwei Ebenen die in der Linie ab liegenden Kugeln berühren, ſo iſt für den Radius der Kugel = R

$$cd : R = 1 : \operatorname{tg} \varphi, \text{ oder } x : R = 1 : \operatorname{tg} \varphi,$$

und es iſt alſo

$$x = \frac{R}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{R \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{R\sqrt{(1-\sin^2\varphi)}}{\sin \varphi} = \frac{R\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = R\sqrt{2},$$

nämlich es iſt $x = \frac{D}{2}\sqrt{2}$ und daher die Seite $\alpha\beta$ des Tetraeder $= W = w + 2x\sqrt{3} = w + D\sqrt{6}$. Da nun

$$w = (n - 1) D, \text{ ſo iſt } W = (n - 1 + \sqrt{6}) D.$$

Der Inhalt T des Tetraeder wird ausgedrückt durch

$$T = \frac{W^3\sqrt{2}}{12}, \text{ folglich iſt } T = \frac{(n - 1 + \sqrt{6})^3 D^3 \sqrt{2}}{12};$$

der Kugelhaufen enthält aber $S = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{6}$ Kugeln, und es iſt der Inhalt einer jeden Kugel $= \frac{4R^3\pi}{3} = \frac{D^3\pi}{6}$,

folglich iſt der Inhalt des Kugelhaufens

$$K = \frac{n(n+1)(n+2)}{36} \cdot D^3\pi,$$

und daher der geſuchte leere Raum =

$$T - K = [3(n-1+\sqrt{6})^3\sqrt{2} - n(n+1)(n+2)\pi]\frac{D^3}{36},$$

ein Ausdruck, deſſen numeriſcher Werth leicht gefunden werden kann; es iſt nämlich:

$$T - K = [4{,}24\,(n+1{,}45)^3 - 3{,}14 \cdot n\,(n+1)(n+2)]\,\frac{D^3}{36} \text{ etc.}$$

2) Iſt der Kugelhaufen eine vierſeitige Pyramide, ſo wird die Grundfläche ein Quadrat, welches n^2 Kugeln enthält, wenn in jeder Seite n Kugeln liegen, und die Summe S aller Kugeln iſt

$$S = \int n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

es läßt ſich hier eben ſo der Inhalt der umſchließenden vierſeitigen Pyramide, welche die Hälfte eines Octaeder iſt, berechnen, wie oben bei der dreiſeitigen Pyramide. Hier iſt die Seite W der Pyramide =

$$w + \frac{D}{-1+\sqrt{2}} = w + D(1+\sqrt{2}),$$

und weil $w = (n-1)\,D$, ſo iſt $W = (n+\sqrt{2})\,D$.

Der Inhalt der Hälfte eines Octaeder iſt $= \frac{W^3\sqrt{2}}{6}$, es iſt alſo hier

$$\tfrac{1}{2}O = \frac{(n+\sqrt{2})^3\,D^3\sqrt{2}}{6},$$

während der Inhalt der Kugeln ausgedrückt wird durch

$$K = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{D^3\pi}{6};$$

folglich iſt der leere Raum =

$$\tfrac{1}{2}O - K = [6\sqrt{2}\cdot(n+\sqrt{2})^3 - n(n+1)(2n+1)\pi]\,\frac{D^3}{36}.$$

3) Iſt die Grundfläche des Kugelhaufens ein Rechteck, ſo bildet derſelbe oben einen Rücken, welcher aus einer einzigen Reihe Kugeln beſteht, und iſt die Anzahl der Kugeln in dieſem Rücken = m, ſo liegen in der zweiten Schicht von oben

nach

nach unten zwei Reihen, von welchen jede (m + 1) Kugeln enthält; in der dritten Reihe liegen drei Reihen, deren jede (m + 2) Kugeln enthält ꝛc., ſo daß, wenn der ganze Haufen aus n Schichten beſteht, die unterſte Schicht n Reihen und jede Reihe (m + n − 1) Kugeln enthält. Die Anzahl S aller Kugeln iſt daher = m + 2(m + 1) + 3(m + 2) ..... + n(m + n − 1) und es iſt hiernach n(m + n − 1) das allgemeine Glied der Reihe, alſo

$$S = \int n(m + n - 1) = \int (m - 1)\, n + \int n^2,$$

und weil hier m als eine gegebene Größe angeſehen wird, ſo iſt

$$S = (m - 1) \int n + \int n^2$$

$$= (m - 1) \cdot \frac{n(n + 1)}{2} + \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6},$$

nämlich es iſt

$$S = \frac{n(n + 1)}{6}\,[3(m - 1) + (2n + 1)]$$

$$= \frac{n(n + 1)(3m + 2n - 2)}{6}.$$

4) Die hier angegebene Formel iſt nur in dem Falle richtig, wenn der Kugelhaufen, deſſen Grundfläche ein Rechteck iſt, ganz frei ſteht: lehnt ſich derſelbe aber auf beiden Seiten an Pyramiden, und enthält der Rücken m Kugeln, ſo liegen in der zweiten Schicht zwei Reihen, von welchen jede (m − 1) Kugeln enthält u. ſ. f., ſo daß die unterſte oder nte Schicht aus n Reihen beſteht, von welchen jede (m − n + 1) Kugeln zählt. Die Anzahl aller Kugeln, die Pyramiden nicht mitgerechnet, iſt alsdann

$$S = m + 2(m - 1) + 3(m - 2) \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + n(m - n + 1),$$

nämlich es iſt

$$S = \int n(m - n + 1) = (m + 1) \int n - \int n^2$$

$$= (m + 1) \cdot \frac{n(n + 1)}{2} - \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

und daher wird

$$S = \frac{n(n + 1)}{6}\,[3(m + 1) - (2n + 1)]$$

$$= \frac{n(n + 1)(3m - 2n + 2)}{6}.$$

Sowohl in dieſem, als in dem vorigen Falle wird der Betrag

des leeren Raumes gefunden, wenn man den Inhalt des dazu gehörigen abgeſtumpften Prisma berechnet, für welches die Formel nach dem bisher Angeführten leicht gefunden werden kann.

Zuſatz. Wenn ein Kugelhaufen nicht vollſtändig iſt, ſo läßt ſich doch immer die Anzahl der Kugeln leicht finden, denn man braucht zu dieſer Abſicht nur von dem vollſtändigen Haufen den fehlenden abzuziehen.

§. 180.

Aufgabe 7.

Um einen Cylinder iſt ein anderer ſchraubenförmig herumgewunden; es ſoll der Kubikinhalt dieſes letztern berechnet werden.

Auflöſung. Wird der umwundene Cylinder, welchen man die Spindel nennt, normal durchſchnitten, ſo ſchneidet dieſe Ebene den umwindenden Cylinder in einer Fläche, die für alle parallele Schnitte gleich groß iſt, wenn, wie hier vorausgeſetzt wird, der Schraubengang regelmäßig fortgeht, und es iſt, wenn die Fläche dieſes Querſchnittes $= F$ geſetzt wird und der Inhalt des umwindenden Cylinders $= X$,

$$dX = Fdx,$$

wo x den normalen Abſtand des Schnittes von der Grundfläche der Spindel bedeutet. Es iſt alſo

$$X = \int Fdx = Fx$$

und für $x = b$ wird $X = Fb$;

der Inhalt des umwindenden Cylinders wird alſo gefunden, wenn man den, durch die Axe der Spindel normal geführten Querſchnitt des Schraubenganges mit der Höhe der Spindel multiplicirt, und es behält dieſe Regel ihre Gültigkeit, welche Form auch die Grundfläche der Spindel und der umwindende Cylinder haben mag.

Ein Schraubengang entſteht bekanntlich, wenn um die Spindel ein rechtwinkliges Dreieck herumgelegt wird, von welchem die eine Kathete a dem Umfange der Spindel, die andere b, der Höhe derſelben und die Hypotenuſe c der ganzen Länge des Schraubenganges gleich iſt, und es iſt nun, wenn der, a gegenüber liegende Winkel $= \alpha$ geſetzt wird,

$$b : c = 1 : \sec \alpha,$$

$$\text{alſo } b = \frac{c}{\sec\,\alpha},$$

$$\text{folglich iſt auch } X = Fb = \frac{cF}{\sec\,\alpha}.$$

Wird aber bei einem Cylinder der normale Durchſchnitt = G und ein ſchiefer, unter dem Winkel α geführter Schnitt = F geſetzt, ſo iſt nach §. 149.

$$G : F = 1 : \sec\,\alpha$$

$$\text{und es iſt daher } \frac{F}{\sec\,\alpha} = G,$$

$$\text{folglich iſt endlich auch } X = cG.$$

Der Inhalt des, die Spindel umwindenden Cylinders iſt alſo dem eines normalen Cylinders gleich, welcher den normalen Querſchnitt des umwindenden Cylinders zur Grundfläche und die ganze Länge deſſelben zur Höhe hat.

Anmerkung. Nach dieſer Regel läßt ſich der Inhalt der Wange einer Wendeltreppe, ſo wie von einem jeden andern Körper der Art leicht berechnen.

§. 181.

Aufgabe 8.

Ein Gefäß, welches die Form eines abgeſtumpften Kegels hat, ſoll um einen beſtimmten Kubikinhalt = P dadurch vergrößert werden, daß man demſelben einen Kugelabſchnitt anſetzt; es ſoll der Radius der entſprechenden Kugel, ſo wie die Höhe des erforderlichen Abſchnitts berechnet werden.

Auflöſung. Es ſei ABba, Fig. 105., der Durchſchnitt des abgeſtumpften Kegels und anb der des anzuſetzenden Kugelabſchnitts, ca = cb = a, die geſuchte Höhe des Abſchnitts cn = x und der Radius der Kugel = R, ſo iſt bekanntlich der Inhalt dieſes Abſchnitts, nach §. 81.,

$$P = (Rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3)\,\pi,$$

$$\text{und } x : a = a : 2R - x, \text{ alſo } R = \frac{a^2 + x^2}{2x},$$

es iſt alſo auch

$$\frac{P}{\pi} = \frac{(a^2 + x^2)\,x}{2} - \frac{x^3}{3},$$

$$\text{und daher } \frac{6P}{\pi} = 3a^2x + x^3,$$

folglich iſt, wenn man $\frac{p}{\pi} = ma^3$ ſetzt,

$$x^3 + 3a^2x - 6ma^3 = 0.$$

Nun iſt allgemein, nach der Cardansregel, von der Gleichung

$$x^3 + bx - c = 0$$

eine Wurzel

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left[c + \sqrt{\left(c^2 + \frac{4b^3}{27}\right)}\right]} - \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left[c - \sqrt{\left(c^2 + \frac{4b^3}{27}\right)}\right]}.$$

Da nun hier $b = 3a^2$ und $c = 6ma^3$, ſo iſt

$$\sqrt{\left(c^2 + \frac{4b^3}{27}\right)} = \sqrt{(36m^2a^6 + 4a^6)} = 2a^3\sqrt{(9m^2 + 1)},$$

und daher

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left[c \pm \sqrt{\left(c^2 + \frac{4b^3}{27}\right)}\right]} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}[6ma^3 \pm 2a^3\sqrt{(9m^2+1)}]}$$

$$= a\sqrt[3]{[3m \pm \sqrt{(9m^2 + 1)}]};$$

folglich iſt die geſuchte Höhe des Abſchnitts

$$x = a\left[\sqrt[3]{(3m + \sqrt{(9m^2 + 1)})} + \sqrt[3]{(3m - \sqrt{(9m^2 + 1)})}\right],$$

und der Radius der Kugel iſt nun durch die Gleichung beſtimmt

$$R = \frac{a^2 + x^2}{2x}.$$

Zuſatz. Trigonometriſch läßt ſich der Werth von x auf folgende Art beſtimmen. Es iſt bekanntlich von der Gleichung

$$x^3 + px - q = 0$$

$$\text{eine Wurzel } x = 2 \cot 2\psi \times \sqrt{\frac{p}{3}}$$

$$\text{für } \operatorname{tg} \psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi} \text{ und } \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{q}\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Da nun hier $p = 3a^2$ und $q = 6ma^3$,

$$\text{ſo wird } \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{6ma^3}\sqrt{a^6} = \frac{1}{3m},$$

und es iſt für dieſen Werth von $\operatorname{tg} \varphi$ und für $\operatorname{tg} \psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi}$ der geſuchte Werth von $x = 2a \cot 2\psi$.

Berlin, gedruckt bei A. Petſch.

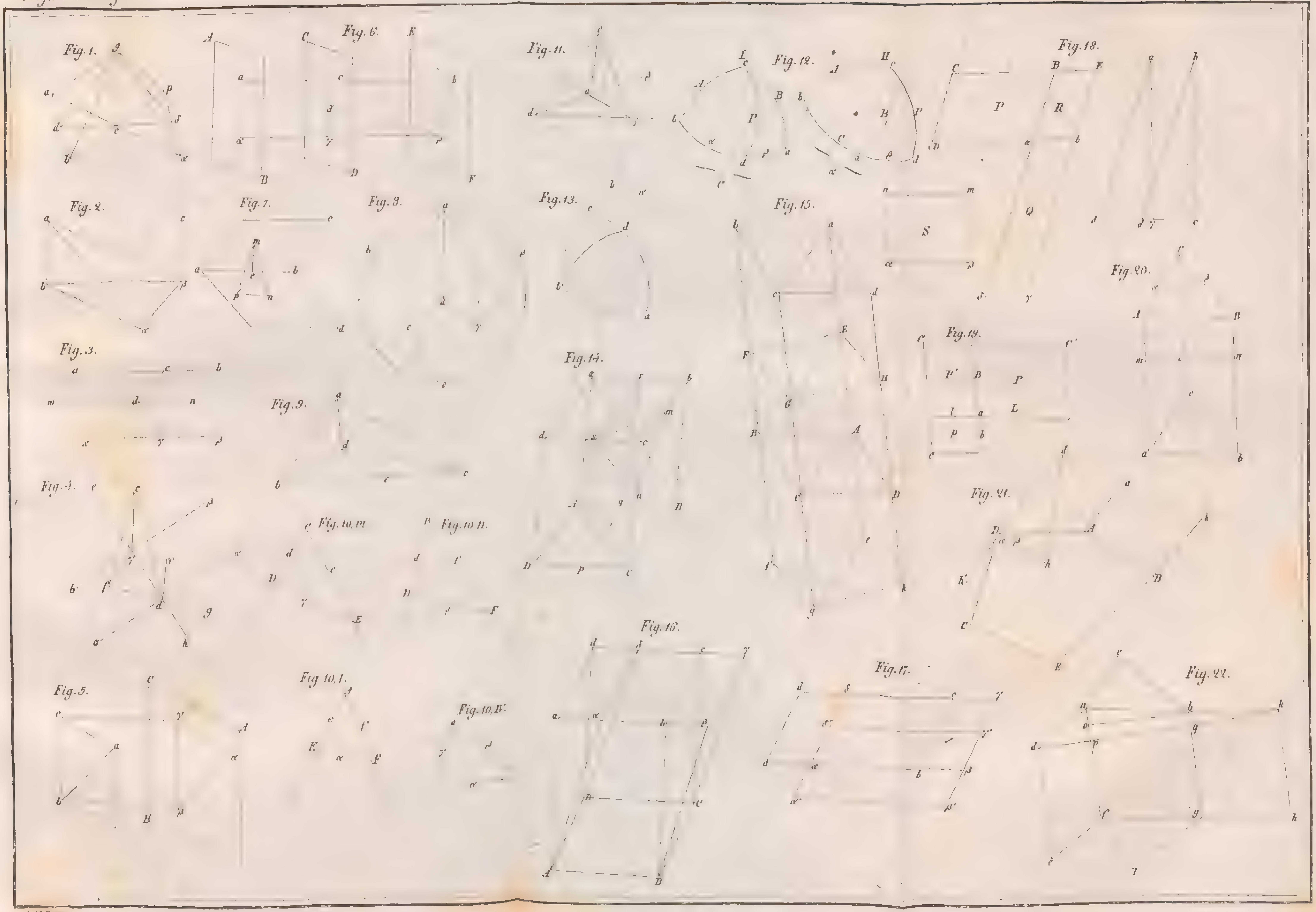


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10, I.
Fig. 10, II.
Fig. 10, III.
Fig. 10, IV.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.

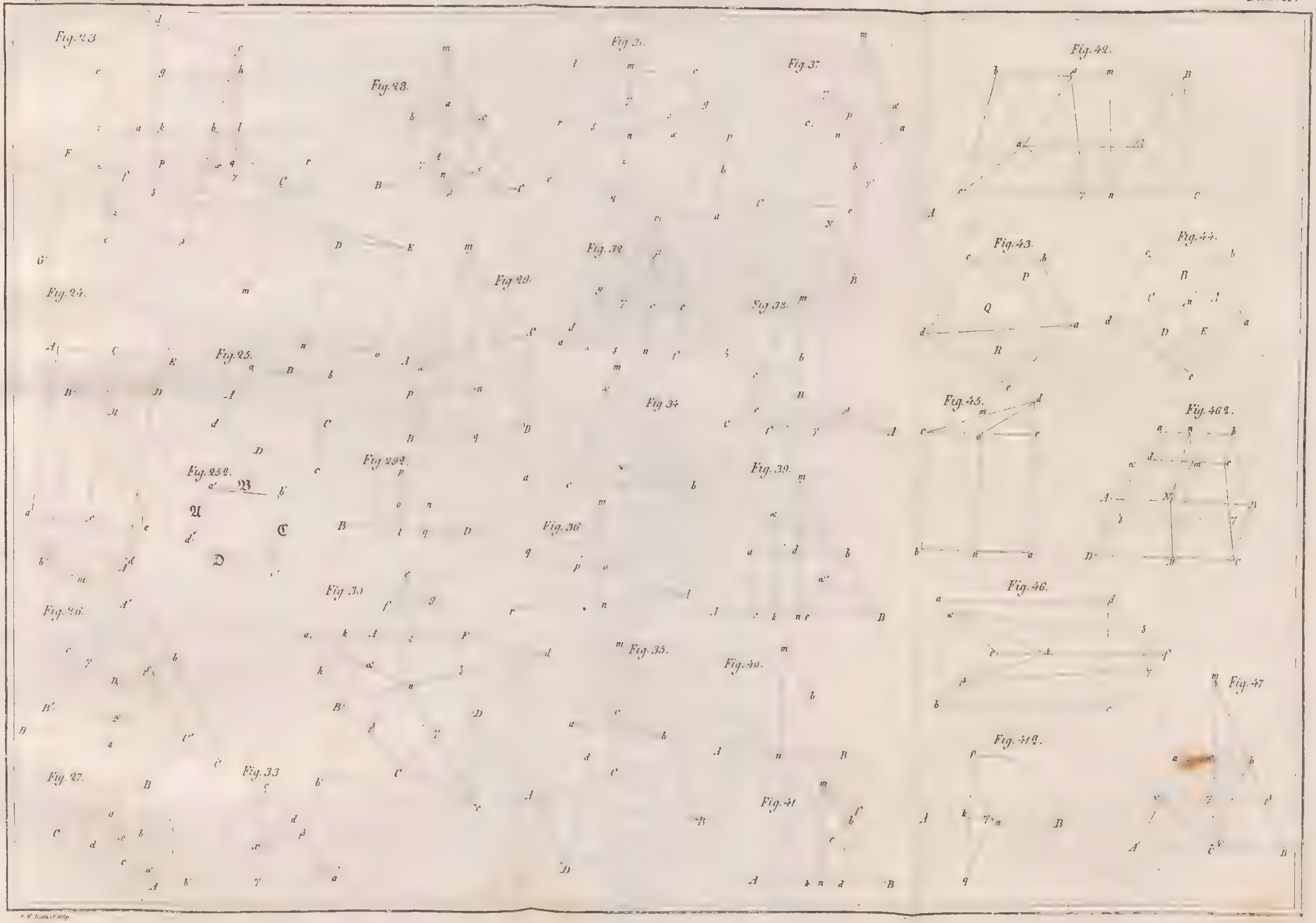


Fig. 23
Fig. 24
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 27
Fig. 28
Fig. 29
Fig. 30
Fig. 31
Fig. 32
Fig. 33
Fig. 34
Fig. 35
Fig. 36
Fig. 37
Fig. 38
Fig. 39
Fig. 40
Fig. 41
Fig. 42
Fig. 43
Fig. 44
Fig. 45
Fig. 46
Fig. 47

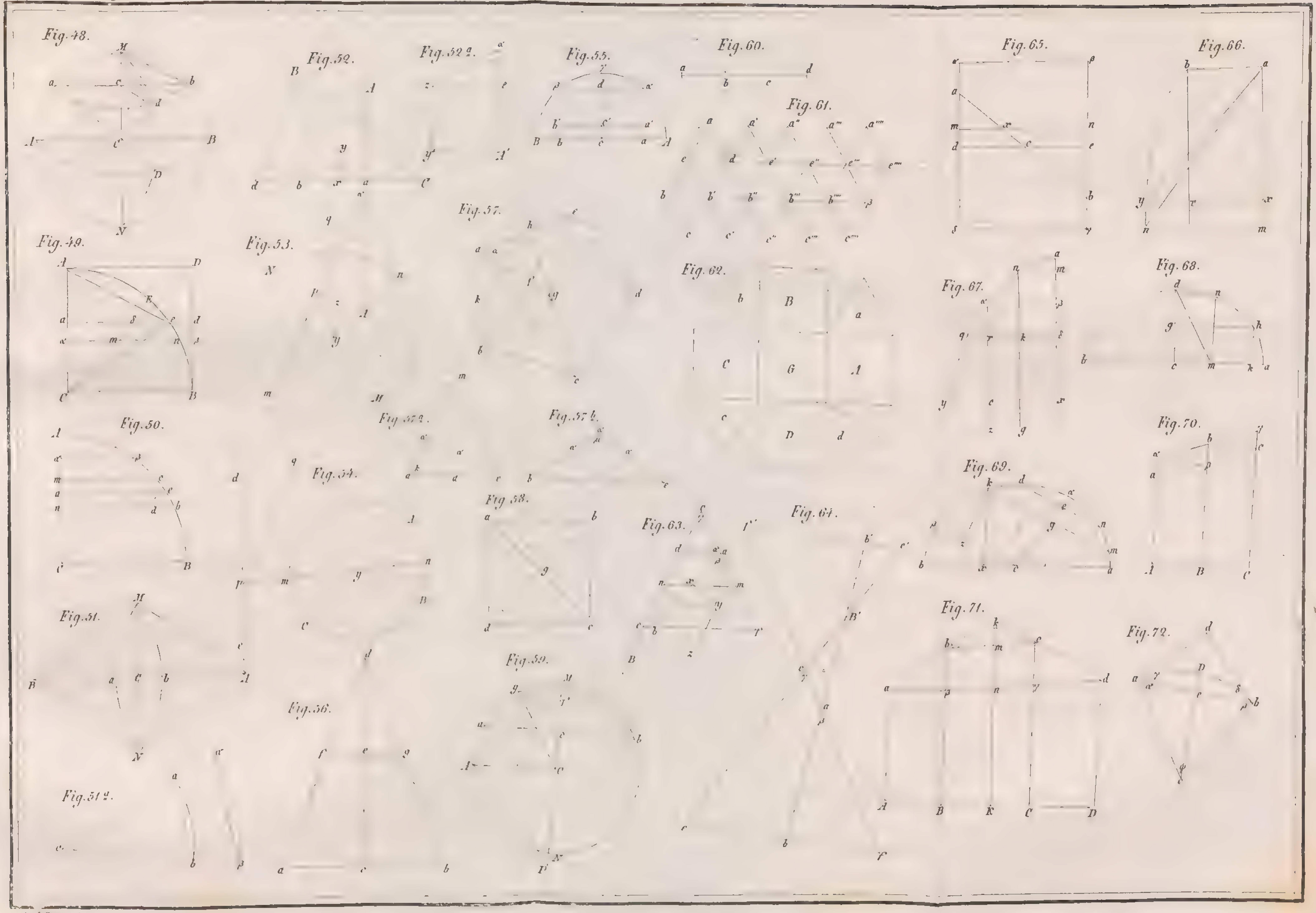


Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 51 a.
Fig. 52.
Fig. 52 a.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 57 a.
Fig. 57 b.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.

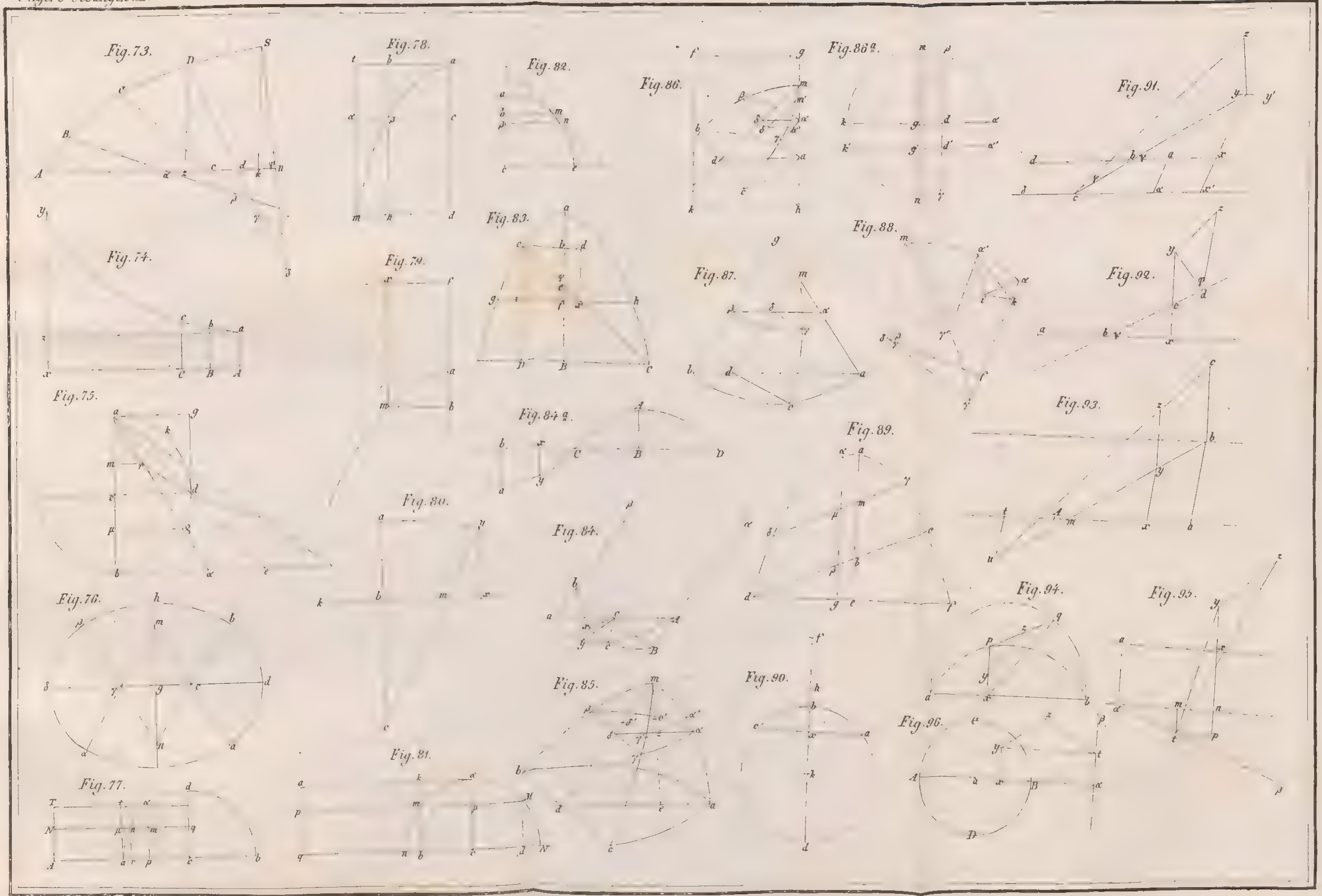
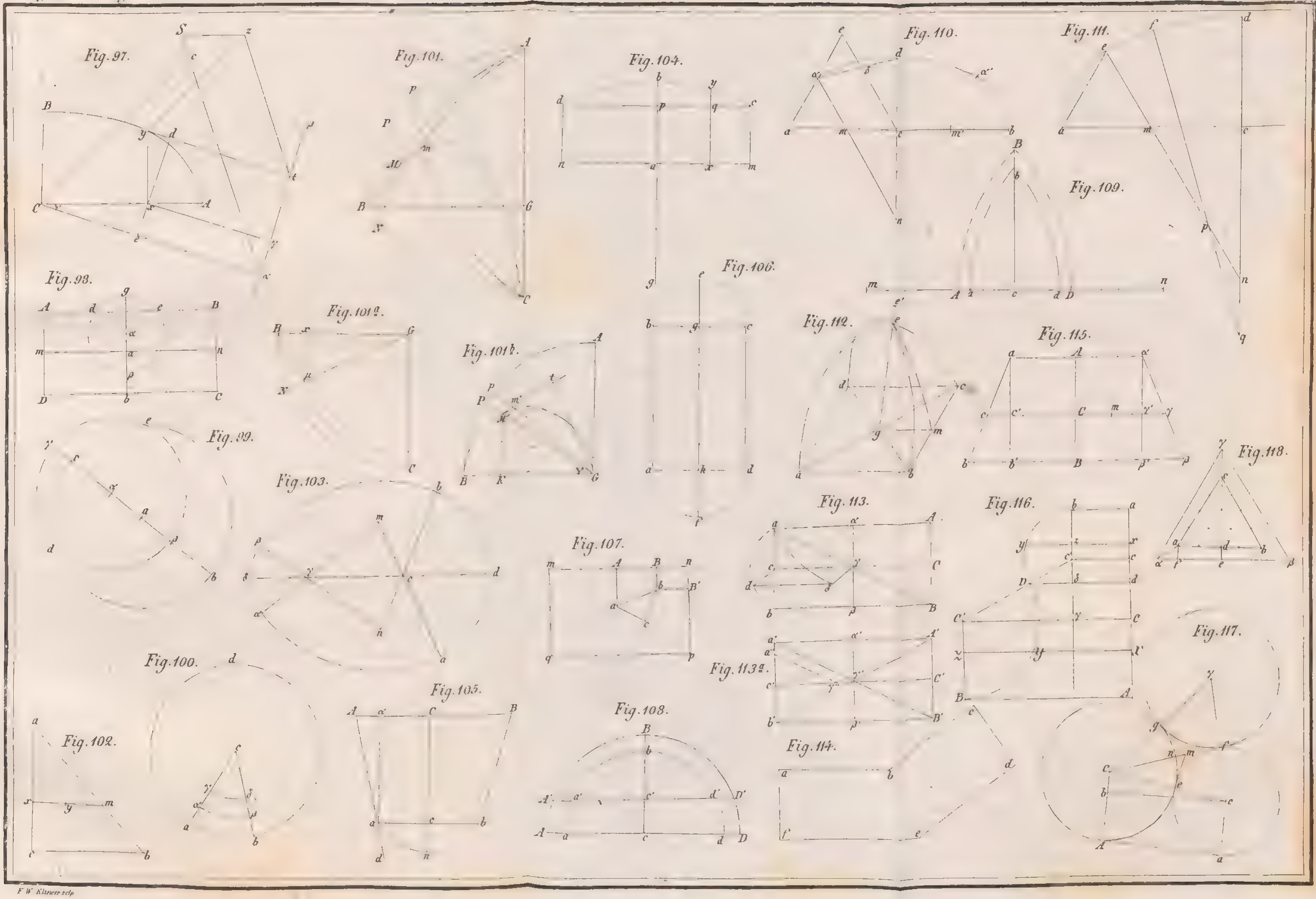


Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 84 a.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 86 a.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.



F. W. Kliewer sclp.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Unger, Ephraim Salomon,

Übungen aus der angewandten Mathematik für Techniker und besonders für Architekten, Artilleristen, Ingenieure, Forst- und Bergbau-Beamte

Bd.: 1

Berlin 1830

Math.a. 245 t-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081208-6